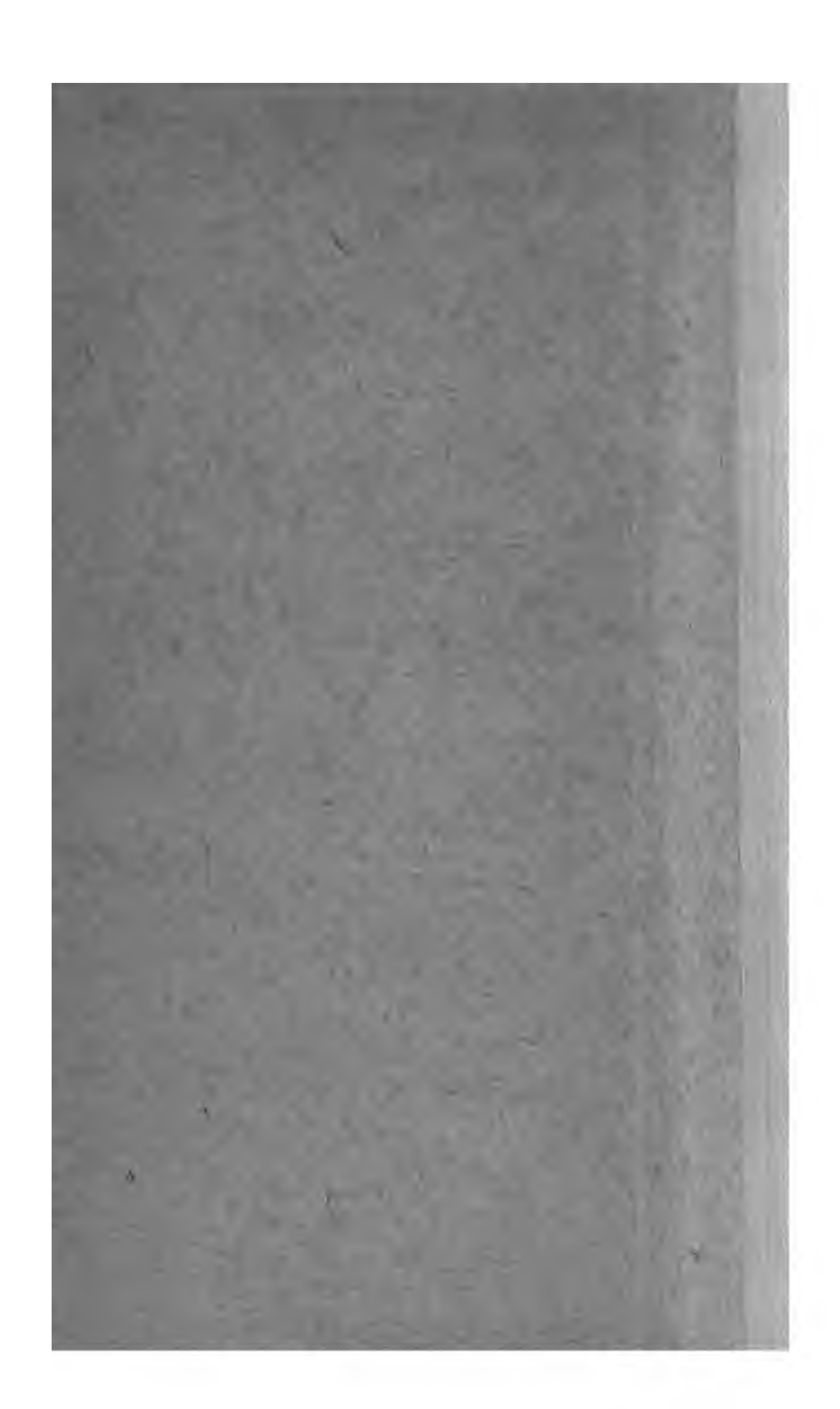

SEARCH LIBRARIES
3 06274643 7









# Archiv

der

# Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

---

Herausgegeben

von

*Johann August Grunert*,
Professor zu Greifswald.

Fünfundzwanzigster Theil. Viertes Heft.

Mit zwei lithographirten Tafeln.

**Greifswald.**
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
Th. Kunike.

1855.

# Inhaltsverzeichniss des fünfundzwanzigsten Theils.

---

## Arithmetik.

## Geometrie.

## Trigonometrie.



## Geodäsie.

## Mechanik.



## Physik.

## Nautik.



## Geschichte der Mathematik und Physik.



## Uebungsaufgaben für Schüler.

## Literarische Berichte *).



*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

# I.

# Grundzüge einer neuen Methode der höheren Analysis.

Von

Herrn Dr. *W. Schell*,

Privatdocenten an der Universität zu Marburg.

---

## §. 1.

## Begriff des Quotials.

Wenn $u'$ der geänderte Werth einer Variabeln $u$ ist, so erhält man durch Subtraction die Differenz von $u$, nämlich $\Delta u = u' - u$, und diese Gleichung oder auch die aus ihr abgeleitete $u' = u + \Delta u$ lehrt den geänderten Werth $u'$ aus dem ursprünglichen $u$ und seiner Differenz $\Delta u$ finden. Geht $u'$ in seinen ursprünglichen Werth $u$ zurück, so nähert sich die Differenz der Null als Grenze, wird mit $du$ bezeichnet und Differential von $u$ genannt. Auf dieser einfachen Beziehung zwischen einer Grösse und ihrem geänderten Werthe beruhen im Grunde die fünf Methoden der Analysis, welche die Namen der Differenzen- und Summenrechnung, der Differential- und Integralrechnung, sowie der Variationsrechnung führen.

Auf ähnliche Weise erhält man durch Division von $u'$ mit $u$ den Quotienten von $u$, nämlich die Grösse $\frac{u'}{u}$, die wir mit $\Theta u$ bezeichnen wollen. Die Gleichung $\Theta u = \frac{u'}{u}$ oder auch $u' = u . \Theta u$ lehrt wieder den geänderten Werth $u'$ aus dem ursprünglichen $u$ und dessen Quotienten $\Theta u$ finden. Geht $u'$ in seinen ursprünglichen Werth $u$ zurück, so nähert sich der Quotient von $u$ der Einheit als Grenze; er mag alsdann mit $\vartheta u$ bezeichnet und Quotial

von $u$ genannt werden. So wie das Differential eine Grösse bezeichnet, welche von der Null unendlich wenig verschieden ist und im Moment des Verschwindens gedacht wird, so bezeichnet das Quotial eine Grösse, welche von der Einheit unendlich wenig abweicht und im Begriffe steht, in diese überzugehen.

Der Begriff des Quotienten, als des Aenderungscoefficienten einer Grösse, ist der reinen, wie der angewandten Analysis nicht fremd; der Begriff des Quotials dagegen findet sich nur spärlich angedeutet vor, wenigstens hat man auf ihn keine so allgemeine Methoden gegründet wie auf den Begriff des Differentials.

Es ist klar, wie man diese Betrachtung auf andere Fälle ausdehnen kann. So erhält man durch Radiciren die Wurzel $\Omega u = \sqrt[u]{u'}$ und die Gleichung $u' = \Omega u^u$ zeigt wieder, wie $u'$ aus dem ursprünglichen Werthe $u$ und der Wurzel $\Omega u$ gebildet wird. Nähert sich aber hier $u'$ dem $u$, so nähert sich $\Omega u$ nicht, wie in den beiden vorigen Fällen, einer constanten Grenze, sondern der Grösse $\sqrt[u]{u}$. Zu ähnlichen Betrachtungen kann die Gleichung $\varLambda u = \overset{u}{\log} u'$ veranlassen, aus welcher $u' = u^{\varLambda u}$ folgt und wobei der Logarithmus $\varLambda u$ sich der Einheit nähert, wenn $u'$ in seinen ursprünglichen Zustand $u$ zurückgeht. Die beiden zuletzt angedeuteten Fälle sollen jedoch von der vorliegenden Untersuchung ausgeschlossen bleiben.

Der obigen Erklärung zufolge stellt das Quotial $\vartheta u$ einer Grösse $u$ das Verhältniss $\frac{u'}{u}$ des geänderten Werthes $u'$ dieser Grösse zu ihrem ursprünglichen Werthe $u$ für den Fall dar, dass $u'$ im Moment des Ueberganges in $u$ gedacht wird. Das Quotial $\vartheta u$ ist also der Coefficient, welcher an $u$ treten muss, um diese Grösse in einen nächstanliegenden Zustand überzuführen. Wenn nun $u$ innerhalb eines Intervalls sich continuirlich ändert und sein Zeichen nicht wechselt, so wird $\vartheta u$ von der positiven Einheit unendlich wenig abweichen und grösser oder kleiner sein, als diese, je nachdem $u$ wächst oder abnimmt. An den Stellen, an welchen $u$ ein Maximum oder Minimum erreicht, also vom Wachsen zum Abnehmen oder vom Abnehmen zum Wachsen übergeht, wird $\vartheta u$ durch die Einheit hindurchgehen. Wird $u$ unendlich ohne Zeichenwechsel, so erreicht $\vartheta u$ ebenfalls die Einheit. Aendert $u$ sein Zeichen und bleibt continuirlich, geht es also vom Positiven zum Negativen oder umgekehrt von diesem zu jenem durch die Null hindurch über, so wird $\vartheta u$ unendlich. An allen Stellen, wo $u$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet, wird $\vartheta u$ immer von

der Einheit um eine endliche Grösse abweichen und positiv oder negativ sein, je nachdem seine beiden Nachbarwerthe gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben.

## §. 2.

### Quotialderivirte, Quotiallogarithmus und Quotialgleichung.

Es sei $u$ eine Funktion einer Variabeln $x$, nämlich

$$u = f(x).$$

Aendert sich $x$ dadurch, dass es mit seinem Quotienten $\Theta x$ multiplicirt wird, geht es also in $x.\Theta x$ über, so erhält man einen folgenden Werth $u'$ dieser Funktion, nämlich

$$u' = f(x.\Theta x),$$

und folglich durch Division mit dem ursprünglichen, den Quotienten von $u$:

$$\Theta u = \frac{f(x.\Theta x)}{f(x)}.$$

Nimmt man nun Logarithmen zur Basis $\Theta x$, wodurch man die Gleichung

$$\overset{\Theta x}{\log} \Theta u = \overset{\Theta x}{\log} \frac{f(x.\Theta x)}{f(x)} \qquad (1)$$

erhält, so bemerkt man leicht, dass die Grösse

$$\overset{\Theta x}{\log} \frac{f(x.\Theta x)}{f(x)}$$

bei dem Uebergange des $\Theta x$ in die Einheit im Allgemeinen sich einer bestimmten Funktion von $x$ als Grenze nähert. Diese Funktion möge die Quotialderivirte von $f(x)$ genannt und mit $\overset{*}{f}(x)$ bezeichnet werden. Sie wird also definirt durch die Grenzgleichung

$$\overset{*}{f}(x) = \lim.\overset{\Theta x}{\log} \frac{f(x.\Theta x)}{f(x)}. \qquad (2)$$

$$\{\lim.\Theta x = 1\}.$$

Wenn nun $\Theta x$ sich der Einheit nähert, also nach der im §. 1. gegebenen Erklärung zum Quotienten $\vartheta x$ wird, so geschieht dasselbe mit $\Theta u$, und es geht diese Grösse in das Quotial $\vartheta u$ über. Daher kann die fragliche Grenze mit Hülfe der linken Seite der Gleichung (1) auch durch das Symbol

$$\overset{\vartheta x}{\log}\, \vartheta u$$

bezeichnet werden; der Kürze wegen möge es aber verstattet sein, statt des Zeichens $\overset{\vartheta x}{\log}$ den einfachen Buchstaben $\lambda$ zu gebrauchen und also durch

$$\lambda\vartheta u$$

den in $\overset{*}{f}(x)$ vollendeten Grenzenübergang anzudeuten. $\lambda\vartheta u$ ist daher nur eine andere Bezeichnung für $\overset{*}{f}(x)$, welche aber den Vortheil gewährt, dass sie die Spuren des Grenzenüberganges noch erkennen lässt. Es scheint jedoch passend, hiefür einen besonderen Wortausdruck zu wählen. Demgemäss möge $\lambda\vartheta u$ der Q u o t i a l l o g a r i t h m u s von $u$ heissen. Quotiallogarithmus und Quotialderivirte bedeuten also ganz dieselbe Funktion, und in der Gleichung

$$\lambda\vartheta u = \overset{*}{f}(x)$$

ist die linke Seite nur ein Symbol, welches die Entstehungsart der auf der rechten Seite befindlichen Funktion erläutert.

Um nun den Grenzwerth des Ausdruckes

$$\overset{\Theta x}{\log} \frac{f(x.\Theta x)}{f(x)}$$

für ein sich der Einheit näherndes $\Theta x$ zu finden, kann man zunächst den Satz über die Verwandlung logarithmischer Basen in Anwendung bringen, demzufolge

$$\overset{\alpha}{\log} a = \frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}\alpha}$$

gesetzt werden kann. Hierdurch wird

$$\overset{\Theta x}{\log} \frac{f(x.\Theta x)}{f(x)} = \frac{\mathrm{l}.\frac{f(x.\Theta x)}{f(x)}}{\mathrm{l}.\Theta x} = \frac{\mathrm{l}.f(x.\Theta x) - \mathrm{l}.f(x)}{\mathrm{l}.\Theta x}.$$

Lässt man nun hierin $\Theta x$ in die Einheit übergehen, so erhält man die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, deren wahrer Werth aber durch einmaliges Differenziiren nach $\Theta x$ gefunden wird. Er ist nämlich

$$x.\frac{f'(x)}{f(x)}$$

oder, unter einer anderen Form dargestellt,

$$x.\frac{d.\,\mathrm{l}f(x)}{dx}.$$

Dadurch erhält man schliesslich für die Quotialderivirte $\overset{*}{f}(x)$ die Gleichung:

$$\overset{*}{f}(x)=x.\frac{d\mathrm{l}f(x)}{dx}=\frac{xf'(x)}{f(x)}, \tag{3}$$

welche in folgendem Satze ausgesprochen werden kann:

**Die Quotialderivirte oder der Quotiallogarithmus einer Funktion $f(x)$ wird gefunden, wenn man den Differentialquotienten vom natürlichen Logarithmus derselben mit dem Argumente $x$ multiplicirt.**

Die Gleichung (3) zeigt, wenn sie auf die Form

$$f(x)=\frac{x.f'(x)}{\overset{*}{f}(x)}$$

gebracht wird, in welcher Weise sich die Operationen des Differentiirens und Quotiirens tilgen.

Sowie man in der Differentialrechnung aus der Gleichung

$$\frac{du}{dx}=f'(x)$$

zwischen dem Differentialquotienten und der Derivirten einer Funktion $u=f(x)$ sich erlaubt, die Differentialgleichung

$$du=f'(x)dx$$

abzuleiten, so ist es offenbar auch hier verstattet, statt der Gleichung

$$\lambda\vartheta u=\overset{*}{f}(x)$$

die folgende:

$$\vartheta u=\vartheta x^{\overset{*}{f}(x)} \tag{4}$$

zu gebrauchen. Eine solche Gleichung zwischen den Quotialien der Funktion und ihres Argumentes mag eine **Quotialgleichung** genannt werden. Sie sagt aus, dass das Verhältniss zweier unmittelbar auf einander folgender Werthe der Funktion in einem zusammengesetzten Verhältniss steht zu dem Verhältniss der entsprechenden Werthe ihres Arguments, dessen Exponent gleich der Quotialderivirten der Funktion ist.

So wie sich die Differentialrechnung zur Abkürzung ihrer Betrachtungen mit grossem Nutzen der Methode des Unendlichkleinen

(der Null Unendlichnahen) bedient, so kann für den hier zu entwickelnden Calcul eine Methode des der Eins Unendlichnahen ausgebildet und mit nicht geringerem Erfolge angewandt werden.

## §. 3.

### Quotialformeln für die einfachen Funktionen.

Mit Hülfe der im vorigen Paragraphen entwickelten Regel findet man folgende Quotialformeln:

1. $\lambda\vartheta . x^a = a,$
2. $\lambda\vartheta . a^x = x \mathrm{l} a,$
3. $\lambda\vartheta . e^x = x,$
4. $\lambda\vartheta . x^x = x(1 + \mathrm{l} x),$
5. $\lambda\vartheta . \mathrm{l} x = \frac{1}{\mathrm{l} x},$
6. $\lambda\vartheta . \sin x = x \operatorname{cotg} x,$
7. $\lambda\vartheta . \cos x = -x \operatorname{tg} x,$
8. $\lambda\vartheta . \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\sin 2x},$
9. $\lambda\vartheta . \operatorname{cotg} x = -\frac{2x}{\sin 2x},$
10. $\lambda\vartheta . \sec x = x \operatorname{tg} x,$
11. $\lambda\vartheta . \operatorname{cosec} x = -x \operatorname{cotg} x,$
12. $\lambda\vartheta . \arcsin x = \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$
13. $\lambda\vartheta . \arccos x = -\frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$
14. $\lambda\vartheta . \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{x}{1+x^2},$

u. s. w.,

oder, wenn man lieber Quotiale statt Quotiallogarithmen anwenden will,

1. $\vartheta . x^a = \vartheta x^a,$
2. $\vartheta . a^x = \vartheta x^{x \mathrm{l} a},$
3. $\vartheta . e^x = \vartheta x^x,$
4. $\vartheta . x^x = \vartheta x^{x(1+\mathrm{l} x)},$
5. $\vartheta . \mathrm{l} x = \vartheta x^{\frac{1}{\mathrm{l} x}},$
6. $\vartheta . \sin x = \vartheta x^{x \operatorname{cotg} x},$

u. s. w.

Die goniometrischen Quotialformeln haben eine nicht uninteressante geometrische Bedeutung. Hiervon nur ein Beispiel. Es sei *AMB* (Taf. I. Fig. 1.) ein mit dem Radius $CA = r$ beschriebener Viertelkreis, *M* und *M'* zwei unendlich nahe Punkte desselben, von welchen auf *CA* die Perpendikel *MP*, *M'P'* gefällt sind. Construirt man in *B* die Tangente, welche von dem nach *M* gehenden Radius in *Q* getroffen wird, und zieht *MR* parallel *AC*, so hat man zunächst:

$$\frac{CQ}{r} = \frac{r}{MP}, \quad \frac{BQ}{CQ} = \frac{M'R}{MM'}, \quad \frac{AM}{r} = \frac{AM}{r}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit einander, so folgt:

$$\frac{AM}{r} \cdot \frac{BQ}{r} = \frac{M'R}{MP} : \frac{MM'}{AM};$$

nun ist aber, weil $M'R$ und $MM'$ unendlich klein sind,

$$\frac{M'R}{MP} = \mathrm{l}(1 + \frac{M'R}{MP}) = \mathrm{l}.\frac{M'P'}{MP},$$

$$\frac{MM'}{AM} = \mathrm{l}(1 + \frac{MM'}{AM}) = \mathrm{l}.\frac{AM'}{AM};$$

mithin, wenn man diese Werthe einsetzt,

$$\frac{AM}{r} \cdot \frac{BQ}{r} = \mathrm{l}\frac{M'P'}{MP} : \mathrm{l}\frac{AM'}{AM},$$

woraus sich sogleich

$$\frac{M'P'}{MP} = \left(\frac{AM'}{AM}\right)^{\frac{AM}{r} \cdot \frac{BQ}{r}}$$

findet. Diese Gleichung, welche das Verhältniss zweier auf einander folgender Ordinaten des Kreises aus dem Verhältniss der zugehörigen Bogen finden lehrt, geht aber in die Gleichung

$$\vartheta . \sin x = \vartheta x^{x \operatorname{cotg} x}$$

über, wenn man $\frac{AM}{r} = x$ setzt. Denn dadurch wird

$$\frac{MP}{r} = \sin x, \quad \frac{BQ}{r} = \operatorname{cotg} x, \quad \frac{AM'}{AM} = \frac{AM':r}{AM:r} = \vartheta x,$$

$$\frac{M'P'}{MP} = \frac{M'P':r}{MP:r} = \vartheta . \sin x.$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die übrigen goniometrischen Quotialformeln ebenfalls ableiten.

## §. 4.

### Quotialformeln für zusammengesetzte Funktionen.

Bedeuten $u, v, w, \ldots$ Funktionen von $x$, $\overset{*}{u}, \overset{*}{v}, \overset{*}{w}, \ldots$ ihre Quotialderivirten und $c$ eine Constante, so gelangt man leicht zu den folgenden Sätzen:

1) Für $u=c$ ist $\overset{*}{u}=\overset{*}{c}=0$.

2) Für $u=c.v$ erhält man $\overset{*}{u}=\overset{*}{v}$, d. h. der constante Faktor fällt beim Quotiiren weg. Hieraus folgt sofort als spezieller Fall:

3) $(\overset{*}{-u})=(-\overset{*}{1}.u)=\overset{*}{u}$.

4) Ist $u$ die Summe zweier Funktionen, nämlich

$$u=v+w,$$

so wird

$$\overset{*}{u}=\frac{v\overset{*}{v}+w\overset{*}{w}}{v+w}.$$

Aus der Gleichung (3) des §. 2. erhält man nämlich für $f(x)=u$:

$$u\overset{*}{u}=xu'$$

oder, weil

$$u'=v'+w'$$

ist,

$$u\overset{*}{u}=xv'+xw';$$

nun wird aber nach derselben Gleichung

$$xv'=v\cdot\frac{xv'}{v}=v\overset{*}{v} \text{ und } xw'=w.\frac{xw'}{w}=w\overset{*}{w},$$

mithin, wenn man diese Werthe einsetzt,

$$u\overset{*}{u}=v\overset{*}{v}+w\overset{*}{w},$$

woraus durch Division mit $u=v+w$ der angegebene Ausdruck für $\overset{*}{u}$ folgt.

Für $v=c$, also für $u=c+w$, ergibt sich hieraus mit Rücksicht auf 1):

$$\overset{*}{u}=\frac{w\overset{*}{w}}{c+w};$$

für $w=-w_1$, also für $u=v-w_1$, aber mit Rücksicht auf 3):

$$\overset{*}{u}=\frac{v\overset{*}{v}-w\overset{*}{w}_1}{v-w_1}.$$

Ist $u$ ein Aggregat von beliebig vielen Funktionen, nämlich

$$u = v \pm w \pm y \pm z \pm \ldots,$$

so findet man auf ähnliche Weise:

$$u\overset{*}{u} = v\overset{*}{v} \pm w\overset{*}{w} \pm y\overset{*}{y} \pm z\overset{*}{z} \pm \ldots,$$

also

$$\overset{*}{u} = \frac{v\overset{*}{v} \pm w\overset{*}{w} \pm y\overset{*}{y} \pm z\overset{*}{z} \pm \ldots}{v \pm w \pm y \pm z \pm \ldots}.$$

5) Ist $u$ ein Produkt zweier Funktionen, nämlich

$$u = v.w,$$

so wird

$$\overset{*}{u} = \overset{*}{v} + \overset{*}{w}.$$

Nach §. 2. Gleichung (3) erhält man nämlich zunächst

$$u\overset{*}{u} = xwv' + xvw',$$

und wenn man diese Gleichung mit $u = v.w$ dividirt, die folgende:

$$\overset{*}{u} = \frac{xv'}{v} + \frac{xw'}{w},$$

welche aber wegen $\frac{xv'}{v} = \overset{*}{v}$ und $\frac{xw'}{w} = \overset{*}{w}$ in die angegebene Gleichung übergeht.

6) Für

$$u = \frac{v}{w}$$

findet man

$$\overset{*}{u} = \overset{*}{v} - \overset{*}{w}.$$

Statt nämlich die Gleichung $u = \frac{v}{w}$ zu quotiiren, thue man dies mit der gleichbedeutenden $w.u = v$, wodurch man nach 5) erhält $\overset{*}{w} + \overset{*}{u} = \overset{*}{v}$; hieraus aber folgt $\overset{*}{u} = \overset{*}{v} - \overset{*}{w}$.

Die in 5) und 6) entwickelten Sätze, welche in Worten lauten:

Die Quotialderivirte des Produkts zweier Funktionen ist die Summe der Quotialderivirten der einzelnen Faktoren, und:

Die Quotialderivirte ihres Quotienten ist die Differenz der Quotialderivirten des Dividenden und Divisors,

zeigen, dass die Quotialderivirten in gewissen Fällen der Analysis ähnliche Dienste leisten können, wie die Logarithmen der Arithmetik. Gesetzt, es handele sich darum, das Produkt zweier Funktionen $v$ und $w$ in eine Reihe zu entwickeln, so entwickele man $\overset{*}{v}$ und $\overset{*}{w}$ und bilde $\overset{*}{v} + \overset{*}{w} = \overset{*}{\Omega}$. Kann man nun eine Reihe finden, deren Quotialderivirte $\overset{*}{\Omega}$ ist, so wird sie eine Entwickelung von $v.w$ bis auf einen constanten Faktor genau sein, der beim Quotiiren möglicherweise herausgefallen sein kann, der aber leicht wieder zu finden ist.

7) Für die Funktion

$$u = v^w$$

erhält man:

$$\overset{*}{u} = w(\overset{*}{v} + \overset{*}{w} lv) = w\overset{*}{v} + w\overset{*}{w} lv.$$

Als spezielle Fälle sind in dieser Formel enthalten:

a) $u = c^w, \qquad \overset{*}{u} = w\overset{*}{w}.lc,$

b) $u = v^c, \qquad \overset{*}{u} = c.\overset{*}{v},$

c) $u = e^w, \qquad \overset{*}{u} = w\overset{*}{w}.$

Aus a) und b) ersieht man, dass in der allgemeinen Formel die beiden Bestandtheile $w\overset{*}{v}$ und $w\overset{*}{w}lv$ die partiellen Quotialderivirten von $u$ sind, die man erhält, wenn man das eine Mal $w$, das andere Mal $v$ als constant ansieht. Bezeichnen also $\overset{*}{u}_v$, $\overset{*}{u}_w$ die nach $v$, $w$ genommenen Quotialderivirten, so kann man diese Formel auch so schreiben:

$$\overset{*}{u} = \overset{*}{u}_v + \overset{*}{u}_w.$$

8) Aus 7) ergibt sich für die Funktion:

$$u = \sqrt[w]{v},$$

$$\overset{*}{u} = \frac{1}{w}(\overset{*}{v} - \overset{*}{w} lv).$$

Man findet dies entweder, indem man in 7) $\frac{1}{w}$ statt $w$ setzt und bedenkt, dass $\overset{*}{\left(\frac{1}{w}\right)} = -\overset{*}{w}$ ist (nach 1. und 6.), oder indem man

erst mit $w$ beiderseits potenzirt, auf $u^w$ die Formel 7) anwendet, schliesslich aber für $lu$ seinen Werth $\frac{1}{w}lv$ wieder einführt.

9) Für

$$u = lv$$

erhält man

$$\overset{*}{u} = \frac{\overset{*}{v}}{lv}.$$

Daher ist allgemein

$$lv.(\overset{*}{lv}) = \overset{*}{v}.$$

10) Sei

$$u = \overset{w}{\log} v.$$

Da $\overset{w}{\log} v = \frac{lv}{lw}$ ist, so erhält man sogleich:

$$\overset{*}{u} = \frac{\overset{*}{v}}{lv} - \frac{\overset{*}{w}}{lw}.$$

Diese Formel enthält die speziellen:

a) $u = \overset{c}{\log} v$, $\qquad \overset{*}{u} = \frac{\overset{*}{v}}{lv}$,

b) $u = \overset{w}{\log} c$, $\qquad \overset{*}{u} = -\frac{\overset{*}{w}}{lw}$.

Die Grösse $c$ kommt darin nicht vor, sie fällt durch die Faktoren $lc$, $\frac{1}{lc}$ weg.

11) Schliesslich mögen hier noch die beiden Funktionen

$$u = \Big(\big((v^v)^v\big)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\Big)^v \quad \text{und} \quad u = v^{\Big(\cdot^{\cdot^{\cdot^{\big(v^{(v^v)}\big)}}}\Big)}$$

betrachtet werden, von denen die erste mit $v^{(v^p)}$ identisch ist, wenn $p$ die Anzahl aller Exponenten $v$ ist, während die zweite nicht unmittelbar durch Potenzen ausgedrückt werden kann. Für die erste findet man sogleich:

$$\overset{*}{u} = v^p(1 + plv).\overset{*}{v}.$$

Der Differentialquotient dieser Funktion findet sich hieraus nach §. 2. Gleichung (3) als

$$u' = \frac{1}{x} . u . v^p (1 + p\mathrm{l}v) \overset{*}{v} = u . v^{p-1} v' (1 + p\mathrm{l}v),$$

daher besteht für diese Funktion die Gleichung

$$\frac{u\overset{*}{u}}{u'} = \frac{v\overset{*}{v}}{v'}.$$

Die zweite der angeführten Funktionen möge, wenn $p$ die Anzahl der Basen $v$ bedeutet, mit

$$\underset{\frown p}{v}$$

bezeichnet werden, so dass also $\underset{\frown 1}{v} = v^v$, $\underset{\frown 2}{v} = v^{(v^v)}$ u. s. f. ist. Aus der Gleichung

$$u = \underset{\frown p}{v}$$

folgt dann

$$\mathrm{l}u = \underset{\frown p-1}{v} . \mathrm{l}v,$$

und hieraus durch Differentiation:

$$\frac{d\mathrm{l}u}{dx} = \underset{\frown p-1}{v} . \frac{v'}{v} + \underset{\frown p-1}{v'} . \mathrm{l}v,$$

mithin nach §. 2. wegen $\frac{xv'}{v} = \overset{*}{v}$ und $\underset{\frown p-1}{v'} = \frac{\underset{\frown p-1}{v} . \underset{\frown p-1}{\overset{*}{v}}}{x}$:

$$\overset{*}{u} = \underset{\frown p}{\overset{*}{v}} = \underset{\frown p-1}{v} . \overset{*}{v} + \underset{\frown p-1}{v} . \underset{\frown p-1}{\overset{*}{v}} . \mathrm{l}v.$$

Eben so weiter

$$\underset{\frown p-1}{\overset{*}{v}} = \underset{\frown p-2}{v} . \overset{*}{v} + \underset{\frown p-2}{v} . \underset{\frown p-2}{\overset{*}{v}} . \mathrm{l}v,$$

$$\underset{\frown p-2}{\overset{*}{v}} = \underset{\frown p-3}{v} . \overset{*}{v} + \underset{\frown p-3}{v} . \underset{\frown p-3}{\overset{*}{v}} . \mathrm{l}v,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\underset{\frown 2}{\overset{*}{v}} = \underset{\frown 1}{v} . \overset{*}{v} + \underset{\frown 1}{v} . \underset{\frown 1}{\overset{*}{v}} . \mathrm{l}v,$$

$$\underset{\frown 1}{\overset{*}{v}} = v . \overset{*}{v} + v . \overset{*}{v} . \mathrm{l}v. \qquad \text{(S. No. 7.)}$$

Substituirt man diese Werthe nach und nach rückwärts, so erhält man schliesslich:

$$\overset{*}{u}=\overset{*}{v}.\{\underset{\widehat{p-1}}{v}+\underset{\widehat{p-1}}{v}.\underset{\widehat{p-2}}{v}.lv+\underset{\widehat{p-1}}{v}.\underset{\widehat{p-2}}{v}.\underset{\widehat{p-3}}{v}.lv^2+\underset{\widehat{p-1}}{v}.\underset{\widehat{p-2}}{v}.\underset{\widehat{p-3}}{v}.\underset{\widehat{p-4}}{v}.lv^3+\ldots$$

$$\ldots+\underset{\widehat{p-1}}{v}.\underset{\widehat{p-2}}{v}\ldots\underset{\widehat{1}}{v}.vlv^{p-1}+\underset{\widehat{p-1}}{v}.\underset{\widehat{p-2}}{v}\ldots\underset{\widehat{1}}{v}.v.lv^{p}\}.$$

Den Differentialquotienten von $u$ erhält man hieraus leicht mit Hülfe von §. 2. Gleichung (3), wonach allgemein

$$u'=\frac{u\overset{*}{u}}{x}$$

ist, wenn man mit $V$ die eingeklammerte Reihe bezeichnet, als

$$u'=\frac{V}{x}.\underset{\widehat{p}}{v}.\overset{*}{v}.$$

Für $u=x^{(x(x^x))}$ z. B. ist

$$v=x,\quad \overset{*}{v}=1,\quad p=3,\quad \underset{\widehat{p-1}}{v}=\underset{\widehat{2}}{v}=x^{(x^x)},\quad \underset{\widehat{p-2}}{v}=\underset{\widehat{1}}{v}=x^x,$$

$$V=x^{(x^x)}+x^{(x^x)}.x^x lx+x^{(x^x)}.x^x.xlx^2+x^{(x^x)}.x^x.xlx^3,$$

mithin

$$\overset{*}{u}=x^{(x^x)}.\{1+x^x lx(1+xlx(1+lx))\},.$$

$$u'=\frac{x^{(x(x^x))}.x^{(x^x)}}{x}.\{1+x^x lx(1+xlx(1+lx))\}.$$

§. 5.

## Quotialderivirte der Funktionen von Funktionen überhaupt.

I. Es sei $u$ eine Funktion von $v$ und $v$ wiederum eine Funktion von $x$, nämlich

$$u=f(v) \text{ und } v=\varphi(x),$$

so ist $u$ mittelbar eine Funktion von $x$ und es kann also verlangt werden, die Quotialderivirte von $u$ in Bezug auf $x$ anzugeben.

Wie dieselbe aus den Quotialderivirten der Funktionen $f(v)$ $\varphi(x)$ gebildet wird, ergibt sich auf folgende Weise. Geht $x.\Theta x$ über, so wird $v$ in $v.\Theta v$ und in Folge dessen $u$ in $u$ übergehen, so dass man die Gleichungen

$$u.\Theta u = f(v.\Theta v) \text{ und } v.\Theta v = \varphi(x.\Theta x)$$

erhält, aus welchen man die folgenden:

$$\Theta u = \frac{f(v.\Theta v)}{f(v)} \text{ und } \Theta v = \frac{\varphi(x.\Theta x)}{\varphi(x)}$$

zieht. Nimmt man nun Logarithmen zur Basis $\Theta x$, so komm

$$\overset{\Theta x}{\log}\Theta u = \overset{\Theta x}{\log}\frac{f(v.\Theta v)}{f(v)} \text{ und } \overset{\Theta x}{\log}\Theta v = \overset{\Theta x}{\log}\frac{\varphi(x.\Theta x)}{\varphi(x)};$$

zufolge der Formel

$$\overset{\alpha}{\log}A = \overset{\beta}{\log}A.\overset{\alpha}{\log}\beta$$

erhält man für $\alpha = \Theta x$ und $\beta = \Theta v$:

$$\overset{\Theta x}{\log}\frac{f(v.\Theta v)}{f(v)} = \overset{\Theta v}{\log}.\frac{f(v.\Theta v)}{f(v)}.\overset{\Theta x}{\log}\Theta v;$$

daher wird mit Hülfe des Werthes für $\overset{\Theta x}{\log}\Theta v$:

$$\overset{\Theta x}{\log}\Theta u = \overset{\Theta v}{\log}\frac{f(v.\Theta v)}{f(v)}.\overset{\Theta x}{\log}\frac{\varphi(x.\Theta x)}{\varphi(x)}.$$

Nähert sich nun $\Theta x$, also auch $\Theta v$ und $\Theta u$ der Einheit, so g $\overset{\Theta x}{\log}\frac{\varphi(x.\Theta x)}{\varphi(x)}$ in $\overset{*}{\varphi}(x)$, $\overset{\Theta v}{\log}\frac{f(v.\Theta v)}{f(v)}$ in $\overset{*}{f}(v)$ und $\overset{\Theta x}{\log}\Theta u$ in $\overset{*}{u}$ über, zwar erfolgt der Grenzenübergang in Bezug auf $v$ ebenso, als $v$ in $f(v)$ independente Variabele wäre. Man hat daher:

$$\overset{*}{u} = \overset{*}{f}(v).\overset{*}{\varphi}(x),$$

oder, wenn man sich der anderen Bezeichnungsweise bedient die Variabeln, nach welchen jedesmal quotiirt wird, durch Indi andeutet:

$$\lambda\vartheta u_{x} = \lambda\vartheta u_{v}.\lambda\vartheta v_{x}.$$

Das Quotial von $u$ erhält man alsdann durch die Formel

$$\vartheta u = \vartheta x^{\overset{*}{f}(v).\overset{*}{\varphi}(x)} = \vartheta x^{\lambda\vartheta u_{v}.\lambda\vartheta v_{x}}.$$

Etwas kürzer gelangt man folgendermassen zu dieser Gleichung. Ist $u = f(v)$, so folgt sofort

$$\vartheta u = \vartheta v^{\overset{*}{f}(v)},$$

ist aber nun zugleich

$$v = \varphi(x),$$

so erhält man

$$\vartheta v = \vartheta x^{\overset{*}{\varphi}(x)},$$

und indem man diesen Werth in den Ausdruck für $\vartheta u$ einsetzt:

$$\vartheta u = \vartheta x^{\overset{*}{f}(v) \cdot \overset{*}{\varphi}(x)},$$

wie vorhin.

II. Ist

$$u = f(v), \quad v = \varphi(w), \quad w = \psi(x) \ldots, \quad z = \bar{\omega}(t),$$

so erhält man durch Fortsetzung der vorigen Betrachtungen:

$$\overset{*}{u} = \overset{*}{f}(v) \cdot \overset{*}{\varphi}(w) \cdot \overset{*}{\psi}(x) \ldots \overset{*}{\bar{\omega}}(t)$$

und

$$\vartheta u = \vartheta t^{\overset{*}{f}(v) \, \overset{*}{\varphi}(w) \, \overset{*}{\psi}(x) \ldots \overset{*}{\bar{\omega}}(t)}.$$

III. Es sei $u$ eine Funktion zweier Variabeln $v$ und $w$ und diese beiden selbst wieder Funktionen von $x$, so dass man hat

$$u = f(v, w),$$

$$v = \varphi(x), \qquad w = \psi(x).$$

Da mit einer Aenderung des $x$ eine Aenderung des $v$ und $w$ verbunden ist, so erhält man

$$\Theta u = \frac{f(v\Theta v, w\Theta w)}{f(v, w)}$$

oder, wenn man den der Einheit gleichen Faktor

$$\frac{f(v, w\Theta w)}{f(v, w\Theta w)}$$

zufügt,

$$\Theta u = \frac{f(v\Theta v, w\Theta w)}{f(v, w\Theta w)} \cdot \frac{f(v, w\Theta w)}{f(v, w)},$$

und nun Logarithmen zur Basis $\Theta x$ nimmt:

$$\overset{\Theta x}{\log}\,\Theta u = \overset{\Theta x}{\log}\frac{f(v\Theta v,\, w\Theta w)}{f(v,\, w\Theta w)} + \overset{\Theta x}{\log}\frac{f(v,\, w\Theta w)}{f(v,\, w)}.$$

Da aber

$$\overset{\Theta x}{\log}\frac{f(v\Theta v,\, w\Theta w)}{f(v,\, w\Theta w)} = \overset{\Theta v}{\log}\frac{f(v\Theta v,\, w\Theta w)}{f(v,\, w\Theta w)}.\overset{\Theta x}{\log}\,\Theta v$$

und

$$\overset{\Theta x}{\log}\frac{f(v,\, w\Theta w)}{f(v,\, w)} = \overset{\Theta w}{\log}\frac{f(v,\, w\Theta w)}{f(v,\, w)}.\overset{\Theta x}{\log}\,\Theta w$$

gesetzt werden kann, so geht diese Gleichung über in

$$\overset{\Theta x}{\log}\,\Theta u = \overset{\Theta v}{\log}\frac{f(v\Theta v,\, w\Theta w)}{f(v,\, w\Theta w)}.\overset{\Theta x}{\log}\,\Theta v + \overset{\Theta w}{\log}\frac{f(v,\, w\Theta w)}{f(v,\, w)}.\overset{\Theta x}{\log}\,\Theta w.$$

Nähert sich nun $\Theta x$ der Einheit, so erhält man für die Logarith

$$\overset{\Theta x}{\log}\,\Theta v \quad \text{und} \quad \overset{\Theta x}{\log}\,\Theta w$$

in Folge der Gleichungen $v = \varphi(x)$ und $w = \psi(x)$ die Quotiald virten

$$\overset{*}{\varphi}(x) \quad \text{und} \quad \overset{*}{\psi}(x),$$

und die Logarithmen

$$\overset{\Theta v}{\log}\frac{f(v\Theta v,\, w\Theta w)}{f(v,\, w\Theta w)} \quad \text{und} \quad \overset{\Theta w}{\log}\frac{f(v,\, w\Theta w)}{f(v,\, w)}$$

gehen in die nach $v$ und $w$ genommenen Quotialderivirten vo nämlich in

$$\overset{*}{f}(v) \quad \text{und} \quad \overset{*}{f}(w)$$

über; daher erhält man schliesslich für die Quotialderivirte $u$ nach $x$:

$$\overset{*}{u} = \overset{*}{f}(v).\overset{*}{\varphi}(x) + \overset{*}{f}(w).\overset{*}{\psi}(x),$$

wofür man auch unter Anwendung der anderen Bezeichnungsw schreiben kann:

$$\underset{x}{\lambda\vartheta}u = \underset{v}{\lambda\vartheta}f(x).\underset{x}{\lambda\vartheta}\varphi(x) + \underset{w}{\lambda\vartheta}f(w).\underset{x}{\lambda\vartheta}\psi(x).$$

Das Quotial von $u$ aber findet sich hieraus als

$$\vartheta u = \vartheta x^{\overset{*}{f}(v)\overset{*}{\varphi}(x) + \overset{*}{f}(w).\overset{*}{\psi}(x)} \quad \text{oder} \quad \vartheta u = (\vartheta x^{\overset{*}{\varphi}(x)})^{\overset{*}{f}(v)}.(\vartheta x^{\overset{*}{\psi}(x)})^{\overset{*}{f}(w)}$$

in welcher Gleichung

$$\vartheta x^{\overset{*}{\varphi}(x)} \text{ und } \vartheta x^{\overset{*}{\psi}(x)}$$

die Quotiale $\vartheta v$, $\vartheta w$ bedeuten, so dass man auch setzen kann:

$$\vartheta u = \vartheta v^{\overset{*}{f}(v)} . \vartheta w^{\overset{*}{f}(w)},$$

falls man die Bedeutung von $\vartheta v$ und $\vartheta w$ im Sinne behalten will.

IV. Der eben entwickelte Satz kann leicht auf den Fall ausgedehnt werden, dass $u$ eine Funktion beliebig vieler Variabeln ist. Sind $v, w, s \ldots . t$ Funktionen von $x$ und ist

$$u = f(v, w, s, \ldots . t),$$

so findet man sogleich:

$$\overset{*}{u} = \overset{*}{f}(v) . \overset{*}{v} + \overset{*}{f}(w) . \overset{*}{w} + \overset{*}{f}(s) . \overset{*}{s} + \ldots . \overset{*}{f}(t) . \overset{*}{t},$$

so wie

$$\vartheta u = \vartheta v^{\overset{*}{f}(v)} . \vartheta w^{\overset{*}{f}(w)} . \vartheta s^{\overset{*}{f}(s)} \ldots . \vartheta t^{\overset{*}{f}(t)},$$

worin $\vartheta v$, $\vartheta w$, $\vartheta s, \ldots . \vartheta t$ die Bedeutung von $\vartheta x^{\overset{*}{v}}$, $\vartheta x^{\overset{*}{w}}$, $\vartheta x^{\overset{*}{s}}, \ldots . \vartheta x^{\overset{*}{t}}$ haben.

## §. 6.

### Quotiale der Funktionen von mehreren unabhängigen Variabeln.

Wenn $u$ eine Funktion zweier von einander unabhängiger Variabeln $x$ und $y$, nämlich

$$u = f(x, y)$$

ist, so erhält man, je nachdem man $y$ oder $x$ als constant ansieht, zwei partielle Quotialderivirten, welche mit $\overset{*}{f}(x)$, $\overset{*}{f}(y)$ oder mit $\overset{*}{u}_x$, $\overset{*}{u}_y$ oder mit $\lambda\vartheta u_x$, $\lambda\vartheta u_y$ bezeichnet werden mögen, sowie zwei diesen entsprechende partielle Quotiale $\vartheta u_x = \vartheta x^{\overset{*}{f}(x)}$ und $\vartheta u_y = \vartheta y^{\overset{*}{f}(y)}$, aus welchen das totale, einer gleichzeitigen Aenderung beider Variabeln entsprechende Quotial $\vartheta u$ der Funktion $u$ zusammengesetzt wird.

Geht nämlich $x$ in $x\Theta x$ und $y$ in $y\Theta y$ über, wodurch sich $u$ in $u\Theta u$ verwandelt, so erhält man, wie in §. 5.:

$$\Theta u = \frac{f(x\Theta x, y\Theta y)}{f(x, y\Theta y)} \cdot \frac{f(x, y\Theta y)}{f(x, y)},$$

wofür man auch setzen kann:

$$\Theta u = \Theta x^{\overset{\Theta x}{\log} \frac{f(x\Theta x, y\Theta y)}{f(x, y\Theta y)}} \cdot \Theta y^{\overset{\Theta y}{\log} \frac{f(x, y\Theta y)}{f(x, y)}}.$$

Nähert sich nun zunächst $\Theta y$ der Einheit, d. h. geht dieser Quotient in das Quotial $\vartheta y$ über, wodurch sich $y\Theta y$ auf $y$ reducirt, so erhält man für die beiden Faktoren auf der rechten Seite dieser Gleichung:

$$\Theta x^{\overset{\Theta x}{\log} \frac{f(x\Theta x, y)}{f(x, y)}} \quad \text{und} \quad \vartheta y^{\overset{*}{f}(y)},$$

und wenn nun auch $\Theta x$ in das Quotial übergeht, wodurch die erste dieser Grössen zu

$$\vartheta x^{\overset{*}{f}(x)}$$

wird, so ergibt sich für das gesuchte totale Quotial von $u$ der Ausdruck:

$$\vartheta u = \vartheta x^{\overset{*}{f}(x)} \cdot \vartheta y^{\overset{*}{f}(y)}.$$

Für eine Funktion $u$ beliebig vieler Variabeln, nämlich

$$u = f(x, y, z, \ldots. t),$$

erhält man analog:

$$\vartheta u = \vartheta x^{\overset{*}{f}(x)} \cdot \vartheta y^{\overset{*}{f}(y)} \cdot \vartheta z^{\overset{*}{f}(z)} \ldots. \vartheta t^{\overset{*}{f}(t)}.$$

## §. 7.

### Quotiation der Gleichungen mit zwei Variabeln.

In einer Gleichung, wie

$$u = f(x, y) = c,$$

worin $c$ eine Constante bezeichnen soll, ist $y$ eine Funktion von $x$, daher erhält man nach §. 5. III. für $v = \varphi(x) = x$, $w = \psi(x) = y$, wenn man bedenkt, dass dadurch $\overset{*}{\varphi}(x) = 1$, $\overset{*}{\psi}(x) = \overset{*}{y}$ und dass $\overset{*}{c} = 0$ wird, die Gleichung

$$\overset{*}{f}(x) + \overset{*}{f}(y) \cdot \overset{*}{y} = 0,$$

aus welcher

$$\overset{*}{y} = -\frac{\overset{*}{f}(x)}{\overset{*}{f}(y)}$$

gezogen werden kann. Die Gleichung $\overset{*}{f}(x) + \overset{*}{f}(y) . \overset{*}{y} = 0$ kann eine **Quotialgleichung** von $u = c$ genannt werden und auch durch die folgende:

$$\vartheta x^{\overset{*}{f}(x)} . \vartheta y^{\overset{*}{f}(y)} = 1$$

ersetzt werden, welche man aus ihr erhält, sobald man $\vartheta x$ mit beiden Seiten derselben potenzirt und für $\vartheta x^{\overset{*}{y}}$ das gleichbedeutende $\vartheta y$ setzt.

## §. 8.

## Höhere Quotiale und Quotialderivirte.

I. Geht in einer Funktion $u = f(x)$ das Argument $x$ in $x\Theta x$ über, so erhält man für den Quotienten von $u$ die Gleichung

$$\Theta u = \frac{f(x\Theta x)}{f(x)};$$

geht hierin abermals $x$ in $x\Theta x$ über, so ändert sich $\Theta u$ in $\Theta u . \Theta\Theta u$ um, so dass man durch Division mit $\Theta u$ zu dem Quotienten des Quotienten von $u$, also zum zweiten Quotienten von $u$, nämlich zu $\Theta\Theta u$, gelangt. Schreibt man dafür abkürzend $\Theta^2 u$, so ist also

$$\Theta^2 u = f(x . \Theta x^2) : f(x . \Theta x)^2 . f(x).$$

Durch Fortsetzung dieser Operation ergibt sich:

$$\Theta^3 u = f(x . \Theta x^3) : f(x . \Theta x^2)^3 . f(x . \Theta x)^3 : f(x),$$

$$\vdots$$

$$\Theta^n u = f(x . \Theta x^n)^{\binom{n}{0}} : f(x . \Theta x^{n-1})^{\binom{n}{1}} . f(x . \Theta x^{n-2})^{\binom{n}{2}} : \ldots . f(x)^{(-1)^n . \binom{n}{n}}.$$

II. Bildet man von der Quotialderivirten $\overset{*}{f}(x)$ einer Funktion $u = f(x)$ wieder die Quotialderivirte, von dieser ebenfalls u. s. f., so erhält man eine Reihe von Funktionen, welche die zweite, dritte, u. s. w. Quotialderivirte von $f(x)$ genannt und mit

$$\overset{**}{f}(x),\ \overset{***}{f}(x), \ldots;\ \overset{**}{u},\ \overset{***}{u}, \ldots$$

oder

$$\overset{[2]}{f}(x),\ \overset{[3]}{f}(x), \ldots$$

bezeichnet werden mögen. Unter Anwendung des Zeichens $\lambda\vartheta$ können diese Funktionen auch durch

$$\lambda\vartheta.\lambda\vartheta u, \quad \lambda\vartheta\lambda\vartheta\lambda\vartheta u, \ldots.$$

ausgedrückt und dem Früheren entsprechend zweiter, dritter u. s. w. Quotiallogarithmus der Funktion $u=f(x)$ genannt werden. Das Zeichen $\lambda\vartheta.\lambda\vartheta u$ bedeutet demgemäss, dass in dem Quotiallogarithmus $\lambda\vartheta u$ das Argument $x$ in $x\vartheta x$ übergehen, der geänderte Werth von $\lambda\vartheta u$, welcher dadurch erhalten wird, durch den ursprünglichen dividirt und von diesem Quotienten der Logarithmus zur Basis $\vartheta x$ genommen werden soll. Geht nun $x$ in $x\vartheta x$ über, so wird $\vartheta u$ zu $\vartheta u.\vartheta^2 u$, mithin

$$\vartheta.\lambda\vartheta u=\frac{\lambda(\vartheta u\vartheta^2 u)}{\lambda\vartheta u},$$

und folglich

$$\lambda\vartheta.\lambda\vartheta u=\lambda.\frac{\lambda(\vartheta u\vartheta^2 u)}{\lambda\vartheta u}.$$

Berücksichtigt man, dass dieses Zeichen die Funktion $\overset{**}{u}$, so wie dass $\lambda\vartheta u$ die Funktion $\overset{*}{u}$ bedeutet, so erhält man die Gleichung

$$\lambda.\frac{\lambda(\vartheta u\vartheta^2 u)}{\overset{*}{u}}=\overset{**}{u},$$

und hieraus weiter:

$$\lambda(\vartheta u\vartheta^2 u)=\overset{*}{u}.\vartheta x^{\overset{**}{u}},$$

also auch

$$\vartheta u\vartheta^2 u=(\vartheta x^{\overset{*}{u}})^{(\vartheta x^{\overset{**}{u}})},$$

und hieraus endlich, wenn man für $\vartheta u$ seinen Werth $\vartheta x^{\overset{*}{u}}$ einsetzt, für das zweite Quotial von $u$ den Ausdruck

$$\vartheta^2 u=\frac{(\vartheta x^{\overset{*}{u}})^{(\vartheta x^{\overset{**}{u}})}}{\vartheta x^{\overset{*}{u}}}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\lambda\vartheta.\lambda\vartheta.\lambda\vartheta u=\lambda.\frac{\lambda.\dfrac{\lambda(\vartheta u.\vartheta^2 u^2.\vartheta^3 u)}{\lambda(\vartheta u\vartheta^2 u)}}{\lambda.\dfrac{\lambda(\vartheta u\vartheta^2 u)}{\lambda\vartheta u}}=\lambda.\frac{\lambda.\dfrac{\lambda(\vartheta u\vartheta^2 u^2\vartheta^3 u)}{\lambda(\vartheta u\vartheta^2 u)}}{\overset{**}{u}}=\overset{***}{u},$$

und hieraus:

$$\vartheta^3 u = \frac{\left(\vartheta x^{\overset{*}{u}}\right)^{\left(\vartheta x^{\overset{**}{u}}\right) \cdot \left(\vartheta x^{\overset{**}{u}}\right)^{\left(\vartheta x^{\overset{***}{u}}\right)}}}{\left\{\left(\vartheta x^{\overset{*}{u}}\right)^{\left(\vartheta x^{\overset{**}{u}}\right)}\right\}^2 : \vartheta x^{\overset{*}{u}}}$$

u. s. w.

**III.** Schon im §. 3. ist die Beziehung angegeben, in welcher die Quotialderivirte $\overset{*}{u}$ einer Funktion $u$ zu dem Differentialquotienten $u'$ derselben steht, nämlich

$$u\overset{*}{u} = xu'.$$

Ist nun $u$ selbst die $n$te Quotialderivirte, so erhält man hieraus:

$$\overset{[n]}{u} \,.\, \overset{[n+1]}{u} = x.(\overset{[n]}{u})',$$

welche Gleichung $\overset{[n+1]}{u}$ durch Recursion finden lehrt. Dadurch, dass man diese Gleichung, oder, was keinen wesentlichen Unterschied macht, die vorhergehende quotiirt oder differentiirt, gelangt man zu Relationen, welche dazu dienen können, die Quotialderivirten der verschiedenen Ordnungen durch Differentialquotienten oder umgekehrt diese durch jene auszudrücken. So findet man durch Quotiiren aus

$$u\overset{*}{u} = xu'$$

die Relation

$$\overset{*}{u} + \overset{**}{u} = 1 + (\overset{*}{u'}),$$

woraus

$$\overset{**}{u} = 1 - \overset{*}{u} + (\overset{*}{u'})$$

folgt, mit Hülfe welcher Gleichung man die zweite Quotialderivirte aus der ersten und der Quotialderivirten des Differentialquotienten von der ursprünglichen Funktion erhalten kann. Durch abermaliges Quotiiren der vorigen Gleichung ergibt sich

$$\overset{*}{u}\,\overset{**}{u} + \overset{**}{u}\,\overset{***}{u} = (\overset{*}{u'})(\overset{**}{u'}),$$

woraus $\overset{***}{u}$ gefunden werden kann, u. s. f.

Um die Differentialquotienten $u'$, $u''$,.... durch Quotialderivirte $\overset{*}{u}$, $\overset{**}{u}$,.... auszudrücken, wird man die Gleichung $u\overset{*}{u} = xu'$ oder $xu' = u\overset{*}{u}$ mehrmals differentiiren. Man findet so zunächst:

$$xu' - u\overset{*}{u} = 0,$$

$$xu'' + u' - u(\overset{*}{u})' - u'\overset{*}{u} = 0,$$

$$xu''' + 2u'' - u(\overset{*}{u})'' - 2u'(\overset{*}{u})' - u''\overset{*}{u} = 0,$$

. . . . . . . . . . .

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt unmittelbar

$$u' = \frac{u\overset{*}{u}}{x},$$

und wenn man diesen Werth für $u'$, sowie den Werth für $(\overset{*}{u})'$, den man ebenfalls hieraus durch Vertauschung von $u$ mit $\overset{*}{u}$ erhält, nämlich $(\overset{*}{u})' = \frac{\overset{*}{u}\overset{**}{u}}{x}$, in die zweite der vorstehenden Gleichungen einführt, so erhält man aus ihr

$$u'' = -\frac{u\overset{*}{u}}{x^2}.(1 - \overset{*}{u} - \overset{**}{u}),$$

u. s. f.

Es kann gefragt werden, wie sich $(\overset{*}{u})'$ und $(\overset{*}{u'})$ unterscheiden, resp. wie sie von einander abhängen. Um diese Frage zu beantworten, bedenke man, dass zufolge einer der obigen Formeln

$$(\overset{*}{u'}) = \overset{*}{u} + \overset{**}{u} - 1,$$

sowie dass

$$(\overset{*}{u})' = \frac{\overset{*}{u}\overset{**}{u}}{x}$$

ist. Eliminirt man aus diesen Gleichungen eine der Grössen $\overset{*}{u}$ oder $\overset{**}{u}$, so erhält man die gesuchte Relation, nämlich

$$\overset{*}{u}.(\overset{*}{u'}) - x.(\overset{*}{u})' = \overset{*}{u}{}^2 - 1,$$

oder

$$\overset{**}{u}.(\overset{*}{u'}) - x.(\overset{*}{u})' = \overset{**}{u}{}^2 - 1.$$

Diese Gleichungen sind dadurch ausgezeichnet, dass die eine aus der andern durch Vertauschung von $\overset{*}{u}$ und $\overset{**}{u}$ entsteht.

IV. Schliesslich möge noch der Zusammenhang erörtert werden, welcher zwischen den Differentialien und den Quotialien derselben Grössen besteht.

Der geänderte Werth einer Grösse $u$ wird einerseits durch $u+du$, andererseits durch $u\vartheta u$ angegeben; subtrahirt man daher von diesen beiden letzten Werthen den ursprünglichen $u$, so erhält man

$$du = u(\vartheta u - 1),$$

und dividirt man beide durch $u$:

$$\vartheta u = 1 + \frac{du}{u} = 1 + dlu.$$

§. 9.

Anwendung der Quotialrechnung auf die Bestimmung der wahren Werthe von $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, u. s. f.

I. Nach den Regeln der Differentialrechnung findet man den wahren Werth einer Funktion $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für das Argument $x=a$, für welches sie eine der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, als

$$\text{v. v.} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \left(\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right)_a.$$

Nun ist aber zufolge des §. 2.:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} \cdot \varphi(x) \cdot \overset{*}{\varphi}(x),$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} \cdot \psi(x) \cdot \overset{*}{\psi}(x);$$

mithin

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \left\{\frac{\varphi(x) \cdot \overset{*}{\varphi}(x)}{\psi(x) \cdot \overset{*}{\psi}(x)}\right\}_a = \left\{\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\overset{*}{\varphi}(x)}{\overset{*}{\psi}(x)}\right\}_a,$$

und folglich

$$\text{v. v.} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \left\{\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\overset{*}{\varphi}(x)}{\overset{*}{\psi}(x)}\right\}_a.$$

Wie man sieht, dient der Faktor $\frac{\overset{*}{\varphi}(x)}{\overset{*}{\psi}(x)}$ dazu, die Unbestimmtheit von $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ aufzuheben.

**Beispiel.** Es sei $\varphi(x) = \operatorname{tg}\pi x - \pi x$, $\psi(x) = 2x^2 \operatorname{tg}\pi x$ ı der Werth zu finden, den die Funktion

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\operatorname{tg}\pi x - \pi x}{2x^2 \operatorname{tg}\pi x}$$

für $x=0$ annimmt, wofür sie unter der unbestimmten Forn erscheint. Man findet

$$\overset{*}{\varphi}(x) = [\operatorname{tg}\pi x . \frac{2\pi x}{\sin 2\pi x} - \pi x] : [\operatorname{tg}\pi x - \pi x] = \frac{\pi x . \operatorname{tg}^2\pi x}{\operatorname{tg}\pi x - \pi x},$$

$$\overset{*}{\psi}(x) = 2 + \frac{2\pi x}{\sin 2\pi x},$$

mithin

$$\varphi(x)\overset{*}{\varphi}(x) = \pi x . \operatorname{tg}^2\pi x,$$

$$\psi(x)\overset{*}{\psi}(x) = 2x^2 \operatorname{tg}\pi x (2 + \frac{2\pi x}{\sin 2\pi x}),$$

und folglich

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\overset{*}{\varphi}(x)}{\overset{*}{\psi}(x)} = \tfrac{1}{2}\frac{\pi^2}{2 + \frac{2\pi x}{\sin 2\pi x}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\pi x}{\pi x},$$

welcher Ausdruck für $x=0$ in $\frac{\pi^2}{6}$ übergeht, so dass also

$$\text{v. v. } \underset{x=0}{\frac{\operatorname{tg}\pi x - \pi x}{2x^2 \operatorname{tg}\pi x}} = \frac{\pi^2}{6}$$

wird.

Sollte sich $\frac{\overset{*}{\varphi}(x)}{\overset{*}{\psi}(x)}$ selbst wieder auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ reduciren, würde der wahre Werth hiervon mit Hülfe von

$$\frac{\overset{*}{\varphi}(x)}{\overset{*}{\psi}(x)} \cdot \frac{\overset{**}{\varphi}(x)}{\overset{**}{\psi}(x)}$$

gefunden, und mithin erhielte man in diesem Falle:

$$\text{v. v. } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \left\{ \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\overset{*}{\varphi}(x)}{\overset{*}{\psi}(x)} \cdot \frac{\overset{**}{\varphi}(x)}{\overset{**}{\psi}(x)} \right\}_a .$$

Durch Fortsetzung dieser Schlüsse gelangt man zu dem Resultat, dass wenn die Funktionen

$$\varphi(x),\ \overset{*}{\varphi}(x),\ \overset{**}{\varphi}(x),\ \ldots\ \overset{[n-1]}{\varphi}(x);$$

$$\psi(x),\ \overset{*}{\psi}(x),\ \overset{**}{\psi}(x),\ \ldots\ \overset{[n-1]}{\psi}(x)$$

sich sämmtlich für $x=a$ annulliren, der wahre Werth von $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ gleich

$$\left\{\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{\overset{*}{\varphi}(x)}{\overset{*}{\psi}(x)}\cdot\frac{\overset{**}{\varphi}(x)}{\overset{**}{\psi}(x)}\ \ldots\ \frac{\overset{[n-1]}{\varphi}(x)}{\overset{[n-1]}{\psi}(x)}\cdot\frac{\overset{[n]}{\varphi}(x)}{\overset{[n]}{\psi}(x)}\right\}_a$$

ist.

II. Um den Werth der Funktion $\varphi(x)-\psi(x)$ für ein Argument $x=a$ zu finden, für welches $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ unendlich werden, setze man:

$$\varphi(x)=\mathrm{l}.e^{\varphi(x)},$$

$$\psi(x)=\mathrm{l}.e^{\psi(x)},$$

wodurch

$$\varphi(x)-\psi(x)=\mathrm{l}.\frac{e^{\varphi(x)}}{e^{\psi(x)}}$$

wird. Die unter dem Logarithmuszeichen stehende Funktion erscheint alsdann unter der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$, und ihr wahrer Werth ist nach I. unter Anwendung von §. 4. No. 7, c.:

$$\left\{\frac{e^{\varphi(x)}.\varphi(x).\overset{*}{\varphi}(x)}{e^{\psi(x)}.\psi(x).\overset{*}{\psi}(x)}\right\}_a,$$

mithin

$$\text{v. v. }[\varphi(x)-\psi(x)]=\mathrm{l}\left(\frac{e^{\varphi(x)}.\varphi(x).\overset{*}{\varphi}(x)}{e^{\psi(x)}.\psi(x).\overset{*}{\psi}(x)}\right)_a.$$

III. Wird $\varphi(a)=0$ und $\psi(a)=\infty$, nimmt also $\varphi(x).\psi(x)$ für $x=a$ die unbestimmte Form $0.\infty$ an, so findet man den wahren Werth hiervon, indem man $\psi(x)=1:(1:\psi(x))$ setzt, wodurch man für das Produkt $\varphi(x).\psi(x)$ den Quotienten

$$\frac{\varphi(x)}{1:\psi(x)}$$

erhält, der nun für $x=a$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint und also nach I. bestimmt werden kann. Man findet so:

$$\text{v. v.}\,\{\varphi(x).\psi(x)\} = -\{\varphi(x).\psi(x).\frac{\overset{*}{\varphi}(x)}{\overset{*}{\psi}(x)}\}_a.$$

Wird $\varphi(a)=\psi(a)=0$, so erscheint die Funktion $\varphi(x)^{\psi(x)}$ für $x=a$ in der Form $0^0$; zur Bestimmung des wahren Werthes dient jedoch

$$\text{v. v. } \varphi(x)^{\psi(x)} = \text{v. v. } e^{\psi(x) l\varphi(x)} = \text{v. v. } e^{-0\cdot\infty} = \left\{ e^{\psi(x)\cdot l\varphi(x)^2} \cdot \frac{\overset{*}{\psi}(x)}{\overset{*}{\varphi}(x)} \right\}_a.$$

Auf ähnliche Weise finden sich die wahren Werthe der Funktion $\varphi(x)^{\psi(x)}$, wenn sie für $x=a$ die unbestimmte Form $\infty^0$ oder $1^\infty$ annimmt.

IV. Noch mögen die drei folgenden unbestimmten Symbole betrachtet werden:

$$\overset{0}{\log} 0, \quad \overset{\infty}{\log}\infty, \quad \overset{1}{\log} 1,$$

unter denen die Funktion $\overset{\psi(x)}{\log}\varphi(x)$ auftreten kann. Nun ist

$$\overset{\psi(x)}{\log}\varphi(x) = \frac{l\varphi(x)}{l\psi(x)},$$

und die rechte Seite dieser Gleichung reducirt sich in den drei Fällen auf $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$. Daher wird schliesslich

$$\text{v. v. } \overset{\psi(x)}{\log}\varphi(x) = \left\{ \frac{\overset{*}{\varphi}(x)}{\overset{*}{\psi}(x)} \right\}_a.$$

Beispiel:

$$\text{v. v. } \underset{x=0}{\overset{x}{\log}} \sin x = (x \operatorname{cotg} x)_0 = \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)_0 = 1.$$

## §. 10.

## Beziehungen zwischen einer Funktion und ihren Quotialderivirten.

I. Ist $y=f(x)$, so stellt $\lambda\vartheta y = \overset{*}{f}(x)$ die Grenze vor, welcher sich der Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Werthe der Funktion, dessen Basis das Verhältniss der diesen entsprechenden Werthe des Argumentes ist, ohne Ende

nähert. Bleibt nun die Funktion innerhalb eines gegebenen Intervalls stetig, und wird sie weder Null noch unendlich, so ist innerhalb desselben:

$$\vartheta y > 1, \text{ also } \lambda\vartheta y \text{ oder } \overset{*}{f}(x) > 0, \text{ wenn } y \text{ wächst,}$$

$$\vartheta y < 1, \quad ,, \quad \lambda\vartheta y \quad ,, \quad \overset{*}{f}(x) < 0, \quad ,, \quad y \text{ abnimmt,}$$

und umgekehrt. Daher ist die Quotialderivirte $\overset{*}{f}(x)$ sehr geeignet, den Verlauf der Funktion $f(x)$ näher zu prüfen.

II. Nun seien $A$ und $B$ das Maximum und Minimum der Quotialderivirten $\overset{*}{f}(x)$ innerhalb des Intervalls von $x=a$ bis $x=a.h$ und $\overset{*}{f}(x)$ selbst, sowie $f(x)$, innerhalb dieses Intervalls continuirlich; dann ist

$$\overset{*}{f}(x) - A < 0 \text{ und } \overset{*}{f}(x) - B > 0.$$

Setzt man hierin $x = au$, wofür $1 \leqq u \leqq h$ wird, so ist ebenso

$$\overset{*}{f}(au) - A < 0 \text{ und } \overset{*}{f}(au) - B > 0.$$

Diese beiden Ausdrücke sind aber die Quotialderivirten von

$$\frac{f(au)}{f(a).u^A} \text{ und } \frac{f(au)}{f(a).u^B}.$$

Nach I. ist die erste dieser Grössen abnehmend, die zweite wachsend innerhalb des Intervalls von $u=1$ bis $u=h$; für $u=1$ haben beide den gemeinschaftlichen Werth 1, mithin ist überhaupt mit Ausschluss der unteren Grenze des Intervalls:

$$\frac{f(au)}{f(a).u^A} < 1, \quad \frac{f(au)}{f(a).u^B} > 1,$$

und also auch für $u=h$:

$$\frac{f(ah)}{f(a).h^A} < 1, \quad \frac{f(ah)}{f(a).h^B} > 1.$$

Da nun $A$ und $B$ Maximum und Minimum von $\overset{*}{f}(x) = \overset{*}{f}(au)$ sind, so ist der erstere dieser beiden Ausdrücke das Minimum, der letztere das Maximum von

$$\frac{f(ah)}{f(a).h^{\overset{*}{f}(x)}},$$

und da diese Grösse den obigen Bedingungen zufolge continuirlich ist, so gibt es einen Werth $x = a . h^\lambda$, für welchen

$$\frac{f(ah)}{f(a) . h^{\overset{*}{f}(ah^\lambda)}} = 1 .$$

wird, worin $\lambda$ eine nicht näher zu bestimmende Grösse ist, welche zwischen 0 und 1 liegt. Hieraus folgt:

$$f(ah) = f(a) . h^{\overset{*}{f}(ah^\lambda)}$$

oder, wenn man $x$ für $a$ schreibt,

$$f(xh) = f(x) . h^{\overset{*}{f}(xh^\lambda)}, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1,$$

welche Gleichung an die Bedingung geknüpft ist, dass die Funktion $f(\sigma)$, sowie ihre Quotialderivirte $\overset{*}{f}(\sigma)$, innerhalb des Intervalls von $\sigma = x$ bis $\sigma = xh$ continuirlich und endlich bleiben, und ausserdem $f(\sigma)$ nicht verschwindet.

Z. B. $f(\sigma) = e^\sigma$, wofür $\overset{*}{f}(\sigma) = \sigma$ wird. Es gilt dann für jedes $x$ und $h$:

$$e^{xh} = e^x . h^{x . h^\lambda}.$$

Setzt man in obiger Gleichung $a = 1$, $h = x$, so gilt unter denselben Bedingungen für das Intervall von $\sigma = 1$ bis $\sigma = x$:

$$f(x) = f(1) . x^{\overset{*}{f}(x^\lambda)};$$

für $f(\sigma) = e^\sigma$ also z. B. wird

$$e^x = e . x^{(x^\lambda)}.$$

Als weiteres Beispiel möge dienen:

$$f(\sigma) = (1 + \sigma)^k, \quad \text{wofür} \quad \overset{*}{f}(\sigma) = \frac{k\sigma}{1 + \sigma} \quad \text{wird;}$$

man erhält dann:

$$(1 + hx)^k = (1 + x)^k . h^{\frac{kxh^\lambda}{1 + x . h^\lambda}},$$

$$(1 + x)^k = 2^k . x^{\frac{kx^\lambda}{1 + x^\lambda}}.$$

III. Es seien $A$ und $B$ das Maximum und Minimum des Quotienten zweier Quotialderivirten, nämlich von

$$\frac{\overset{*}{f}(x)}{\overset{*}{\varphi}(x)},$$

so ist

$$\frac{\overset{*}{f}(x)}{\overset{*}{\varphi}(x)} - A < 0, \quad \frac{\overset{*}{f}(x)}{\overset{*}{\varphi}(x)} - B > 0,$$

und wenn $\overset{*}{\varphi}(x)$ für alle $x$, welche in Anspruch genommen werden, stets positiv bleibt, also $\varphi(x)$ eine wachsende Funktion ist, auch

$$\overset{*}{f}(x) - A\overset{*}{\varphi}(x) < 0, \quad \overset{*}{f}(x) - B\overset{*}{\varphi}(x) > 0.$$

Nun sind aber diese Grössen die Quotialderivirten von

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)^A} \text{ und } \frac{f(x)}{\varphi(x)^B},$$

von diesen letzten Ausdrücken ist daher der erste abnehmend, der zweite wachsend, wenn $x$ wächst. Setzt man also in ihnen $x.h$ an die Stelle von $x$ und dividirt die dadurch erscheinenden neuen Ausdrücke durch die ursprünglichen, so wird

$$\frac{f(x.h)}{f(x)} : \left\{\frac{\varphi(xh)}{\varphi(x)}\right\}^A < 1, \quad \frac{f(x.h)}{f(x)} : \left\{\frac{\varphi(x.h)}{\varphi(x)}\right\}^B > 1,$$

und wenn man Logarithmen zur Basis $\dfrac{\varphi(xh)}{\varphi(x)}$ nimmt:

$$\overset{\frac{\varphi(x.h)}{\varphi(x)}}{\log}.\frac{f(x.h)}{f(x)} - A < 0, \quad \overset{\frac{\varphi(x.h)}{\varphi(x)}}{\log}\frac{f(x.h)}{f(x)} - B > 0.$$

Die Ausdrücke auf der linken Seite der Zeichen $\lessgtr$ sind aber Spezialisirungen von

$$\overset{\frac{\varphi(x.h)}{\varphi(x)}}{\log}\frac{f(x.h)}{f(x)} - \frac{\overset{*}{f}(\xi)}{\overset{*}{\varphi}(\xi)};$$

durch dieselbe Betrachtung, wie in II., gelangt man daher zu dem Satze:

$$\overset{\frac{\varphi(x.h)}{\varphi(x)}}{\log}\frac{f(x.h)}{f(x)} = \frac{\overset{*}{f}(xh^\lambda)}{\overset{*}{\varphi}(xh^\lambda)}, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1,$$

der unter denselben Bedingungen wie I. gilt, nur dass ausserdem

$\varphi(\sigma)$ eine wachsende Funktion sein muss. Statt dieser Gleichung kann man auch eine der beiden folgenden, mit dieser gleichbedeutenden anwenden:

$$\frac{f(x.h)}{f(x)} = \left\{\frac{\varphi(x.h)}{\varphi(x)}\right\}^{\frac{\overset{*}{f}(xh^\lambda)}{\overset{*}{\varphi}(xh^\lambda)}}, \qquad \frac{1.\dfrac{f(x.h)}{f(x)}}{1.\dfrac{\varphi(x.h)}{\varphi(x)}} = \frac{\overset{*}{f}(xh^\lambda)}{\overset{*}{\varphi}(xh^\lambda)}.$$

Reduciren sich $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x = x_0$ gleichzeitig auf die Einheit, so erhält man insbesondere:

$$f(x_0h) = \varphi(x_0h)^{\frac{\overset{*}{f}(x_0h^\lambda)}{\overset{*}{\varphi}(x_0h^\lambda)}} \text{ oder } \frac{1.f(x_0h)}{1.\varphi(x_0h)} = \frac{\overset{*}{f}(x_0h^\lambda)}{\overset{*}{\varphi}(x_0h^\lambda)},$$

und insbesondere für $x_0 = 1$, $h = x$:

$$f(x) = \varphi(x)^{\frac{\overset{*}{f}(x^\lambda)}{\overset{*}{\varphi}(x^\lambda)}} \text{ oder } \frac{1.f(x)}{1\varphi(x)} = \frac{\overset{*}{f}(x^\lambda)}{\overset{*}{\varphi}(x^\lambda)}.$$

Die vorstehenden Sätze entsprechen denjenigen Sätzen der Differentialrechnung, auf welche man das Taylor'sche und Maclaurin'schen Theorem zu gründen pflegt. Das Analogon zu diesen Theoremen selbst zu finden, ist mir bis jetzt nicht gelungen. Man kann vermuthen, dass das Analogon zum Maclaurin'schen Satze folgende Form haben werde:

$$f(x) = f(1).x^{\mu_1 \overset{*}{f}(1).x^{\mu_2 \overset{**}{f}(1).x^{\mu_3 \overset{***}{f}(1).x \cdots}}},$$

worin $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$,.... gewisse von der Natur der Funktion $f(x)$ unabhängige Coefficienten sein werden.

## §. 11.

### Maxima und Minima der Funktionen.

1. Sei $f(x)$ eine Funktion, welche für $x = \xi$ ein Maximum oder Minimum erreicht. Da sie an dieser Stelle vom Abnehmen zum Wachsen oder von letzterem zu ersterem übergeht, und sie wächst, so lange $\overset{*}{f}(x)$ positiv ist, und abnimmt, sobald $\overset{*}{f}(x)$ nega-

negativ wird, so muss für $x=\xi$ die Quotialderivirte $\overset{*}{f}(x)$ das Zeichen wechseln, und mithin, falls diese Funktion continuirlich ist,

$$\overset{*}{f}(\xi)=0$$

werden. Den Werthen von $\xi$, welche diese Gleichung befriedigen, können demnach Maxima oder Minima $f(\xi)$ zugehören. Ob nun $f(\xi)$ ein Maximum oder Minimum wird, hängt davon ab, ob für Werthe von $h$, welche der Einheit auch noch so nahe liegen, von den Ausdrücken

$$\overset{*}{f}(\xi.h) \text{ und } \overset{*}{f}\left(\frac{\xi}{h}\right)$$

der erste negativ und der zweite positiv wird, oder umgekehrt.

Beispiel. Die Zahl $a$ soll in zwei solche Faktoren zerlegt werden, $x$ und $\frac{a}{x}$, dass die Funktion $F(x, \frac{a}{x})$ ein Maximum oder Minimum werde.

Man hat hier, wenn man für einen Augenblick $\frac{a}{x}$ mit $v$ bezeichnet:

$$\overset{*}{F}(x, \frac{a}{x}) = \overset{*}{F}_x(x, v) - \overset{*}{F}_v(x, v),$$

und die Werthe von $\xi$, für welche ein Maximum oder Minimum eintritt, sind Wurzeln dieser Gleichung; z. B. für

$$F(x, \frac{a}{x}) = x^{\frac{a}{x}} \text{ ist } \overset{*}{F}_x = \frac{a}{x}, \quad \overset{*}{F}_{\frac{a}{x}} = +\frac{a}{x}.\mathrm{l}x,$$

mithin

$$\frac{a}{\xi} - \frac{a}{\xi}\mathrm{l}\xi = \frac{a}{\xi}(1-\mathrm{l}\xi),$$

woraus $\xi=e$ folgt.

Für diesen Werth von $x$ findet ein Maximum statt, denn der Ausdruck

$$\overset{*}{\left(x^{\frac{a}{x}}\right)} = \frac{a}{x}(1-\mathrm{l}x)$$

wird negativ für $x=e.h$ und positiv für $x=\frac{e}{h}$.

**II.** Soll eine Funktion zweier Variabeln $u=f(x, y)$ ein Maximum oder Minimum werden, so kann man, ohne die Unabhängig-

keit von $x$ und $y$ zu stören, $y$ als eine willkührliche Funktion von $x$ ansehen. Dadurch wird $u$ zu einer Funktion von $x$ allein und mithin muss nach I. für den Fall des Maximums oder Minimums der Quotiallogarithmus von $u$, nämlich

$$\overset{*}{f}(x) + \overset{*}{f}(y) \cdot \overset{|*}{y} = 0$$

sein. Wegen der Willkührlichkeit von $y$ und in Folge dessen von $\overset{*}{y}$ spaltet sich diese Gleichung aber in die beiden folgenden:

$$\overset{*}{f}(x) = 0, \quad \overset{*}{f}(y) = 0,$$

aus welchen die Systeme von Werthen $x = \xi$, $y = \eta$ hervorgehen, welche $u$ zu einem Maximum oder Minimum machen. Das Kriterium, ob ein solches System ein Maximum oder ein Minimum liefert, ergibt sich leicht aus dem bei I. Angewandten.

## §. 11.

### Geometrische Betrachtungen über die Quotialderivirten.

I. Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve, so bedeutet das Quotial $\vartheta y$ das Verhältniss zweier unmittelbar auf einander folgenden Ordinaten und $\vartheta x$ das Verhältniss der diesen entsprechenden Abscissen. Nun ist aber in Folge des §. 2.:

$$\vartheta y = \vartheta x^{\overset{*}{y}};$$

man erkennt daher, dass die Quotialderivirte der Ordinate der Exponent ist, mit welchem man das Verhältniss zweier unendlich wenig verschiedener Abscissen potenziren muss, um das Verhältniss der ihnen entsprechenden Ordinaten zu finden. Dieser Exponent lässt sich aber noch bestimmter deuten. Bedeutet nämlich $y'$ den Differentialquotienten der Ordinate, so ist die Subtangente

$$S_t = y : y'.$$

Verbindet man hiermit die Gleichung

$$y\overset{*}{y} = xy',$$

so folgt

$$x : S_t = \overset{*}{y},$$

woraus sich die Bedeutung der Quotialderivirten $\overset{*}{y}$ ergibt. Sie stellt nämlich das Verhältniss der Abscisse zur Subtangente dar.

Für die gemeine Parabel $y^2=px$ z. B. ist $2\overset{*}{y}=1$ oder $\overset{*}{y}=\frac{1}{2}$, mithin

$$x:S_t=1:2.$$

II. Die Fläche $F$ der Curve $y=f(x)$, welche von dem Bogen derselben, der Abscissenaxe und zwei Ordinaten begrenzt wird, deren Abscissen $\alpha$ und $x$ sind, wird gefunden durch das Integral

$$F=\int_\alpha^x ydx.$$

Bedeutet $F'$ den Differentialquotienten dieser Fläche, so dass also $F'=y$ ist, so hat man nach §. 2.:

$$\overset{*}{F}=\frac{xF'}{F}=\frac{xy}{F}.$$

Es stellt also die Quotialderivirte der Fläche einer ebenen Curve das Verhältniss des Rechtecks aus Abscisse und Ordinate des Endpunktes des die Fläche begrenzenden Bogens zur Fläche selbst dar. Für die Parabel ist $F=\frac{2}{3}xy$, wenn die Abscissen vom Scheitel an gerechnet werden, mithin $\overset{*}{F}=\frac{3}{2}$. Hieraus folgt für das Flächenquotial:

$$\vartheta F=\vartheta x^{\frac{3}{2}}.$$

III. Bedeutet $Q_x$ den Querschnitt eines Körperraumes, welcher senkrecht zur Abscissenaxe geführt ist, so ist das Volumen desselben

$$V=\int_\alpha^x Q_x dx,$$

und der Differentialquotient des Volumens, wenn blos $x$ sich ändert,

$$V'=Q_x.$$

Nun ist aber nach §. 2. die Quotialderivirte desselben

$$\overset{*}{V}=\frac{xV'}{V},$$

mithin

$$\overset{*}{V}=\frac{xQ_x}{V}.$$

Es stellt also die Quotialderivirte $\overset{*}{V}$ des Volumens $V$ das Verhältniss eines Cylinders von der Basis $Q$ und der Höhe $x$ zum Volumen selbst dar.

Weiteres über diese und ähnliche Betrachtungen in den und 20.

## §. 12.

### Begriff des Instaurals.

Ist $f(x)$ die Quotialderivirte von $F(x)$ und $\omega$ eine geg Einheit convergirende Grösse, so hat man nach §. 2:

$$\lim . \overset{\omega}{\log} \frac{F(x . \omega)}{F(x)} = f(x),$$

mithin

$$\overset{\omega}{\log} \frac{F(x . \omega)}{F(x)} = f(x) + \varrho,$$

wo $\varrho$ eine positive oder negative Ergänzung ist, welche vers det, wenn $\omega$ in die Einheit übergeht. Hieraus folgt:

$$\frac{F(x . \omega)}{F(x)} = \omega^{f(x)} . \omega^{\varrho}.$$

Setzt man nun in dieser Gleichung der Reihe nach

$$x = a, \quad a\omega_1, \quad a\omega_1\omega_2, \quad a\omega_1\omega_2\omega_3, \dots . \; a\omega_1\omega_2\omega_3 \dots . \; \omega_{n-1}$$

und zugleich

$$\omega = \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \omega_4, \dots . \; \omega_n,$$

und bezeichnet die diesen Werthen zugehörigen Ergänzungen

$$\varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \varrho_3, \dots . \; \varrho_n,$$

so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{F(a . \omega_1)}{F(a)} = \omega_1^{f(a)} . \omega_1^{\varrho_1},$$

$$\frac{F(a . \omega_1\omega_2)}{F(a . \omega_1)} = \omega_2^{f(a . \omega_1)} . \omega_2^{\varrho_2},$$

$$\frac{F(a . \omega_1\omega_2\omega_3)}{F(a . \omega_1\omega_2)} = \omega_3^{f(a . \omega_1\omega_2)} . \omega_3^{\varrho_3},$$

. . . . . . . . . . .

$$\frac{F(a . \omega_1\omega_2\omega_3 \dots . \omega_n)}{F(a . \omega_1\omega_2\omega_3 \dots . \omega_{n-1})} = \omega_n^{f(a . \omega_1\omega_2 \dots . \omega_{n-1})} . \omega_n^{\varrho_n}.$$

Unter der Voraussetzung nun, dass die Funktion $F(x)$ continuirlich sei und nicht innerhalb des hier in Anspruch genommenen Intervalls verschwindet, heben sich bei der Multiplication dieser Gleichungen auf der linken Seite die Nenner gegen die ihnen gleichen Zähler bis auf den letzten Zähler und ersten Nenner weg, und es bleibt blos:

$$\frac{F(a.\omega_1\omega_2\omega_3\ldots.\omega_n)}{F(a)} = \omega_1^{f(a)}.\,\omega_2^{f(a\omega_1)}.\,\omega_3^{f(a\omega_1\omega_2)}\ldots.\omega_n^{f(a\omega_1\omega_2\ldots.\omega_{n-1})}$$
$$\times\,\omega_1^{\varrho_1}.\,\omega_2^{\varrho_2}.\,\omega_3^{\varrho_3}\ldots.\,\omega_n^{\varrho_n}.$$

Setzen wir nun

$$a.\omega_1\omega_2\omega_3\ldots.\omega_n = b$$

und lassen alle $\omega$ gegen die Einheit convergiren, aber gleichzeitig $n$ so wachsen, dass $b$ einen festen endlichen Werth behält, so geht die vorstehende Gleichung über in die folgende:

$$\frac{F(b)}{F(a)} = \lim_{\left[\omega_1\omega_2\omega_3\ldots.\omega_n=\frac{b}{a}\right]}.\{\omega_1^{f(a)}.\,\omega_2^{f(a\omega_1)}.\,\omega_3^{f(a\omega_1\omega_2)}\ldots.\omega_n^{f(a\omega_1\omega_2\ldots.\omega_{n-1})}\},\quad (1)$$

weil, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$\lim(\omega_1^{\varrho_1}.\,\omega_2^{\varrho_2}.\,\omega_3^{\varrho_3}\ldots.\,\omega_n^{\varrho_n}) = 1$$

ist. Die Grössen $\omega$ sind nur in soweit von einander nicht unabhängig, als ihr Produkt sich der Grenze $\frac{b}{a}$ nähern muss, während jede gegen die 1 convergirt und ihre Anzahl in's Unendliche wächst. Da diese Bedingung diese Grössen nicht selbst bestimmt, so kann sie auf unzählige Arten erfüllt werden, insbesondere auch dann, wenn man alle einander gleich setzt. Ist in diesem Falle $\omega$ ihr gemeinschaftlicher Werth, so erhält man statt der Gleichung (1) die etwas einfachere:

$$\frac{F(b)}{F(a)} = \lim_{\left[\omega^n=\frac{b}{a}\right]}.\{\omega^{f(a)+f(a\omega)+f(a\omega^2)+f(a\omega^3)+\ldots.+f(a\omega^{n-1})}\}.\quad (2)$$

Für die rechte Seite der Gleichung (1) oder (2) möge nun eine kürzere Bezeichnung gewählt werden. Sie erscheint nämlich als die Grenze eines Produkts von Faktoren, deren jeder sich der Einheit nähert, während ihre Anzahl ohne Ende wächst. Ein solcher Faktor hat die Form

$$\omega_s^{f(a\,.\,\omega_1\omega_2\omega_3\,\ldots\,\omega_{s-1})}.$$

Setzt man hierin das Argument

$$a\,.\,\omega_1\omega_2\omega_3\,\ldots\,\omega_{s-1} = \sigma,$$

so würde das im folgenden Faktor vorkommende geänderte Argument

$$a\,.\,\omega_1\omega_2\omega_3\,\ldots\,\omega_{s-1}\,.\,\omega_s = \sigma\,.\,\omega_s$$

sein, und also $\omega_s$ den Quotienten von $\sigma$ bedeuten, der nach §. 2. mit $\Theta\sigma$ zu bezeichnen ist. Daher wird

$$\Theta\sigma^{f(\sigma)}$$

die allgemeine Form aller Elementarfaktoren jenes Produkts und dieses selbst also durch

$$\mathop{\Pi}_{a}^{b:\omega_n}\Theta\sigma^{f(\sigma)}$$

bezeichnet werden können, so dass man also erhält:

$$\frac{F(b)}{F(a)} = \lim.\mathop{\Pi}_{a}^{b:\omega_n}\Theta\sigma^{f(\sigma)}.$$

Das Zeichen lim. bezieht sich hierin auf die unendliche Annäherung des Quotienten $\Theta\sigma$ an die 1; es ist also diese Grösse im Moment der Vollendung des Grenzenüberganges das Quotial $\vartheta\sigma$. Die Grösse $b:\omega_n$ geht in diesem Momente in $b$ über. Mit Weglassung des Zeichens lim. möge diese Gleichung in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\frac{F(b)}{F(a)} = \mathop{P}_{a}^{b}\vartheta\sigma^{f(\sigma)}, \tag{3}$$

so dass das Symbol $P$ die Forderung des Grenzenüberganges ausdrückt.

Der durch die rechte Seite der Gleichung (3) bezeichnete Grenzwerth möge nun das bestimmte Instaural der Funktion $f(x)$ innerhalb der Grenzen $x=a$ und $x=b$ genannt werden. Diese Grösse wird also definirt durch die Gleichung

$$\mathop{P}_{a}^{b}\vartheta\sigma^{f(\sigma)} = \lim.\{\omega_1^{f(a)}.\,\omega_2^{f(a\omega_1)}.\,\omega_3^{f(a\omega_1\omega_2)}\ldots\,\omega_n^{f(a\omega_1\omega_2\ldots\omega_{n-1})}\}$$
$$\left[\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_n = \frac{b}{a}\right]$$

oder auch durch die folgende speziellere:

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma f(\sigma) = \lim_{[\omega^n = \frac{b}{a}]} .\{\omega f(a) + f(a\omega) + f(a\omega^2) + \ldots + f(a\omega^{n-1})\}$$

oder endlich, wenn $F(x)$ diejenige Funktion ist, deren Quotialderivirte $f(x)$ ist, durch

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma f(\sigma) = \frac{F(b)}{F(a)}.$$

Betrachtet man die obere Grenze $b$ des bestimmten Instaurals als variabel und bezeichnet sie mit $x$, so wird das Instaural selbst eine Funktion von $x$, nämlich

$$\overset{x}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma f(\sigma) = \frac{F(x)}{F(b)}.$$

Quotiirt man nun beide Seiten dieser Gleichung nach $x$, so wird

$$\lambda\vartheta . \overset{x}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma f(\sigma) = \overset{*}{F}(x),$$

oder, weil nach der am Anfange dieses Paragraphen getroffenen Bestimmung

$$\overset{*}{F}(x) = f(x)$$

ist,

$$\lambda\vartheta . \overset{x}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma f(\sigma) = f(x).$$

Sucht man also eine Funktion $y$ von $x$, welche der Gleichung genügt:

$$\lambda\vartheta y = f(x),$$

so kann man für $y$ nehmen:

$$y = C . \overset{x}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma f(\sigma) = C . \frac{F(x)}{F(a)},$$

worin $C$ eine beliebige Constante bedeutet, welche zugefügt werden darf, weil sie durch Quotiation wieder wegfällt. Die untere Gränze $a$ des Instaurals ist hierbei gleichfalls beliebig; denn wenn $\overset{*}{F}(x) = f(x)$ ist, so genügt der Gleichung der Ausdruck $C . \frac{F(x)}{F(a)}$, was auch immer $F(a)$ für einen Werth haben mag. Eine Funktion, welche überhaupt der obigen Gleichung genügt, möge mit

$$P\vartheta x f(x)$$

bezeichnet und das unbestimmte Instaural der Funkti $f(x)$ genannt werden. Dasselbe ist also mit $C.F(x)$ gleichbed tend, wenn $\overset{*}{F}(x)=f(x)$ ist.

Setzt man in der Gleichung (1):

$$a\omega_1=a_1,\quad a_1\omega_2=a_2,\quad a_2\omega_3=a_3\ldots\ldots a_{n-2}.\omega_{n-1}=a_{n-1},$$

$$F(a)=y_0,\quad F(a_1)=y_1,\quad F(a_2)=y_2\ldots\ldots F(a_{n-1})=y_{n-1};$$

so ist:

$$\lim.\omega_1{}^{f(a)}\quad=\vartheta f(a)\quad=\lim.\frac{y_1}{y_0},$$

$$\lim.\omega_2{}^{f(a_1)}\quad=\vartheta f(a_1)\quad=\lim.\frac{y_2}{y_1},$$

$$\lim.\omega_3{}^{f(a_2)}\quad=\vartheta f(a_2)\quad=\lim.\frac{y_3}{y_2},$$

. . . . . . . . . .

$$\lim\omega_n{}^{f(a_{n-1})}=\vartheta f(a_{n-1})=\frac{y_n}{y_{n-1}};$$

mithin unter Rücksicht auf (1):

$$\frac{F(b)}{F(a)}=\lim\left(\frac{y_1}{y_0}.\frac{y_2}{y_1}.\frac{y_3}{y_2}\ldots\frac{y_n}{y_{n-1}}\right)=\vartheta y_0.\vartheta y_1.\vartheta y_2\ldots\vartheta y_{n-1}).$$

Diese Gleichung stellt die eigenthümliche Bildungsweise Verhältnisses $\frac{F(b)}{F(a)}$ zweier Spezialwerthe der Funktion $F(x)$ du das bestimmte Instaural dar, nach welcher dasselbe als die Gre des Produkts der continuirlich auf einander folgenden, zwisch liegenden Verhältnisse erscheint, welche sich sämmtlich der 1 heit nähern, während ihre Anzahl ohne Ende wächst.

## §. 13.

Mit Hülfe der im vorigen Paragraphen angewandten Betr tungen kann man leicht die beiden in §. 10. II. und III. entwicke Sätze beweisen. Sind nämlich $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ der grösste und klei Werth, den $f(x)$ innerhalb des Intervalls von $x=a$ bis $x=b$ reicht, so erhält man, indem man diese Werthe in die Gleichung des vorigen Paragraphen an die Stelle der Funktionalwerthe $f$ $f(a\omega)$, $f(a\omega^2)$,.... $f(a\omega^{n-1})$ einsetzt:

$$\lim . \omega^{nf(\beta)} < \frac{F(b)}{F(a)} < \lim . \omega^{nf(\alpha)}$$

oder, weil

$$\lim . \omega^{n} = \frac{b}{a}$$

ist,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{f(\beta)} < \frac{F(b)}{F(a)} < \left(\frac{b}{a}\right)^{f(\alpha)}.$$

Hieraus schliesst man, dass es einen Werth $\xi$ zwischen $a$ und $b$ gibt, für welchen

$$\frac{F(b)}{F(a)} = \left(\frac{b}{a}\right)^{f(\xi)}$$

wird, oder, weil $\xi = a . \left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda}$ gesetzt werden kann, wo $\lambda$ zwischen 0 und 1 liegt, dass

$$\frac{F(b)}{F(a)} = \left(\frac{b}{a}\right)^{f\left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda}\right)}$$

ist. Setzt man hierin schliesslich $\frac{b}{a} = h$, also $b = ah$, und multiplicirt beiderseits mit $F(a)$, so erhält man, weil $f(x) = \overset{*}{F}(x)$ ist,

$$F(ah) = F(a) . h^{\overset{*}{F}(a . h^{\lambda})},$$

dasselbe Resultat, welches in §. 10. II. gefunden wurde, wobei nur $a$ an der Stelle von $x$ steht.

Wendet man die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen zur Entwickelung von

$$\frac{F(ah)}{F(a)} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(ah)}{\varphi(a)}$$

an und bildet die Grösse

$$\overset{\frac{\varphi(ah)}{\varphi(a)}}{\log} \frac{F(ah)}{F(a)},$$

so erhält man für sie den Ausdruck:

$$\lim . \left\{ \overset{\omega^{\overset{*}{\varphi}(a) + \overset{*}{\varphi}(a\omega) + \ldots \overset{*}{\varphi}(a\omega^{n-1})}}{\text{logarithm.}} \; \omega^{\overset{*}{F}(a) + \overset{*}{F}(a\omega) + \overset{*}{F}(a\omega^{2}) + \ldots + \overset{*}{F}(a\omega^{n-1})} \right\},$$

oder unter Umwandlung der Basis dieses Logarithmus den folgenden:

$$\lim.\frac{\overset{*}{F}(a)+\overset{*}{F}(a\omega)+\overset{*}{F}(a\omega^2)+\ldots.+\overset{*}{F}(a\omega^{n-1})}{\overset{*}{\varphi}(a)+\overset{*}{\varphi}(a\omega)+\overset{*}{\varphi}(a\omega^2)+\ldots.+\overset{*}{\varphi}(a\omega^{n-1})}.$$

Nach einem bekannten Satze über die Mittelgrössen kann man aber hierfür

$$\frac{\overset{*}{F}(a.\xi)}{\overset{*}{\varphi}(a.\xi)}$$

schreiben, wo $\xi$ zwischen $a$ und $b$ liegt. Setzt man $\xi = a.\left(\frac{b}{a}\right)^\lambda = a.h^\lambda$ und links für $b$ das gleichlautende $ah$, so erhält man schliesslich:

$$\overset{\frac{\varphi(ah)}{\varphi(a)}}{\log}.\frac{F(ah)}{F(a)} = \frac{\overset{*}{F}(a.h^\lambda)}{\overset{*}{\varphi}(a.h^\lambda)},$$

wie in §. 10.

Man kann diesen Satz auch folgendermassen ableiten:

Aus §. 12. (2) erhält man nämlich, wenn man für $\omega$ seinen Werth $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = h^{\frac{1}{n}}$ einführt und die Bedeutung des Funktionszeichens $f$ berücksichtigt:

$$\frac{F(ah)}{F(a)} = \lim.h^{\frac{1}{n}\{\overset{*}{F}(a)+\overset{*}{F}(a\omega)+\overset{*}{F}(a\omega^2)+\ldots.+\overset{*}{F}(a\omega^{n-1})\}},$$

$$\frac{\varphi(ah)}{\varphi(a)} = \lim.h^{\frac{1}{n}\{\overset{*}{\varphi}(a)+\overset{*}{\varphi}(a\omega)+\overset{*}{\varphi}(a\omega^2)+\ldots.+\overset{*}{\varphi}(a\omega^{n-1})\}}.$$

Nimmt man nun von beiden Seiten der zweiten Gleichung Logarithmen zur Basis $h$, so erhält man weiter:

$$\overset{h}{\log}.\frac{\varphi(ah)}{\varphi(a)} = \lim\frac{1}{n}\{\overset{*}{\varphi}(a)+\overset{*}{\varphi}(a\omega)+\ldots.+\overset{*}{\varphi}(a\omega^{n-1})\},$$

und wenn man mit beiden Seiten dieser Gleichung die beiden Seiten der ersten von den beiden vorstehenden radicirt:

$$\sqrt[\overset{h}{\log}\frac{\varphi(ah)}{\varphi(a)}]{\frac{F(ah)}{F(a)}} = \lim.h^{\frac{\overset{*}{F}(a)+\overset{*}{F}(a\omega)+\ldots.+\overset{*}{F}(a\omega^{n-1})}{\overset{*}{\varphi}(a)+\overset{*}{\varphi}(a\omega)+\ldots.+\overset{*}{\varphi}(a\omega^{n-1})}}.$$

Die Grenze rechter Hand ist aber in Folge obiger Betrachtung

$$h^{\frac{\overset{*}{F}(ah^\lambda)}{\overset{*}{\varphi}(ah^\lambda)}},\quad 0<\lambda<1,$$

mithin schliesslich:

$$\sqrt[\overset{h}{\log}\frac{\varphi(ah)}{\varphi(a)}]{\frac{F(ah)}{F(a)}} = h^{\frac{\overset{*}{F}(ah^{\lambda})}{\overset{*}{\varphi}(ah^{\lambda})}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\overset{\frac{\varphi(ah)}{\varphi(a)}}{\log}\frac{F(ah)}{F(a)} = \frac{\overset{*}{F}(ah^{\lambda})}{\overset{*}{\varphi}(ah^{\lambda})},$$

wie man sogleich sieht, wenn man Logarithmen zur Basis $h$ nimmt, diese aber nachher in solche für die Basis $\frac{\varphi(ah)}{\varphi(a)}$ umsetzt.

## §. 14.

### Einige Beispiele zu §. 12.

I. Sei $f(x)=\mu$, so wird

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{f(\sigma)} = \lim.\omega^{n\mu}, \quad \omega^n = \frac{b}{a};$$

mithin

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\mu} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\mu}, \quad \overset{x}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\mu} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\mu}, \quad P\vartheta\sigma^{\mu} = C..x^{\mu}.$$

II. $f(x) = \mathrm{l}x.$

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\mathrm{l}\sigma} = \lim.\omega^{\mathrm{l}a+\mathrm{l}.a\omega+\mathrm{l}.a\omega^2+\dots+\mathrm{l}.a\omega^{n-1}} = \lim.\omega^{\mathrm{l}(a^n.\omega^{\frac{n(n-1)}{1.2}})}$$

$$= \lim\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}.\mathrm{l}(a^n.(\frac{b}{a})^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{n})})} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\mathrm{l}(a\sqrt{\frac{b}{a}})} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\mathrm{l}\sqrt{ab}},$$

$$\overset{x}{\underset{a}{P}} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\mathrm{l}\sqrt{ax}}.$$

III. $f(x) = x.$

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\sigma} = \lim.\omega^{a+a\omega+a\omega^2+\dots+a\omega^{n-1}} = \lim\omega^{a\frac{\omega^n-1}{\omega-1}} = \lim.\left(\frac{b}{a}\right)^{a.\frac{1}{n}\frac{\omega^n-1}{\omega-1}}$$

$$= \left(\frac{b}{a}\right)^{a},$$

$$\overset{x}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\sigma} = \left(\frac{x}{a}\right)^{a}.$$

## §. 15.

## Zusammenhang zwischen der Instauration und Integration.

Sei $F(x)$ das unbestimmte Instaural von $f(x)$, also $f(x)$ die Quotialderivirte von $F(x)$, so dass man hat $x.\frac{d.\mathrm{l}F(x)}{dx}=f(x)$. Hieraus erhält man durch Integration

$$F(x)=C.e^{\int\frac{f(x)}{x}dx},$$

wo $C$ eine willkührliche Constante bedeutet, und mithin

$$\frac{F(b)}{F(a)}=e^{\int_a^b\frac{f(\sigma)}{\sigma}d\sigma}.$$

Andererseits ist aber $\frac{F(b)}{F(a)}=\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{f(\sigma)}$, durch Gleichsetzung beider Resultate erhält man daher die Relation

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{f(\sigma)}=e^{\int_a^b\frac{f(\sigma)}{\sigma}d\sigma}.$$

Nimmt man beiderseits natürliche Logarithmen und setzt $f(\sigma)=\sigma.\varphi(\sigma)$, so kommt noch:

$$\int_a^b\varphi(\sigma)d\sigma=\text{log. nat.}\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\sigma.\varphi(\sigma)}.$$

So ist z. B.

$$\int_a^x\frac{d\sigma}{\mathrm{l}\sigma}=\mathrm{li}(x)-\mathrm{li}(a)=\mathrm{l}.\overset{x}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\frac{1}{\mathrm{l}\sigma}}=\mathrm{l}.\lim.\omega^{\frac{1}{\mathrm{l}a}+\frac{1}{\mathrm{l}a+\mathrm{l}\omega}+\frac{1}{\mathrm{l}a+2\mathrm{l}\omega}+\dots+\frac{1}{\mathrm{l}a+\overline{n-1}\mathrm{l}\omega}}$$

$$=\mathrm{l}.\frac{x}{a}^{\lim\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\mathrm{l}a}+\frac{1}{\mathrm{l}a+\mathrm{l}\omega}+\frac{1}{\mathrm{l}a+2\mathrm{l}\omega}+\dots+\frac{1}{\mathrm{l}a+\overline{n-1}\mathrm{l}\omega}\right)}$$

$$=\mathrm{l}.\left(\frac{x}{a}\right).\lim.\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\mathrm{l}a}+\frac{1}{\mathrm{l}a+\mathrm{l}\omega}+\frac{1}{\mathrm{l}a+2\mathrm{l}\omega}+\dots+\frac{1}{\mathrm{l}a+\overline{n-1}\mathrm{l}\omega}\right),$$

$$\omega^n=\frac{x}{a}.$$

$$\int_a^x \frac{\sin\sigma}{\sigma} d\sigma = \mathrm{Si}(x) - \mathrm{Si}(a) = \mathrm{l}.\overset{x}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\sin\sigma},$$

$$\int_a^x \frac{\cos\sigma}{\sigma} d\sigma = \mathrm{Ci}(x) - \mathrm{Ci}(a) = \mathrm{l}.\overset{x}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\cos\sigma},$$

u. s. f.

Es ist leicht zu sehen, wie man die Instaurale zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale benutzen kann; zu diesem Zwecke dient am leichtesten die Gleichung

$$\int_a^b \varphi(\sigma)d\sigma = \mathrm{l}\left(\frac{b}{a}\right).\frac{a}{n}\{\varphi(a)+\omega\varphi(a\omega)+\omega^2\varphi(a\omega^2)+..+\omega^{n-1}\varphi(a\omega^{n-1})\},$$

wenn man darin für $n$ eine grosse Zahl und $\omega = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ setzt.

## §. 16.

Ist $A$ das arithmetische Mittel aus der continuirlichen Reihe von Funktionalwerthen

$$f(a),\quad f(a+\delta),\quad f(a+2\delta),\ \ldots.\ f(a+\overline{n-1}\,\delta),$$

deren Anzahl $n$ so wächst, dass $n\delta = b - a$ bleibt, so hat man

$$(b-a)A = \int_a^b f(\sigma)d\sigma.$$

Bedeutet in ähnlicher Weise $G$ das geometrische Mittel aus den Werthen

$$f(a),\quad f(a\omega),\quad f(a\omega^2),\ \ldots:f(a\omega^{n-1})$$

für wachsende $n$, aber so, dass $\omega^n = \frac{b}{a}$ bleibt, nämlich ist

$$G = \sqrt[n]{f(a).f(a\omega).f(a\omega^2)\ldots.f(a\omega^{n-1})},$$

so hat man

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathrm{l}G} = \omega^{\mathrm{l}f(a)+\mathrm{l}f(a\omega)+\mathrm{l}f(a\omega^2)+\ldots.+\mathrm{l}f(a\omega^{n-1})} = \overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\mathrm{l}f(\sigma)},$$

oder wegen

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{1G} = e^{1\left(\frac{b}{a}\right).1G} = G^{1\left(\frac{b}{a}\right)}:$$

$$G^{1\left(\frac{b}{a}\right)} = \overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{1f(\sigma)}.$$

## §. 17.

## Reduktionssätze für Instauralien.

I. Es ist

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{A.f(\sigma)} = \lim.\,\omega^{Af(a)+Af(a\omega)+Af(a\omega^2)+\dots+Af(a\omega^{n-1})}$$

$$= (\lim.\,\omega^{f(a)+f(a\omega)+\dots+f(a\omega^{n-1})})^A,$$

mithin

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{A.f(\sigma)} = \left(\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{f(\sigma)}\right)^A,$$

d. h. der constante Factor tritt als Exponent über das Instauralzeichen.

II. $\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\varphi(\sigma)+\psi(\sigma)} = \lim.\omega^{[\varphi(a)+\psi(a)]+[\varphi(a\omega)+\psi(a\omega)]+\dots+[\varphi(a\omega^{n-1})+\psi(a\omega^{n-1})]}$

$$= \lim\left(\omega^{\varphi(a)+\varphi(a\omega)+\dots+\varphi(a\omega^{n-1})}.\,\omega^{\psi(a)+\psi(a\omega)+\dots+\psi(a\omega^{n-1})}\right)$$

$$= \lim \omega^{\varphi(a)+\varphi(a\omega)+\dots+\varphi(a\omega^{n-1})}.\lim \omega^{\psi(a)+\psi(a\omega)+\dots+\psi(a\omega^{n-1})},$$

mithin

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\varphi(\sigma)+\psi(\sigma)} = \overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\varphi(\sigma)}.\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\psi(\sigma)},$$

d. h. das Instaural von der Summe zweier Funktionen ist das Produkt der Instauralien von den einzelnen Summanden.

III. Ebenso

$$\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\varphi(\sigma)-\psi(\sigma)} = \frac{\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\varphi(\sigma)}}{\overset{b}{\underset{a}{P}}\vartheta\sigma^{\psi(\sigma)}},$$

d. h. das Instaural von der Differenz zweier Funktionen ist das Instaural des Minuenden dividirt durch das Instaural des Subtrahenden.

IV. In Folge §. 4. 7) ist, wenn $v$ und $w$ Funktionen von $\sigma$ sind,

$$\vartheta . v^w = \vartheta\sigma^{w.\overset{*}{v}} . \vartheta\sigma^{w\overset{*}{w}lv},$$

mithin

$$v^w = P\vartheta\sigma^{w\overset{*}{v}} . P\vartheta\sigma^{w\overset{*}{w}lv}.$$

Setzt man hierin $v$ an die Stelle von $\overset{*}{v}$, also auch $P\vartheta\sigma^v$ an die Stelle von $v$, so kommt:

$$(P\vartheta\sigma^v)^w = P\vartheta\sigma^{vw} . P\vartheta\sigma^{w\overset{*}{w}l(P\vartheta\sigma^v)},$$

und hieraus folgt:

$$P\vartheta\sigma^{v.w} = \frac{(P\vartheta\sigma^v)^w}{P\vartheta\sigma^{w\overset{*}{w}l(P\vartheta\sigma^v)}}.$$

In den Anwendungen entspricht diese Formel der Formel für die partielle Integration. Weil $\vartheta\sigma^{\overset{*}{w}} = \vartheta w$ ist, kann man sie auch so schreiben:

$$P\vartheta\sigma^{v.w} = \frac{(P\vartheta\sigma^v)^w}{P\vartheta w^{l.(P\vartheta\sigma^v)^w}}.$$

V. Mit Hülfe der Substitution kann ein complicirtes Instaural vereinfacht werden. Es sei z. B. zu bestimmen das Instaural

$$P\vartheta\sigma^{f(\varphi(\sigma))},$$

so setze man $\varphi(\sigma) = u$; und kehre diese Funktion um, so dass man erhält:

$$\sigma = \psi(u).$$

Quotiirt man nun diese Gleichung, so kommt

$$\vartheta\sigma = \vartheta u^{\overset{*}{\psi}(u)},$$

und dadurch geht das gegebene Instaural in folgendes über:

$$P\vartheta u^{f(u).\overset{*}{\psi}(u)},$$

welches in vielen Fällen mit Hülfe von IV. leicht gefunden wird. Nach Ausführung der Rechnung hat man für $u$ seinen Werth $\varphi(\sigma)$ zu restituiren.

## §. 18.

Mit Hülfe der in §. 15. und §. 17. entwickelten Relationen,

zum Theil auch durch unmittelbare Umkehrung der Formeln in §. 3., gelangt man zu folgenden unbestimmten Instauralien:

1) $P\vartheta x^a = C.x^a$.

2) $P\vartheta x^{ax} = C.e^{ax}$.

3) $P\vartheta x^{ax^m} = C.e^{\frac{a}{m}x^m}$.

Die letztere Formel wird für $m=0$ unbrauchbar, indem die rechte Seite die unbestimmte Form $C.e^{\frac{a}{0}.x^0}$ annimmt. Sondert man aber von der Constanten $C$ den Faktor $e^{-\frac{a}{m}}$ ab, so ergibt sich:

$$C.e^{\frac{a}{m}(x^m-1)},$$

und wenn man jetzt den wahren Werth des Exponenten $\frac{a(x^m-1)}{m}$ für $m=0$ nach §. 9. bestimmt, so erhält man aus

$$\frac{a(x^m-1)\cdot\frac{mx^m.\mathrm{l}x}{x^m-1}}{m} = ax^m.\mathrm{l}x$$

für $m=0$ den Werth

$$a\mathrm{l}x = \mathrm{l}.x^a,$$

mithin schliesslich:

$$P\vartheta x^a = C.e^{\mathrm{l}.x^a} = C.x^a,$$

wie in der ersten der obigen Formeln.

4) $P\vartheta x^{a+bx+cx^2+\dots+px^n} = C.x^a.e^{bx+\frac{1}{2}cx^2+\dots+\frac{1}{n}px^n}$.

5) $P\vartheta x^{x\mathrm{l}x} = \frac{x^x}{e^x}$.

6) $P\vartheta x^{\frac{1}{\mathrm{l}x}} = P\vartheta x^{\frac{x}{\log e}} = C.\mathrm{l}x$.

7) $P\vartheta x^{\frac{x}{\mathrm{l}x}} = C.e^{\mathrm{li}(x)}$.

8) $P\vartheta x^{\sin x} = C.e^{\mathrm{Si}(x)}$.

9) $P\vartheta x^{\cos x} = C.e^{\mathrm{Ci}(x)}$.

10) $P\vartheta x^{x \sin x} = C . e^{-\cos x}$.

11) $P\vartheta x^{x \cos x} = C . e^{\sin x}$.

12) $P\vartheta x^{x \operatorname{tg} x} = \frac{C}{\cos x}$.

13) $P\vartheta x^{x \operatorname{cotg} x} = C . \sin x$.

14) $P\vartheta x^{\frac{x}{a+bx}} = C . \sqrt[b]{a+bx}$.

15) $P\vartheta x^{x(a+bx)^n} = C . e^{\frac{1}{nb}(a+bx)^n}$, $n \gtrless 0$.

16) $P\vartheta x^{\frac{x}{\alpha^2+\beta^2 x^2}} = C . e^{\frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} x}$.

17) $P\vartheta x^{\frac{x}{\alpha^2-\beta^2 x^2}} = C . \left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta}}$.

u. s. w.

## §. 19.

### Einige geometrische Aufgaben.

I. **Für welche ebenen Curven ist das Verhältniss der Abscisse zur Subtangente constant?**

Sei $m$ der constante Werth dieses Verhältnisses, so dass

$$x : S_t = m$$

zu setzen ist. Nach §. 11. ist aber dasselbe $= \overset{*}{y}$, mithin ist

$$\overset{*}{y} = m,$$

woraus durch unbestimmtes Instauriren folgt:

$$y = C . x^m .$$

Die Familie der Parabeln genügt also der Aufgabe, wenn der Anfangspunkt der Abscissen auf der Curve selbst liegt.

Man sieht, in welcher Weise die Instauration den Weg der Rechnung vermittelst des Integrirens in soweit abkürzt, als dieser durch logarithmische Funktionen führt.

Der Sinn der Gleichung $\overset{*}{y}=m$ oder der daraus abgeleiteten $\vartheta y=\vartheta x^m$ ist der, dass die auf einander folgenden Ordinaten einer Curve, welche der Aufgabe genügt, in einem zusammengesetzten Verhältnisse zu ihren Abscissen stehen müssen, dessen Exponent constant und $=m$ ist.

II. Für welche Curve ist die Subtangente constant $=a$?

Man hat hier

$$\overset{*}{y}=\frac{x}{a},$$

also sofort

$$y=C.e^{\frac{x}{a}}$$

als die Gleichung der gesuchten Curve.

III. Soll die Subtangente eine gegebene Funktion $f(x)$ der Abscisse sein, so hat man

$$\overset{*}{y}=\frac{x}{f(x)},$$

und folglich

$$y=C.P\vartheta x^{\frac{x}{f(x)}};$$

z. B. für $f(x)=a.\mathrm{l}\left(\frac{x}{a}\right)$ wird

$$y=C.P\vartheta x^{\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{\mathrm{l}\left(\frac{x}{a}\right)}}.$$

Setzt man $\frac{x}{a}=z$, wodurch $\vartheta x=\vartheta z$ wird, so geht das Instaural rechter Hand über in

$$P\vartheta z^{\frac{z}{\mathrm{l}z}}=e^{\mathrm{li}(z)},\ \text{mithin wird}\ y=C.e^{\mathrm{li}\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

IV. Soll die Subtangente eine Funktion $f(y)$ der Ordinate sein, so hat man zu setzen:

$$\overset{*}{y}=\frac{x}{f(y)}\quad\text{oder}\quad f(y).\overset{*}{y}=x,$$

mithin, wenn man $\vartheta x$ mit beiden Seiten dieser Gleichung potenzirt und $\vartheta x^{\overset{*}{y}}=\vartheta y$ setzt:

$$\vartheta y^{f(y)} = \vartheta x^z,$$

und hieraus folgt

$$C.P\vartheta y^{f(y)} = e^z$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

V. **Die Curve zu finden, für welche der Bogen $s$ eine gegebene Funktion $\varphi(\tau)$ des Tangentenwinkels $\tau$ ist.**

Betrachtet man die Coordinaten $x, y$ eines Punktes der Curve als Funktionen von $\tau$, so hat man:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} \cdot \cos\tau,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} \cdot \sin\tau;$$

oder, wenn man für $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{ds}{d\tau}$ die gleichbedeutenden Ausdrücke

$$\frac{x\overset{*}{x}}{\tau},\quad \frac{y\overset{*}{y}}{\tau},\quad \frac{s\overset{*}{s}}{\tau} = \frac{\varphi(\tau)\overset{*}{\varphi}(\tau)}{\tau}$$

setzt:

$$x\overset{*}{x} = s\overset{*}{s}.\cos\tau = \varphi(\tau)\overset{*}{\varphi}(\tau).\cos\tau,$$

$$y\overset{*}{y} = s\overset{*}{s}.\sin\tau = \varphi(\tau)\overset{*}{\varphi}(\tau).\sin\tau;$$

und hieraus folgt durch Instauriren nach $\tau$:

$$e^x = C.P\vartheta\tau^{s\dot{s}.\cos\tau},$$

$$e^y = C'.P\vartheta\tau^{s\dot{s}.\sin\tau};$$

aus welchen Gleichungen man noch $\tau$ zu eliminiren hat, wenn man zu einer Gleichung für die gesuchte Curve zwischen $x$ und $y$ gelangen will. Z. B. für $s = a\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)$ wird $\overset{*}{s} = \frac{\tau}{\frac{\pi}{2} + \tau}$, also $s\overset{*}{s} = a\tau$, mithin

$$e^x = C.e^{a\sin\tau},$$

$$e^y = C'.e^{-a\cos\tau}.$$

Nimmt man Logarithmen und schreibt weiter $c$, $c'$ statt $lC$, $lC'$, so kommt:

$$x-c= a\sin\tau,$$

$$y-c'=-a\cos\tau;$$

und wenn man quadrirt und addirt:

$$(x-c)^2+(y-c')^2=a^2.$$

VI. Den Bogen $s$ einer ebenen Curve als Funktion des Tangentenwinkels $\tau$ darzustellen.

Seien

$$x=\varphi(\tau),\quad y=\psi(\tau)$$

die Gleichungen der Curve, so dass $\varphi$ und $\psi$ zwei gegebene Funktionen bedeuten, so ist nach dem Vorigen

$$\overset{*}{ss}=\frac{\overset{*}{xx}}{\cos\tau}=\frac{\overset{*}{yy}}{\sin\tau},$$

mithin, wenn man instaurirt:

$$e^s=CP\vartheta\tau^{\frac{\overset{*}{xx}}{\cos\tau}}=CP\vartheta\tau^{\frac{\overset{*}{yy}}{\sin\tau}};$$

wird $s=s_0$ für $\tau=\tau_0$, so erhält man hieraus:

$$e^{s-s_0}=\overset{\tau}{\underset{\tau_0}{P}}\vartheta\tau^{\frac{\overset{*}{xx}}{\cos\tau}}=\overset{\tau}{\underset{\tau_0}{P}}\vartheta\tau^{\frac{\overset{*}{yy}}{\sin\tau}},$$

woraus denn weiter $s$ gefunden wird.

VII. Die Curve zu finden, für welche der Krümmungshalbmesser $\varrho$ eine gegebene Funktion des Tangentenwinkels $\tau$ ist.

Man hat mit Rücksicht auf die Entwickelungen in VI.:

$$\varrho=\frac{ds}{d\tau}=\frac{\overset{*}{ss}}{\tau}=\frac{\overset{*}{xx}}{\tau\cos\tau}=\frac{\overset{*}{yy}}{\tau\sin\tau}=\frac{y.x}{S_t.\tau.\sin\tau},$$

mithin:

$$\overset{*}{xx}=\varrho.\tau\cos\tau,\quad \overset{*}{yy}=\varrho.\tau\sin\tau,$$

$$e^x=C.P\vartheta\tau^{\varrho\tau\cos\tau},\quad e^y=C'.P\vartheta\tau^{\varrho\tau\sin\tau};$$

welches die Gleichungen der gesuchten Curve sind.

VIII. Nach §. 11. stellt die Quotialderivirte der Fläche einer

Curve, welche zwischen zwei Ordinaten, der Abscissenaxe und dem krummen Bogen enthalten ist, das Verhältniss eines Rechtecks aus der Endabscisse und Endordinate zur Fläche selbst dar, d. h. es ist

$$\overset{*}{F} = \frac{xy}{F} \text{ oder } F\overset{*}{F} = xy.$$

Hiemit kann die Aufgabe gelöst werden:

Die Curve zu finden, deren Fläche zum Rechteck $xy$ ein constantes Verhältniss hat. Ist nämlich $\frac{1}{m+1}$ der Werth dieses Verhältnisses, so hat man:

$$\overset{*}{F} = m + 1,$$

also

$$F = C.x^{m+1}$$

und daher

$$xy = (m+1)C.x^{m+1},$$

und also ist

$$y = C.x^m$$

die Gleichung der gesuchten Curve.

Die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf ihre Asymptoten ist

$$xy = k^2,$$

mithin ist für diese Curve

$$F\overset{*}{F} = k^2.$$

Instaurirt man beide Seiten dieser Gleichung, so kommt

$$e^F = C.x^{k^2}.$$

Soll die Fläche für $x = k$ verschwinden, so erhält man

$$1 = C.k^{k^2},$$

und folglich durch Division der vorigen Gleichung durch diese:

$$e^F = \left(\frac{x}{k}\right)^{k^2}.$$

Nimmt man jetzt natürliche Logarithmen, so gelangt man zu dem bekannten Satze, wonach für die Hyperbel

$$F = k^2 . l\left(\frac{x}{k}\right)$$

ist.

IX. In Folge der Betrachtungen des §. 11. erhält man für das Volumen eines Rotationskörpers um die $x$-Axe, wenn $y$ die Ordinate der rotirenden Curve ist,

$$V . \overset{*}{V} = \pi x y^2,$$

so dass also die Quotialderivirte des Volumens das Verhältniss des umschriebenen Cylinders zum Volumen des Körpers darstellt.

Soll also z. B.

$$\overset{*}{V} = m + 1$$

sein, wo $m$ eine Constante bezeichnet, so wird

$$V = C . x^{m+1}$$

und folglich

$$\pi x y^2 = (m+1) C . x^{m+1}$$

oder

$$y^2 = C . x^m$$

die Gleichung der rotirenden Curve.

## §. 20.

### Die Fundamentalprobleme der Bewegung eines Punktes.

Betrachtet man die vier Grössen: die Zeit $t$, den Raum $s$, die Geschwindigkeit $v$ und die beschleunigende Kraft $\varphi$ sämmtlich als Funktionen einer fünften Grösse $\alpha$ und bezeichnet die Differentiationen nach $\alpha$ durch angefügte Accente, so ist

$$v = \frac{s'}{t'}, \quad \varphi = \frac{v'}{t'} = \frac{t's'' - t''s'}{t'} = \frac{vv'}{s'}.$$

Setzt man hierin für $t'$, $s'$, $v'$ ihre Werthe durch die Quotialderivirten $\overset{*}{t}$, $\overset{*}{s}$, $\overset{*}{v}$ ausgedrückt, nämlich

$$t' = \frac{t\overset{*}{t}}{\alpha}, \quad s' = \frac{s\overset{*}{s}}{\alpha}, \quad v' = \frac{v\overset{*}{v}}{\alpha};$$

so erhält man:

$$v = \frac{s}{t}\cdot\frac{\overset{*}{s}}{\overset{*}{t}},\quad \varphi = \frac{v}{t}\cdot\frac{\overset{*}{v}}{\overset{*}{t}} = \frac{v^2}{s}\cdot\frac{\overset{*}{v}}{\overset{*}{s}}.$$

Es sei nun

1) $s = F(t)$ gegeben, so wird, wenn man $\alpha = t$ setzt, wodurch $\overset{*}{t} = 1$ wird:

$$v = \frac{s}{t}\cdot\overset{*}{s} = \frac{F(t)\,.\,\overset{*}{F}(t)}{t},$$

$$\varphi = \frac{v}{t}\cdot\overset{*}{v} = \frac{F(t)\,.\,\overset{*}{F}(t)}{t^2}\,.\,(\overset{*}{F}(t) + \overset{**}{F}(t)).$$

2) $v = F(t)$, so wird unter derselben Annahme $\alpha = t$:

$$s\overset{*}{s} = v\,.\,t = t\,.\,F(t),$$

also, wenn man instaurirt:

$$e^s = CP\vartheta t^{t\,.\,F(t)},$$

wobei $C$ durch den anfänglichen Ort des Punktes bestimmt wird. Die beschleunigende Kraft ist

$$\varphi = \frac{F(t)\,.\,\overset{*}{F}(t)}{t}.$$

3) $\varphi = F(t)$. Man hat dann, $t$ als Independente nehmend,

$$v\overset{*}{v} = \varphi\,.\,t = t\,.\,F(t),$$

mithin

$$e^v = C\,.\,P\vartheta t^{t\,.\,F(t)},$$

wo $C$ durch die Anfangsgeschwindigkeit bestimmt wird. Weiter ist dann

$$s\overset{*}{s} = v\,.\,t,$$

folglich

$$e^s = C'\,.\,P\vartheta t^{v\,.\,t},$$

wobei die neue Constante $C'$ sich durch die Anfangslage des bewegten Punktes bestimmen lässt.

4) $v = F(s)$. Man wähle $s$ zur Independenten, wodurch $\overset{*}{s} = 1$ wird, und erhält dann

$$t.\overset{*}{t} = \frac{s}{v} = \frac{s}{F(s)},$$

also

$$e^t = C.P\vartheta\sigma^{\frac{s}{F(s)}};$$

die Kraft ist

$$\varphi = \frac{v^2}{s}.\overset{*}{v} = \frac{F(s)^2.\overset{*}{F}(s)}{s}.$$

5) $\varphi = F(s)$. Für $\overset{*}{s} = 1$ hat man

$$v^2.\overset{*}{v} = s.\varphi = s.F(s),$$

also

$$e^{\frac{1}{2}v^2} = C.P\vartheta\sigma^{sF(s)},$$

und weiter

$$t.\overset{*}{t} = \frac{s}{v}, \quad e^t = C'.P\vartheta\sigma^{\frac{s}{v}}.$$

6) $\varphi = F(v)$. Setze $\overset{*}{v} = 1$, so wird

$$s\overset{*}{s} = \frac{v^2}{\varphi} = \frac{v^2}{F(v)},$$

also

$$e^s = C.P\vartheta v^{\frac{v^2}{\varphi}},$$

und dann

$$t\overset{*}{t} = \frac{v}{\varphi},$$

also

$$e^t = C'P\vartheta v^{\frac{v}{\varphi}}.$$

Für die gleichförmige Bewegung ist, wenn die Zeit vom Anfange der Bewegung gerechnet wird, $v = \frac{s}{t}$, daher ist der Faktor $\frac{\overset{*}{s}}{\overset{*}{t}}$ die Grösse, welche die spezielle ungleichförmige Bewegung charakterisirt. Für die gleichförmig beschleunigte Bewegung hat man, wenn ausserdem noch die Anfangsgeschwindigkeit Null ist, $\varphi = \frac{v}{t} = \frac{\frac{1}{2}v^2}{s}$, daher unterscheidet der Faktor

$\frac{\overset{*}{v}}{\overset{*}{t}}$ oder $2\frac{\overset{*}{v}}{\overset{*}{s}}$ die besondern Arten **ungleichförmig beschleunigter** Bewegungen.

---

Das Ziel vorliegenden Aufsatzes war, ein Analogon zur Differential- und Integralrechnung aufzustellen und bis zu einem gewissen Grade zu entwickeln. Es wäre leicht gewesen, die hier gegebene Methode von jenen Rechnungsarten vollständig unabhängig darzustellen, allein der Zusammenhang zwischen der Quotialderivirten und dem Differentialquotienten einerseits und dem Instaurale und dem Integrale andererseits lag so nahe, dass er unmittelbar zur Entwickelung des neuen Calculs dienen konnte. Trotz dieses Zusammenhangs wird man übrigens den Inhalt vorliegender Abhandlung nicht für ganz überflüssig halten, und, wie man auch immer darüber denken mag, doch das wenigstens zugeben müssen, dass die eigenthümliche Art der Grössenbildung, zu welcher die Begriffe von Quotial und Instaural Veranlassung geben, näher untersucht zu werden verdient. Der Mechanismus des Quotiirens und Instaurirens ist allerdings identisch mit einer gewissen Art des logarithmischen Differentiirens und Integrirens, allein wenn, wie Jacobi zu sagen pflegte, **die Stärke der Analysis hauptsächlich in der Symbolik besteht**, nämlich darin, dass eine Reihe häufig wiederkehrender Begriffe durch ein Zeichen fixirt wird, mit Hülfe dessen sie als ein neuer zusammengesetzter Begriff in die Untersuchungen eingeführt wird, so wird auch im vorliegenden Falle die Entwickelung der Quotial- und Instauralrechnung zu rechtfertigen sein.

Aus dem hier Mitgetheilten wird der Leser erkennen, was weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand liefern müssen. Zunächst mangeln noch die beiden Sätze, welche den Theoremen von Taylor und Maclaurin entsprechen, und welche wahrscheinlich ein Mittel sein würden, die Funktionen in unendliche Produkte zu verwandeln. Von besonderer Wichtigkeit mögte dann noch sein die independente Darstellung der höheren Quotialderivirten, welche, wie man auf den ersten Blick sieht, mit weit grösseren Schwierigkeiten verknüpft ist, wie die der höheren Differentialquotienten und auch nicht unmittelbar auf diese reducirt werden kann. Endlich wäre eine weitere Ausbildung der Quotialgleichungen, die Instauration derselben und die Integration von Differentialgleichungen durch Instaurale nicht ohne Interesse.

Was die Verwandtschaft der Funktionen unter einander betrifft, welche durch die Quotiation und Instauration, ebenso wie durch die Differentiation und Integration, begründet wird, so mögen hierüber noch folgende geringe Andeutungen Platz finden.

Die Funktion, welche mit ihrem Quotiallogarithmus identisch ist, also der Gleichung genügt:

$$f(x) = \overset{*}{f}(x)$$

ist

$$f(x) = (1 . x^{-1})^{-1}.$$

Sie entspricht also der Funktion $e^x$ in der Differentialrechnung. — In der Integralrechnung wird die Gleichung

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

für $m = -1$ illusorisch, das Integral ist in diesem Falle $lx + C$; der analoge Fall tritt in der Instauralrechnung bei der Gleichung

$$P\vartheta x^{x^m} = C . e^{(x^m)}$$

für $m = 0$ ein, das Instaural ist in diesem Falle $C . x$.

Die Funktion, deren Quotialderivirte dem Differentialquotienten derselben Funktion gleich ist, ist $f(x) = x$; diejenige, deren Instaural gleich ihrem Integrale, ist aber $f(x) = 1$, wenn von den Constanten abgesehen wird, welche durch die Operationen des Instaurirens und Integrirens eingeführt werden.

## II.

## Der Zufall in den Naturwissenschaften. Vortrag gehalten bei der feierlichen Sitzung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien am 30. Mai 1854

von

Seiner Excellenz dem Herrn Präsidenten der Akademie,

Dr. *Andreas* Ritter *v. Baumgartner* *).

---

Hochansehnliche Versammlung!

Gleichwie der Herbst jedes Jahr wiederkehrt und von der Productionskraft des Frühlings und Sommers Rechenschaft gibt, ebenso hat auch die kaiserliche Akademie der Wissenschaften nach ihren Statuten alljährlich den Ausweis zu liefern, was sie geleistet und wie sie den Schutz und die Unterstützung des Staates zu verdienen gesucht habe.

Den Rechenschaftsbericht werden Sie, hochansehnliche Herren,

---

*) Die folgende Rede, deren Zweck und hochverehrter Verfasser aus ihrer Ueberschrift ersichtlich sind, halte ich für in allen Beziehungen in so hohem Grade interessant und lehrreich und der weitesten Verbreitung so überaus werth, dass ich glaube, einigen Dank aller Leser des Archivs zu verdienen, wenn ich ihnen dieselbe im Folgenden mittheile. Ich entlehne sie aus dem Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (zu Wien). Fünfter Jahrgang. 1855. Wien. S. 53—S. 76. Ihr von mir und allen Mathematikern und Physikern hochverehrter Verfasser, Herr Minister v. Baumgartner Excellenz, hat sich durch dieselbe jedenfalls ein sehr grosses Verdienst sowohl in allgemein wissenschaftlicher, als auch namentlich in historischer Beziehung erworben. Der Herausgeber.

aus dem Munde des General-Secretärs vernehmen, mir aber wollen Sie eine kurze Aufmerksamkeit schenken, wenn ich den Stoff meiner Rede nicht aus der jüngsten Zeit, sondern zum Theile aus der ferneren Vorzeit herhole.

„Wem die heiligen Todten gleichgültig sind", sagt J. P. Richter, „dem werden es auch die Lebendigen". Von dieser Wahrheit durchdrungen, hat es mir nie gefallen wollen, dass die Geschichtschreiber der Naturwissenschaften dem Lebenslaufe der Männer, welche für Erweiterung der Wissenschaften mit besonderem Erfolge gewirkt haben, so wenig Aufmerksamkeit schenken, und fast immer unterlassen, zu erwähnen, welche Umstände denselben die segensreiche Richtung gegeben und sie auf die Spur ihrer Entdeckungen und Erfindungen geführt haben. Namentlich bleibt ein Gehülfe fast immer unerwähnt, der doch nicht selten einem hervorragenden Talente den Weg gewiesen, den es so erfolgreich betreten hat, ich meine — den Zufall.

Erlauben Sie daher, hochansehnliche Herren, dass ich diese Unbilligkeit in Etwas gut mache und heraushebe, wie einige der hervorragendsten Männer der Naturwissenschaften diesem treuen Alliirten der menschlichen Bestrebungen ihre geistige Richtung verdanken, und wie durch ihn die grössten Entdeckungen angebahnt worden sind.

Das erste Zufällige im Leben eines Menschen ist die Zeit seiner Geburt. Was aus einem neugeborenen Kinde einst werden wird, hängt nicht allein von der Beschaffenheit seines Organismus und der Sorgfalt seiner Erzieher, sondern vielmehr von den herrschenden Zeitverhältnissen ab. Die Bestrebungen des Menschen tragen in der Regel das Gepräge der Zeit an sich, in der er lebt und wirkt; nur besonders Auserwählten ist es gegeben, dieses Gepräge zu verwischen und der Zeit selbst den Stempel ihres Geistes aufzudrücken, aber auch dieses nur dann, wenn die Zeit dazu gehörig vorbereitet oder selbst charakterlos ist. Gilt dieses schon im Allgemeinen, so ist es noch viel mehr bei wissenschaftlichen Bestrebungen der Fall. Die Stimme eines Gelehrten muss immer und überall durch den Wiederhall der Zeit verstärkt werden, und wo die Verhältnisse einem solchen geistigen Echo nicht günstig sind, bleibt sie eine Stimme in der Wüste. Die mystischen, unklaren und in den Fesseln der Vorzeit liegenden wissenschaftlichen Bestrebungen des 15. Jahrhunderts liessen das Wort Leonardo's da Vinci, der schon zu seiner Zeit einen bedächtigen, an der Hand der Erfahrung fortschreitenden Gang bei naturwissenschaftlichen Forschungen gepredigt hatte, ungehört verhallen. Vergebens rief dieser gelehrte Mann seinen Zeitgenossen

zu: das Experiment ist der Erklärer der Kunstgriffe der Natur; wir müssen, um die Phänomene der Natur zu erklären, vom Experimente anfangen, durch dasselbe uns bestreben, allgemeine Principien zu entdecken, wenn auch die Natur selbst den entgegengesetzten Gang nimmt, mit den Schlüssen anfängt und mit dem Experimente endigt. Als aber Baco von Verulam ein Jahrhundert später dasselbe lehrte, ward es begierig aufgenommen und zum Leitstern bei allen naturwissenschaftlichen Arbeiten gewählt.

Die menschlichen Ideen befruchten sich gegenseitig, und eine wird unversehens Mutter und Tochter einer andern; darum ist es keineswegs gleichgültig, ob ein mit grossen Geistesgaben ausgerüsteter Mann zu einer Zeit lebt, wo er meilenweit keinen Fachgenossen antrifft und in der kleinsten wissenschaftlichen Angelegenheit dem gesprochenen Worte das geschriebene substituiren muss, ob zu seiner Zeit Postverbindungen selten waren, oder ob gute Strassen oder gar Eisenbahnen die Entfernungen abkürzen und dem geschriebenen Worte Flügel verleihen.

Laplace konnte sich mit seinen Collegen in derselben Stadt besprechen, Leibnitz konnte mit Huyghens nur schriftlich verkehren, und obgleich die Distanz seines Wohnortes Hannover, von dem Aufenthaltsorte Huyghens, Haag, nicht gross genannt werden kann, durfte er doch auf eine schriftliche Antwort erst nach Monatsfrist rechnen.

Naturwissenschaftliche Forschungen, die nicht in blossen Speculationen bestehen, bedürfen mehrfacher materieller Behelfe, und wo solche noch selten und theuer sind, muss auf deren Mithilfe oft Verzicht geleistet werden.

Was würden Kopernicus, Tycho de Brahe, Regiomontanus und Kepler geleistet haben, wenn ihnen, wie den Astronomen unserer Zeitperiode, Uhren, Fernröhre und genaue Mess-Instrumente zu Gebote gestanden wären. Es ist daher kein Wunder, dass Kopernicus 30 Jahre brauchte, um sein Werk über den Umlauf der Planeten zu Stande zu bringen, dass Tycho de Brahe an den Rudolphischen Tafeln 38 Jahre arbeitete, dass Kepler in einem Briefe an die Stände Ober-Oesterreichs, in welchem er sich entschuldigte, dass er mit seiner Karte des Landes nicht schneller zu Stande gekommen, sagte: „Ich hab mich gmaniglich an Jeden Ort, da es eine Kirch, mesner und Aigen hatt, einen Tag zu säumen gehabt, biß Ich die Kirch besehen, einen erfahrnen Inwohner bekommen, Inn umb die glegenhaitt der umbligenden Oerter gnugsamlich außgefragt. Kainer hatt mir nichts vergebens gethan, sondern so lang antwort geben, als er zu trinckhen gehabt, oder sonsten nit unwillig oder betäubt worden ist.“

Hieraus wird es einleuchtend, dass in den Zeitverhältnissen die Bedingungen gelegen sind, unter denen die Männer der Wissenschaft heranwachsen und sich vermehren. Im 11., 12. und 13. Jahrhunderte glänzte nur hie und da Einer am wissenschaftlichen Horizont; im 14. und 15. Säculum wurden dann schon mehrere sichtbar; im 16. und 17. Jahrhundert erblickte schon wenigstens jedes Jahrzehent ein wissenschaftliches Genie das Licht der Welt, darunter aber wahre Riesengestalten, die noch jetzt Gegenstand der Bewunderung der Welt sind, wie: Tycho de Brahe, Baco von Verulam, Galilei, Kepler, Cartesius, Huyghens, Leibnitz, Newton. Im 18. Jahrhunderte reicht für die Geburt eines hervorragenden Talentes ein weit weniger umfassender Massstab nicht mehr aus, ja es genügt kaum ein solcher von einem Jahre: Leonhard Euler und Linné, Pristley und W. Herschel, Watt und Lichtenberg, Lagrange, Galvani und Guyton Morveau, Klaproth und Haüy, Laplace und Delambre, Cuvier und Th. Young, Thenard, Gay-Lussac und Gauss kamen in demselben Jahre zur Welt, und die in diesem Säculum gleichzeitig lebenden Männer, welche die Welt mit ihren Lehren erfüllen, gleichen der Milchstrasse am Firmamente, wo manches selbstleuchtende Gestirn nur darum zum matten Schimmer herabsinkt, weil es von noch stärker strahlenden umgeben ist.

Diese geistige Entwickelung des Menschengeschlechtes fällt mit anderen merkwürdigen Erscheinungen zusammen. So lange nämlich die Bewegung der Erde durch die aristotelische Philosophie und durch Missverständnisse anderer Art gehindert war, und der Himmel in seiner Bewegung Alles mit sich fortriss, stand die Wissenschaft überhaupt still, und erst als Kopernicus der Erde ihre Bewegung gab und dem Himmel Stillstand gebot, begann die menschliche Wissenschaft fortzuschreiten. Will man alles Dieses auch als ein zufälliges Zusammentreffen ansehen, so ist es doch nicht der Zufall allein, der hier eine Rolle spielt, es hat aber dieser unheimliche Gehülfe in vielen anderen Beziehungen einen mächtigen Antheil am Leben überhaupt, an der Richtung und den Leistungen der Männer insbesondere, die hier als Werkzeuge der Vorsehung zu wirken bestimmt waren.

Nur in seltenen Fällen kamen diese Männer unter Umständen zur Welt, die ihrer Entwickelung günstig waren. Der grosse Newton war eine frühzeitige Geburt und so klein, dass man ihn, wie seine Mutter sagte, in einem Viertelskrug hätte verbergen können; der Mathematiker d'Alembert ward nach seiner Geburt ausgesetzt und es musste sich seiner eine arme Glasers-

frau annehmen, damit er nicht Hungers stürbe; Watt, der Erfinder der Dampfmaschine, war in seiner Jugend von so schwächlicher Constitution, dass er oft lange Zeit das Zimmer hüten musste und nicht einmal eine Schule besuchen konnte; Fresnel konnte in seinem achten Jahre noch kaum lesen; Wilhelm Herschel erlernte in seiner Jugend blos Musik, und nur die Begierde, die mathematische Begründung dieser Kunst kennen zu lernen, führte ihn zum Studium der Mathematik und dadurch zu jenem der Astronomie. Galilei sollte Wollhändler werden; Lambert war zum Schneider bestimmt, Humphry Davy zum Apotheker, Faraday zum Buchbinder, dann zum Buchhändler; Kepler, Boyle, Bergmann, Pristley sollten Geistliche werden, Cartesius, Arago, Biot, Fourier Soldaten. Der Genosse unserer Zeit, Jos. Fraunhofer, ward Glasschleiferlehrling; nur der Umstand, dass das Haus, in welchem er lebte, zusammenstürzte, den Knaben mit seinem Schutt bedeckte, und dass er in Gegenwart des Königs Max I. lebend daraus hervorgezogen und beschenkt wurde, gab Veranlassung zu der Wendung seines Schicksals, das ihn zum weltberühmten Manne und zur grossen Stütze der Wissenschaft machte.

Auf ähnliche zufällige Ereignisse deutet die Lebensgeschichte vieler anderer Männer hin. Erlauben Sie, dass ich aus den historischen Schätzen der im Reiche der exacten Wissenschaften besonders ausgezeichneten Namen, welche den Franzosen, Italienern, Deutschen, Engländern und Nordamerikanern angehören, wenigstens je einen Mann heraushebe.

Cartesius verdankte seine frühe Berühmtheit, die auf sein weiteres Leben von grossem Einflusse war, einem sonderbaren Umstande. Er sah, als er Soldat und 20 Jahre alt war, an einer Mauer einen in flamändischer Sprache geschriebenen Anschlagzettel, dessen Inhalt er zu erfahren wünschte; da er aber dieser Sprache nicht kundig war, so ersuchte er einen der Vorbeigehenden, ihm den Inhalt des Zettels zu erklären. Derselbe enthielt ein mathematisches Problem und die Aufforderung an die ganze Welt, es zu lösen. Der um die Uebersetzung gebetene Vorübergehende war aber Professor Beckmann, und dieser forderte, nachdem er dem jungen Krieger den Sinn der Ankündigung erklärt hatte, denselben scherzhaft auf, das Problem zu lösen. Der junge Mann liess sich dieses nicht umsonst gesagt sein und überbrachte dem Professor in kurzer Zeit die Lösung des Problems. Dadurch ward Cartesius Beckmann's Freund und trat mit demselben in einen lebhaften wissenschaftlichen Briefwechsel, aus dem nachher wichtige Fortschritte der Wissenschaft hervorgingen.

Galilei, der Sohn eines vermögenslosen italienischen Adeligen und an dem Tage geboren, an welchem Michael Angelo Buonarotti starb, wurde durch einen besonderen Zufall zum Studium der Mathematik hingeführt. Er wollte nämlich erst den Abt Ostilio Ricci gerade zur Zeit, als er den Pagen des Herzogs von Florenz in Pisa Unterricht gab, besuchen. Kein Fremder durfte in den Saal während der Dauer des Unterrichtes eintreten. Der Knabe Galilei wollte aber erfahren, was daselbst geschehe und horchte darum an der Thür. Das, was er vernahm, gefiel ihm so gut, dass er oft dahin wiederkehrte und diese eigenthümliche Art des Zuhörens zwei Monate lang fortsetzte. Er wollte sich aber auch ausser den Lehrstunden mit der Mathematik beschäftigen und kaufte sich zu diesem Behufe einen Euclid. Unter dem Vorwande, sich von Ricci die Lösung einer schwierigen Stelle zu erbitten, begab er sich zu ihm und erzählte, auf welche Weise er den ersten Unterricht genossen habe. Dieser Eifer gefiel Ricci und vermochte ihn, Galilei einzuladen, sein offener Schüler zu werden, und ihm einen Archimedes zu schenken. Dieser Mathematiker gefiel dem jungen Schüler so gut, dass er ihn zum Führer seines Lebens erkor, und später öfters zu sagen pflegte: „Wer diesem folgt, kann kühnlich auf der Erde und im Himmel dahin schreiten."

Galilei hat seine schönsten Tage als Lehrer der Mathematik in Padua verlebt. Da war es, wo er mehrere seiner berühmtesten Schriften verfasste, wo er den Proportionalzirkel, das Thermometer, das seinen Namen führende Fernrohr erfand, wo er seine Entdeckungen am Monde machte, die Satelliten des Jupiters, die wechselnden Lichtgestalten der Venus entdeckte und die Milchstrasse als ein Aggregat kleiner Sterne erkannte; hier drängten sich Prinzen und Grosse der Erde, um seine Vorträge zu hören, hier erlangte er auch zuerst ein zur selbsständigen Existenz hinreichendes Einkommen. Es war aber nur ein Zufall, der ihn nach Padua brachte. Galilei war nämlich zwar schon in einem Alter von 25 Jahren Professor der Mathematik zu Pisa, genoss aber nur einen Gehalt von 60 Thalern. Da ward ihm die Aufgabe, eine Maschine zu beurtheilen, die Johann von Medicis, ein natürlicher Sohn Cosmus' I., zum Reinigen des Hafens von Livorno erfunden hatte. Galilei fand an diesem Apparate mehrere Mängel und scheute sich nicht, dieselben offen darzulegen. Dieses verdross aber den Erfinder, der sich für einen grossen Architekten und Mathematiker hielt, er beklagte sich darüber beim Grossherzoge, und da überdies auch alle Peripatetiker Galilei's Feinde waren, so stand er auf dem Punkte, fortgeschickt zu werden. Um diesem zu entgehen, begab er sich nach Florenz und

suchte ein anderes Unterkommen, welches er nun mit Unterstützung des Marquis del Monte als Professor in Padua erhielt. Er begab sich im Sommer 1593 nach Venedig, um die neue Lehrkanzel anzutreten. Alle seine Habseligkeiten fasste ein kaum 100 Pfund schwerer Koffer. Sein Gehalt ward mit 300 fl. festgesetzt, aber seine Anstellung war eine blos zeitweilige. Als er aber sein Fernrohr erfunden und dem erstaunten Senate vom Markusthurme in Venedig aus die Wirkungen desselben gezeigt hatte, ward seine Anstellung zur permanenten erklärt und sein Gehalt auf 1000 fl. C.-M. erhöht.

Eine nicht minder einflussreiche, wenn auch ganz verschiedene Rolle spielte der Zufall im Leben eines Zeitgenossen Galilei's, der nicht aufhören wird, Gegenstand der Bewunderung zu sein, nämlich unseres Landsmannes Kepler. Dieser war der Sohn eines Gastwirthes in einem würtembergischen Dorfe und in seiner ersten Erziehung sehr vernachlässigt. Nach seines Vaters Tode schickte man ihn in die Klosterschule zu Maulbrunn, wo er einen Lehrer Namens Möstlin hatte, der dem Kopernicanischen System anhing. Dieser machte in dem Jünglinge die Begierde rege, jenes System kennen zu lernen, und zu diesem Ende Mathematik zu studiren. Der sorglose Jüngling ahnte damals nicht, dass er einst von dieser Wissenschaft seinen Lebensunterhalt werde ziehen müssen. Aus der Klosterschule wurde er nach Tübingen gesendet, um dort Theologie zu studiren. Allein aus einer etwas freisinnigen Arbeit wollte man erkennen, dass er zum geistlichen Stande nicht tauge, und sprach in einem Zeugnisse, das er bei seinem Abgange von Tübingen erhielt, diese Untauglichkeit förmlich aus. Da man aber seinem rednerischen Talente die Anerkennung nicht versagte, so wurde er den steiermärkischen Ständen als Lehrer der Mathematik und Moral empfohlen, und so kam dieser Mann, der einst so berühmt werden sollte, in die österreichischen Staaten. Von Steiermark vertrieben, ward er vom Kaiser Rudolf II. zum Hülfsarbeiter, Behufs der Verbesserung der Rudolphischen Tafeln, berufen, und endlich nach Tycho de Brahe's Tode zum kaiserlichen Mathematiker ernannt, wo sein Hauptgeschäft in der Verbesserung der astronomischen Tafeln bestand. Hier entdeckte er die seinen unsterblichen Namen führenden Gesetze der Planetenbewegungen, jedoch auf einem ganz eigenthümlichen, vom Zufalle wesentlich unterstützten Wege. Kepler litt an der Krankheit seiner Zeit, die mehr das Mystische und Blendende, als das Einfache und Klare, mehr das Wunderbare als das Wahre suchte, einer Zeit, wo man Poesie der Wissenschaften für Philosophie hielt. Er beschäftigte sich demnach viel mit der Geheimnisslehre der Zahlen und in diesem Bestreben wollte er auch einen

Zusammenhang zwischen den regulären Körpern der Geometrie und den Planetenbahnen nachweisen. Der Zufall unterstützte ihn hierin; denn es waren damals gerade so viel Planeten bekannt, als es regelmässige geometrische Körper gibt, und es galt nun, eine Relation zwischen den Halbmessern der Planetenbahnen und jenen der um die regelmässigen Körper beschriebenen Kugelflächen nachzuweisen. Der mystische Geist Kepler's fand Mittel, dieses zu leisten: Beschreibt man, sagt er, in die Erdkugel ein Ikosaeder und in dieses eine zweite Kugel, dann in diese ein Octaeder und darein wieder eine Kugel, so stellen die Halbmesser der beiden eingeschriebenen Kugeln zugleich die Radien der Bahnen der untern Planeten, nämlich der Venus und des Merkur vor. Wird um die Erdkugel ein Dodekaeder beschrieben, um dieses eine zweite Kugel, so hat diese denselben Durchmesser wie die Bahn des Mars. Beschreibt man um diese Kugel ein Tetraeder, um das Tetraeder eine andere Kugel, so stellt diese die Bahn des Jupiter vor. Wird endlich um die letztgenannte Kugel ein Würfel beschrieben und um diesen abermals eine Kugel, so hat man an dieser das Bild der Saturnbahn. Die Planetenbahnen, wie selbe nach den damals möglichen ungenauen Beobachtungen bekannt waren, entsprachen der besagten Regel so ziemlich, die Abweichungen sollten sich eben, da Kepler die harmonische Zusammenstimmung aller Gestalten für eine ausgemachte Sache hielt, dadurch erklären lassen, dass die Planetenbahnen nicht ganz kreisförmig seien. Es musste daher Kepler diese Abweichung von der Kreisform bestimmen, und dieses führte ihn zunächst zur Entdeckung seines ersten Gesetzes, und im weiteren Verlaufe zu den zwei anderen. Wir verdanken daher dem Zufalle, dass zu Kepler's Zeiten nur fünf Planeten bekannt und dass ihre Bahnen nicht scharf beobachtet waren, den grössten Fortschritt, welchen unsere Kenntniss vom Planetensysteme je gemacht hat.

Kepler starb 10 Jahre vor Galilei. Dieser war darum in seinem letzten Lebensjahre sehr besorgt, dass nach seinem Hintritte das geliebte Kind seines Geistes verwaiset sein werde. Allein die Vorsehung sorgt für die Wissenschaft nicht minder, als für den Menschen selbst; denn nicht ein volles Jahr vor Galilei's Hintritt erblickte der Mann das Licht der Welt, der die neugeschaffene Wissenschaft in seine Pflege nahm und sie zur Volljährigkeit heranzog.

Dieser Mann war Newton, der grosse Sterbliche, an dessen Grabstätte man heute noch lesen kann: Gratulentur sibi mortales, tale tantumque exstitisse generis humani decus. Er war in seinem Knabenalter nicht sonderlich thätig und gab wenig Hoffnung,

dass er es zu etwas Rechtem bringen werde. In der Schule nahm er nur einen der untersten Plätze ein. Aber eben dieser Umstand führte es herbei, dass er zur grösseren Thätigkeit angespornt wurde. Ein Schulgenosse, der ihm im Range vorging und daher hinter ihm sass, war auch körperlich sehr rührig und stiess den jungen Newton oft mit den Füssen. Einst versetzte er ihm aber einen Stoss, der ihm grosse Schmerzen verursachte. Da erwachte in Newton der Vorsatz, durch Fleiss und Anstrengung seinem unruhigen Nachbar vorzugehen, und dieser Vorsatz ward in kurzem so sehr zur That, dass Newton bald der Erste in der Schule und endlich die Zierde des Menschengeschlechtes — decus generis humani — wurde.

Kepler, Galilei und Newton haben die mechanische Naturwissenschaft geschaffen, gleichsam den Himmel erobert: ein anderer grosser Mann hat aber dem Himmel das Feuer entrissen — coelo eripuit fulmen — dieser war Benjamin Franklin. Auch auf das Leben dieses Mannes hatte der Zufall grossen Einfluss.

Franklin war das fünfte Kind eines mit 17 Sprösslingen gesegneten Seidenfärbers und später Kerzenziehers in Boston. Sein Vater konnte ihn der Kosten wegen nicht ein volles Jahr in die Schule schicken. Ein Ereigniss, das sich in seinem zehnten Jahre zutrug, hatte, wie er selbst erzählt, auf sein ganzes Leben den grössten Einfluss. Er besass nämlich einmal an einem Festtage einiges Geld und wollte dafür Spielzeug kaufen. Auf dem Wege traf er einen Knaben, der eine Pfeife hatte, deren Ton dem jungen Franklin sehr gefiel. Er bot dafür alles Geld, das er besass. Das Anbot ward angenommen. Franklin ward Eigenthümer der Pfeife, brachte dieselbe nach Hause und in der Freude seines Herzens belästigte er mit ihrem schrillen Tone Alles um sich her. Man fragte, was er für dieses lästige Instrument gegeben habe, und als er erzählt hatte, um welchen Preis er dazu gekommen, machte man ihm begreiflich, dass er zehnmal mehr dafür gegeben habe, als es werth sei, und zählte ihm auf, was er alles für das ausgegebene Geld hätte erhalten können. Dadurch ward der Knabe nachdenkend, er fasste den Vorsatz, wenn in der Folge wieder der Wunsch nach irgend einem Besitze in ihm erwachen sollte, sich fleissig an die Pfeife erinnern zu wollen. In der That pflegte Franklin, als er zum Manne herangereift war und als Gelehrter und Staatsmann zu wirken hatte, bei jeder Unternehmung sich zu sagen: „Kauf' die Pfeife nicht zu theuer." Die Nähe des Meeres machte in dem jungen Franklin den Wunsch rege, Marinär zu werden; aber sein Vater war demselben entgegen und führte das Söhnchen, um es von seinem Vorhaben abzubrin-

gen, in die Werkstätte von Tischlern, Glasern, Drechslern etc. in der Hoffnung, der Knabe werde für einen der Erwerbszweige Vorliebe gewinnen. Dieser war aber überall aufmerksamer Beobachter, und um ja nicht wieder für eine Pfeife zu viel zu geben, lernte er die Werkzeuge aller dieser Professionen kennen und handhaben. So kam es, dass er in den Stand gesetzt wurde, sich später als Physiker seine Apparate selbst zu machen, und dass er oft zu sagen pflegte: „Ein rechter Physiker müsse mit der Säge bohren, und mit dem Bohrer sägen können."

Der Zufall hat aber nicht allein manchen berühmten Männern der Wissenschaft die Richtung gegeben, sondern nicht selten auch den Forschern ungesuchte Schätze in die Hand gespielt. Die Geschichte der exacten Wissenschaften ist überreich an Belegen für diese Behauptung. Ich will Ihre Geduld, hochansehnliche Herren, nicht mit der Aufzählung unzusammenhängender zufälliger Entdeckungen und Erfindungen ermüden, kann mir aber nicht versagen, mir noch auf wenige Augenblicke Ihre Aufmerksamkeit zum Begleiter zu erbitten, um ein zusammenhängendes Gebiet der Wissenschaft zu durchwandern, das der Zufall recht eigentlich zu seinem Reiche auserkoren zu haben scheint. Es ist dieses das Gebiet der Elektricität.

Ohne Zweifel war es der Zufall, der die Eigenschaft des Bernsteins, von dem diese Lehre den Namen führt, im geriebenen Zustande leichte Körper anzuziehen, kennen gelehrt und dadurch den Grundstein zu einem der interessantesten Zweige des menschlichen Wissens gelegt hatte. Beim weiteren Fortbaue auf diesem Grunde hat wohl die Macht des Zufalls nicht weniger gewaltet, und es ist das elektrische Licht, das Knistern beim Uebergange desselben von einem Körper zum andern, das Dasein von guten und schlechten Leitern, von zwei verschiedenen elektrischen Zuständen etc. auf diesem Wege zu unserer Kenntniss gekommen. Aber die erste, besonders wichtige, durch Zufall gemachte Erfindung war jene der Leidnerflasche im Jahre 1747. Man hatte nämlich die Erfahrung gemacht, dass ein elektrischer Körper in der Luft seine Elektricität bald verliere, weil die Luft gute Leiter enthalte, und glaubte daher, dass ein Körper, wenn er von schlechten Leitern umgeben wird, mehr Elektricität aufnehme und dieselbe länger behalte. Dieses müsse daher bei Wasser der Fall sein, das sich in einem gläsernen Gefässe befindet. Man leitete demnach solchem Wasser mittelst eines Metalldrathes vom Conductor einer Elektrisirmaschine Elektricität zu und untersuchte die von ersterem aufgenommene Menge derselben. Allein man konnte nichts Auffallendes bemerken, und war nahe daran, die Sache

ganz aufzugeben, als zufällig einer der beim Versuche Gegenwärtigen die Flasche in die Hand nahm und mit der anderen die Verbindung zwischen dem Wasser und der Elektrisirmaschine aufheben wollte, und einen tüchtigen Stoss bekam. Das machte nun grosses Aufsehen und man war von allen Seiten begierig, den Versuch selbst anzustellen, um dann zu berichten, was man ausgestanden habe. Könnte man diesen Versuch nicht jeden Augenblick von Neuem anstellen, so müsste man in der That nach den Beschreibungen und Nachrichten der damaligen Zeit glauben, eine Leidnerflasche sei eine wahre Höllenmaschine und Jeder, der eine solche entlade, ein Wagehals.

Muschenbröck erzählt, er habe einen so heftigen Stoss erhalten, dass er den Athem verlor und zwei Tage gebraucht habe, um sich vom Schrecken zu erholen, er wolle nicht um ganz Frankreich diesen Versuch zum zweiten Male an sich machen. Der gleichzeitig lebende Physiker Winkler will aus derselben Ursache starke Convulsionen am ganzen Körper empfunden haben, sein Blut sei in Wallung gekommen, so dass er ein hitziges Fieber befürchtete und kühlende Arzenei nehmen musste; sein Kopf sei ihm schwer geworden, als hätte er einen Stein darin, und er habe Nasenbluten bekommen, woran er sonst nie gelitten. Ungeachtet solcher Schilderung konnte doch die Frau dieses Physikers ihre Neugierde nicht bezähmen, machte den Versuch an sich und fand sich hierauf so schwach, dass sie kaum gehen konnte; aber nach acht Tagen wiederholte sie das Experiment doch wieder, zog sich dadurch aber nur Nasenbluten zu. Hieraus mögen Historiker lernen, wie Schilderungen ungewöhnlicher Erscheinungen aufzunehmen seien.

Man hatte zwar schon im Jahre 1733 das Gesetz zweier Elektricitäten entdeckt und dieselben Glas- und Harz-Elektricität, später aber positive und unpositive Elektricitäten genannt; man erklärte sie jedoch blos aus einem verschiedenen Verhalten der elektrischen Körper in Bezug auf Anziehung und Abstossung.

Der Zufall wollte aber, dass man diese Zustände sichtbar darzustellen in den Stand gesetzt wurde. Als nämlich Volta den von Wilke erfundenen Elektrophor unter die elektrischen Apparate eingeführt hatte, beschäftigten sich viele Physiker mit diesem merkwürdigen Werkzeuge. Unter diese gehörte auch Lichtenberg. Er construirte einen Elektrophor von 6 Fuss Durchmesser. Der Harzstaub, der sich beim Glätten und Poliren des Kuchens in seinem Arbeitszimmer verbreitet hatte, legte sich an Möbel und Bücher an, war durch den Luftzug fortgerissen und setzte sich dann wieder langsam zu Boden. Einst war über Nacht der Deckel

vom Kuchen abgehoben und beide erschienen, als Lichtenberg des Morgens in's Zimmer trat, mit feinem Staub überzogen. Allein dieser Ueberzug sah am Deckel ganz anders aus, als am Kuchen. Während ersterer ganz gleichförmig bestäubt erschien, bildete der Staub auf letzterem regelmässige Figuren, ähnlich jenen der überfrorenen Fenstertafeln, und es traten Sterne wie Milchstrassen, Sonnen und andere strahlige Gebilde hervor. Wenn man den Staub wegfegte und den Kuchen von Neuem bestäubte, erschienen die Figuren nur noch deutlicher und schöner. Der scharfsinnige Mann erkannte bald, dass die Stellen, wo diese Figuren erschienen, elektrisch waren, und wurde somit der Entdecker der seinen Namen führenden Figuren, durch welche die zwei entgegengesetzten elektrischen Zustände sichtbar dargestellt werden können.

In der ersten Zeit beschränkte sich die Elektricitätslehre auf die Studirstube der Gelehrten und auf die Säle der Neugierigen; höchstens in der Heilkunst machte man von der Elektricität einige zum Theil ganz sinnlose Anwendungen. Bald aber sollte dieses Agens als eine mächtige Kraft im Haushalte der Natur erkannt werden und eine der nützlichsten Anwendungen finden. Auch hier war der Zufall thätig. Man hatte nämlich schon bei den ersten elektrischen Versuchen eine Aehnlichkeit zwischen unserer Elektricität und dem in den Gewitterwolken thätigen Agens vermuthet. Als aber die Leidnerflasche entdeckt war und man mittelst des Entladungsstromes brennbare Körper anzünden, Metalle schmelzen und verflüchtigen und Thiere tödten konnte, blieb über diese Relation kein Zweifel mehr übrig. Franklin hat sie zuerst thatsächlich erwiesen. Er wollte auf einem Thurme in Boston eine spitzige eiserne Stange errichten und durch dieselbe den Blitz unmerklich in die Erde ableiten, aber sein praktischer Sinn verfiel bald auf ein viel einfacheres Mittel, auf den Drachen, mit welchem Knaben schon damals zu spielen pflegten. Er versah einen solchen Drachen mit einem metallenen Stifte und benützte die erste Gelegenheit, als eine Gewitterwolke heranzog, ihn steigen zu lassen. Der Drache stieg, die Gewitterwolke zog heran, aber die Schnur, welche Franklin in der Hand hielt, zeigte keine Spur von Elektricität. Franklin besorgte schon, seinen Versuch vergebens angestellt zu haben, als ein feiner Regen fiel, die Schnur befeuchtete und sie dadurch leitender machte. In diesem Augenblicke divergirten die Fasern der Hanfschnur und als Franklin den Knöchel des Fingers in deren Nähe brachte, schlugen sogar Funken in denselben über. Franklin war vor Freude ausser sich. Wäre der Regen ausgeblieben, so wäre wohl diese Freude zu Wasser geworden; wäre es ein starker geworden, so hätte Franklin leicht seine Lernbegierde mit dem Leben be-

zahlen können, wie dieses einige Jahre später mit Richmann in Petersburg der Fall war.

Der eben erwähnte Versuch hatte Franklin auf die Erfindung der Blitzableiter geführt, einen Apparat, der es dem Menschen eben so leicht macht, ein Gebäude vor Blitzschlägen zu sichern, als man sich vor Regen schützt, indem eigentlich mehr Kunst dazu gehört, einen guten Regenschirm zu machen, als einen guten Blitzableiter zu Stande zu bringen. Diese Entdeckung ward von Vielen begierig aufgenommen und in Anwendung gebracht, von Andern aber als ein Eingriff in die Plane der Vorsehung angesehen und als ketzerisch verschrieen. Besonders in Italien, wo sie doch wegen der vielen und gefährlichen Gewitter von vorzüglichem Nutzen sein sollte, hatte man ein grosses Vorurtheil gegen dieselbe, und nannte die metallenen Stangen, welche einen wesentlichen Theil derselben ausmachen, Ketzerstangen. Dieses Vorurtheil half ein Zufall zerstreuen, wie aus einem Schreiben des Professors Pistoni an den Abt Rozier vom Jahre 1779 zu entnehmen ist. Die Kirche des hochgelegenen Siena wurde nämlich oft vom Blitze getroffen und dadurch beständiger Reparaturen bedürftig. Dieses bestimmte den Vorsteher der dortigen Kathedrale den Glockenthurm der Kirche mit Blitzableitern zu versehen, worüber einige Bewohner dieser Stadt gewaltig die Köpfe schüttelten. Am 18. April 1777, um 6 Uhr Abends, rückte nun ein Gewitter heran, wobei es heftig regnete und stürmte. Die Bewohner der an dem Platze, wo die Kirche stand, befindlichen Häuser kamen aus denselben hervor, um zu sehen, wie sich die Ketzerstangen bewähren würden. Und siehe! da erfolgt ein heftiger Donnerschlag und der Blitz fährt in Gestalt einer purpurnen Kugel auf die Stange des Ableiters, läuft längs der Leitung herab und verliert sich in einem kleinen nahen Wasser, wohin die Ableitung geführt worden. Als das Gewitter vorüber war, wurde der Thurm untersucht und ganz unverletzt gefunden, nicht einmal die Spinnengewebe, welche hie und da zwischen der Ableitung und der Mauer gespannt waren, zeigten eine Verletzung. Man kann sich denken, mit welcher Anerkennung man nun des Erfinders der Blitzableiter gedachte und wie dieses beitrug, dieselben in Italien zu verbreiten.

Lange Zeit kannte man die Reibung als Erregungsmittel der Elektricität; nach und nach entdeckte man aber noch andere zu demselben Ziele führende mechanische Vorgänge, wie z. B. Druck, Spaltung, Erwärmung etc., wobei auch der Zufall nicht ohne Einfluss war. Die wichtigste Rolle spielte er aber bei der grössten Entdeckung unserer Zeit, nämlich der Berührungs-Elektricität, gemeiniglich auch Galvanismus genannt.

**Galvani**, Professor der Anatomie in Bologna, hatte nämlich eine brustkranke Frau, der als Heilmittel Froschsuppe verordnet war, zu deren Erzeugung Fröschen die Schenkel abgeschnitten und enthäutet wurden. Einst lagen mehrere solche hiezu vorbereitete Schenkel auf einem Tische des Zimmers, in welchem sich zugleich eine Elektrisirmaschine befand. Einer der Anwesenden setzte die Maschine in Bewegung und entzog dem Conductor derselben Funken, während ein anderer den Nerv des Frosches mit einem Messer berührte; und siehe, all die todten Froschschenkel geriethen in starke Zuckungen. Man rief **Galvani** herbei, wiederholte in seiner Gegenwart den Versuch, jedoch nur dann mit Erfolg, wenn gleichzeitig, als der Froschnerv mit dem Messer berührt wurde, man der Elektrisirmaschine einen Funken entlockte. Ein gut unterrichteter Physiker würde daran nichts Besonderes gesehen haben, da sich die besagten Froschschenkel in der elektrischen Atmosphäre des Conductors befanden und durch Vertheilung elektrisch werden mussten. Glücklicher Weise war **Galvani** nicht so gut unterrichtet, und diesmal hat die Wissenschaft von der Unkenntniss ihrer Gesetze Nutzen gezogen. Aber bei ihm war es mit diesem ersten Spiele des Zufalls nicht genug, sondern dieser musste seinen Einfluss zum zweiten Male geltend machen, um den Anatomen auf eine, wenn auch wieder nicht die rechte Spur zu verhelfen. **Galvani** sah nämlich in der neuen Erscheinung nur eine Verwirklichung seiner Lieblings-Idee von einer den Nerven eigenen Elektricität. Er suchte demnach diese Hypothese weiter zu prüfen und wollte unter Anderm auch den Einfluss der Luftelektricität auf die Erzeugung von Zuckungen in präparirten Froschschenkeln weiter erforschen. Er liess zu diesem Ende Frösche enthäuten, deren Wirbelsäule durchschneiden, die Schenkelnerven blosslegen und isoliren, und durch den übrigen Theil der Nervenstücke einen gekrümmten Kupferdrath stecken. Mit diesem Haken hing er einst mehrere solcher Präparate an einem eisernen Gitter auf und erwartete den Eintritt von Zuckungen. Allein umsonst. Des vergebenen Wartens müde, bog er den Kupferdrath zurück, um dadurch vielleicht der atmosphärischen Elektricität den Zutritt zu erleichtern, allein er drückte dadurch auch das Froschpräparat an das Gitter an, und nun traten alsogleich die erwarteten Zuckungen ein. Bei wiederholten Versuchen in einem geschlossenen Zimmer, wobei er das Präparat auf eine eiserne Scheibe legte und den Kupferhaken mit dem Eisen in Berührung brachte, blieben die Zuckungen nie aus. Er glaubte sich daher zu der Annahme berechtigt, dass durch Herstellung einer Leitung zwischen Nerv und Muskel eine Entladung der im Frosche enthaltenen Elektricität bewirkt werde, und dass diese Entladung

sich durch Zuckungen kund gebe. Es ist bekannt, dass Volta an diesen Versuchen ganz andere Andeutungen erkannt und dadurch auf die Erfindung der Säule, die seinen Namen führt, geleitet wurde. Nebst dem Scharfsinne dieses gelehrten Mannes verdanken wir daher die Entdeckung der Volta'schen Säule der Krankheit einer Frau und der Unkenntniss eines Gelehrten.

Die Volta'sche Säule erregte die Neugierde von Laien und Gelehrten, und überall stellte man solche Apparate zusammen, um die elektrischen Erschütterungen zu versuchen, deren man sich aussetzte, wenn man die beiden Pole derselben mit Theilen des Körpers in Verbindung brachte, oder um zu erfahren, ob diese Pole noch Elektricität erkennen lassen, wenn deren Verbindung durch verschiedene Körper bewerkstelligt worden. Solche Versuche wurden auch von den englischen Naturforschern Nicholson und Carlisle angestellt. Ein Zufall führte sie in ein ganz neues Gebiet. Als nämlich Carlisle die Pole mit einem Metalldrathe verbunden hatte, wollte er die innigere Berührung zwischen der obersten Platte der Säule und einem Drath-Ende dadurch mehr sichern, dass er einen Tropfen Wasser an die Stelle brachte, wo der Drath die Platte berühren sollte. Es entwickelten sich aber in dem Tropfen kleine Wasserbläschen und es verbreitete sich ein Geruch von Wasserstoffgas. So ward die erste chemische Wirkung der Volta'schen Säule entdeckt, eine Entdeckung, die bald eine bedeutende Erweiterung erfuhr, und vielleicht mehr als irgend eine andere zur Reform der Chemie beigetragen hat, und doch war auch diese durch einen Zufall hervorgerufen.

Die Volta'sche Säule zeigte zu viel Analogie mit einem Magnete, als dass es an phantasiereichen Köpfen gefehlt haben sollte, welche die Analogie zu einer, wenn auch nicht completen Identität auszuspinnen versuchen wollten. Auf diese Aehnlichkeit suchte Professor Oersted seine Schüler aufmerksam zu machen. Er stellte zu diesem Ende eine Volta'sche Säule, deren Pole zufällig leitend verbunden waren, neben einer Magnetnadel auf, bemerkte aber eine Unruhe an der letzteren, die ihm ungewöhnlich vorkam. Er nahm hievon Veranlassung, diese Sache näher zu untersuchen, und ward dadurch der Entdecker des Elektromagnetismus, eines Zweiges der Physik, der in unseren Tagen an den elektrischen Telegraphen die schönste und fruchtbarste Anwendung gefunden hat.

Ob mit der Entdeckung des Elektromagnetismus der Zufall seine Laune im Reiche der elektrischen Erforschungen gänzlich befriedigt gefunden, oder ob er uns noch ferner neue Wege an-

deuten werde, muss der Zukunft vorbehalten bleiben; merkwürdig ist es aber, dass seit der Oersted'schen Entdeckung, die in das Jahr 1820 fiel, höchst wichtige neue Entdeckungen im Gebiete der Elektricitätslehre gemacht worden sind, wie z. B. die der Magnetelektricität, ohne dass eine Einmischung des Zufalls bemerkbar geworden wäre. Es ist übrigens einleuchtend, dass das Reich des Zufalls desto mehr Terrain verlieren müsse, je weiter man in der Kenntniss der Naturerscheinungen, ihrem Zusammenhange und ihren Gesetzen fortgeschritten und im Stande sein wird, bei gelehrten Forschungen nach einem rationellen Operationsplane vorzugehen und das Gebiet des Tatonnirens zu verlassen. Wir sind aber leider noch weit von dem Ziele entfernt und befinden uns nur zu oft in der Lage jenes Physikers, der, als er in seinem Zimmer einen Magnet strich und von einem unversehens eintretenden Freunde gefragt wurde, was er mache, antworten musste: „Wollte Gott, ich wüsste, was ich thue."

Aber ungeachtet der starken Eingriffe des Zufalls in das System der bisherigen und vielleicht auch der zukünftigen naturwissenschaftlichen Forschungen hat doch derselbe nur den Handlanger abgegeben; der Genius jener Männer aber, der ihn zu erfassen verstand und ihn zwang, seinen Zwecken dienstbar zu werden, hat die Wissenschaft weiter gebracht. Wie viele Menschen haben nicht vor Galilei schwankende Hänglampen in den Kirchen gesehen, ohne dadurch veranlasst worden zu sein, darin einen Zeitmesser zu erkennen. Tausende haben Aepfel von Bäumen fallen gesehen, sind aber nicht wie Newton zu dem Schlusse gekommen, dass dieser Fall auch stattfinden würde, wenn der Baum bis zum Monde hinaufreichte, dass daher der Mond selbst zur Erde herabfallen müsste, wenn er nicht durch eine Kraft, wie der Apfel durch seinen Stiel, im Fallen gehindert würde. Nicht blos Kindern, auch Gelehrten entfielen gewiss oft Krystalle und zerschlugen sich dabei in Stücke, ohne dass diese, wie Hauy, daran die Spaltbarkeit der krystallisirten Stoffe erkannt hätten. Glühender Eifer, Begeisterung für die Wissenschaft, Benützung jeder sich darbietenden Gelegenheit, reflectirende Beobachtung und sorgfältige Combination sind es demnach, die uns das Buch der Natur öffnen und dessen Inhalt entziffern. Auf diesem Wege ist es auch der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften gelungen, manch schätzbaren Beitrag zu liefern, und die zahlreichen Druckwerke zu füllen, welche von ihrem Streben und von ihrem Dankgefühle für den erhabenen Herrn und Kaiser, der dieser Anstalt die Mittel zu ihrer Thätigkeit so reichlich gewährt, Zeugniss geben dürften.

# III.

# Ein kleiner Nachtrag zur Lehre von den kubischen Gleichungen.

Von

Herrn Oberschulrath Dr. *J. H. T. Müller*

zu Wiesbaden.

---

Bei der Auflösung der reducirten kubischen Gleichung

$$y^3+py+q=0$$

überrascht in der Regel den Schüler das ihm etwas künstlich vorkommende Verfahren der Auffindung der beiden übrigen Wurzeln, nachdem die erste dargestellt worden, während dem Lehrer die Auflösung der beiden identischen Hilfsgleichungen

$$u^6+qu^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0,$$

$$v^6+qv^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$

nicht befriedigt, indem man sich hier mit einem Wurzelpaare begnügt und die beiden übrigen Paare unbeachtet lässt.

Die Ausfüllung dieser Lücke aber beseitiget, wie man sich bei näherem Eingehen leicht überzeugt, zugleich jenen oben erwähnten Anstoss. Da, so viel ich weiss, beides bisher unbeachtet geblieben ist, so dürfte eine kurze Mittheilung hierüber für den Unterricht nicht ganz nutzlos sein.

1. Aus den Elementen ist bekannt, dass

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

ist. Es wird also $(x^3-1)$ zu Null, wenn $(x-1)$, sowie wenn $(x^2+x+1)$ zu Null wird. Demnach ist

$$x'=+1;\quad x''=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=J';\quad x'''=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=J'',$$

wodurch die drei Werthe der Kubikwurzel aus $+1$ gefunden sind.

Es ist daher auch, wenn $\alpha$ den absoluten Werth von $\sqrt[3]{a}$ bezeichnet,

$$\sqrt[3]{a}=1.\alpha;\quad J'.\alpha;\quad J''.\alpha.$$

2. Aus den obigen Hilfsgleichungen erhält man bekanntlich zunächst

$$u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)},$$

$$v^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}.$$

Da aber die Werthe von $u^3$ und $v^3$ zunächst der ersten der beiden Grundgleichungen

$$u^3+v^3+q=0,$$

$$3uv+p=0$$

genügen müssen, und da beide Gleichungen symmetrische Funktionen von $u$ und $v$ sind, so wird für

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}$$

nur noch

$$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}.$$

Sei der absolute Werth von

$$\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}\right\}}=R_{+1},$$

$$\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}\right\}}=R_{-1};$$

wo $\sqrt{\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}$ als reell vorausgesetzt ist.

Dann ist nach 1):

$$u' = R_{+1};\quad u'' = J'.R_{+1};\quad u''' = J''.R_{+1};$$
$$v' = R_{-1};\quad v'' = J'.R_{-1};\quad v''' = J''.R_{-1}.$$

Um jetzt zu ermitteln, welche Werthepaare von $u$ und $v$ zulässig sind, ziehe man die zweite Grundgleichung

$$3uv + p = 0$$

hinzu, nachdem zuvor die Producte $J'J'$, $J''J''$, $J'J''$ entwickelt worden. Man erhält nämlich die auch an sich bemerkenswerthen Gleichungen:

$$J'J' = J'';\quad J''J'' = J';\quad J'J'' = 1.$$

Aus diesen nun ergiebt sich, dass, $R$ als reell vorausgesetzt,
die Combinationen $u''v''$, $u'''v'''$ mit jener Grundgleichung unverträglich sind, während sich
für die Combinationen $u'v''$, $u''v'$, $u'v'''$, $u'''v'$ die Unzulässigkeit von selbst herausstellt.

Demnach bleiben nur noch die Verbindungen

$$u'v',\quad u''v''',\quad u'''v''$$

übrig, deren jede, wenn man wirklich entwickelt, den Ausdruck

$$3uv + p$$

zum Verschwinden bringt.

Damit sind also die drei Wurzeln der kubischen Gleichung

$$y^3 + py + q = 0$$

gleichzeitig und auf völlig übereinstimmende Weise gefunden, nämlich

$$y' = u' + v';\quad y'' = u'' + v''';\quad y''' = u''' + v'',$$

oder

$$y' = R_{+1} + R_{-1};\quad y'' = J'.R_{+1} + J''.R_{-1};\quad y''' = J''.R_{+1} + J'.R_{-1},$$

was in doppelter Beziehung befriedigt, indem das Eine vollständig erledigt und in das Andere Gleichförmigkeit gebracht wird.

# IV.

# Verschiedene mathematische Bemerkungen

von

Herrn Doctor *Hermann Kaiser,*

Kreisarzt in Seligenstadt im Grossherzogthum Hessen.

---

## I.

## Neue und leichte Auflösung einer Gattung von Aufgaben aus der unbestimmten Analytik.

*Aufgabe*: Es wird eine Zahl $Z$ gesucht, welche mit $D'$ dividirt den Rest $R'$, mit $D''$ dividirt den Rest $R''$, mit $D'''$ dividirt den Rest $R'''$, mit $D^{IV}$ dividirt den Rest $R^{IV}$, u. s. f. lässt, vorausgesetzt, dass sich die Divisoren $D$, $D'$, $D''$, $D'''$, $D^{IV}$,.... gegen einander prim verhalten, d. h. dass keiner derselben mit einem der andern einen gemeinschaftlichen Theiler hat.

Die Auflösung geschieht sehr leicht nach folgender Formel:

$$Z = m'R'D''D'''D^{IV}.... + m''R''D'D'''D^{IV}....$$

$$+ m'''R'''D'D''D^{IV}... + m^{IV}R^{IV}D'D''D'''... + ... + \mp pD'D''D'''D^{IV}...$$

Hierbei bedeutet $m'$ diejenige ganze positive Zahl aus der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3,...., womit das Product $D''D'''D^{IV}$ noch multiplicirt werden muss, damit es durch $D'$ dividirt 1 als Rest gibt; ebenso bedeutet $m''$ diejenige ganze positive Zahl der natürlichen Zahlenreihe, womit das Product $D'D'''D^{IV}$ noch multiplicirt werden muss, damit es durch $D''$ dividirt wieder 1 als Rest gibt; ferner $m'''$ diejenige Zahl, womit $D'D''D^{IV}$ multiplicirt werden muss, damit die Division mit $D'''$ 1 als Rest gibt etc.

Endlich bedeutet $p$ sämmtliche successiven Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, die Null mit eingeschlossen, nämlich succ. $0, 1, 2, 3, \ldots \infty$, jedoch nur für das positive Zeichen des letzten Gliedes der Formel, für das negative gelten nur diejenigen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, wofür $Z$ nicht negativ wird.

Es seien z. B. die Divisoren $D'$, $D''$, $D'''$, $D^{IV}$ beziehungsweise $= 2, 3, 5, 7$, so hat man die Producte:

$$D''D'''D^{IV} = 105, \quad D'D'''D^{IV} = 70, \quad D'D''D''' = 30 \text{ und}$$
$$D'D''D'''D^{IV} = 210.$$

Da 105 durch 2 dividirt den Rest 1 lässt, so ist $m' = 1$;
„ 70 „ 3 „ „ „ 1 „ „ „ $m'' = 1$;
„ 42 „ 5 „ „ „ 2 und erst $3 \times 42 = 126$ den Rest 1 lässt, so ist $m''' = 3$;
„ 30 „ 7 „ „ „ 2 und erst $4 \times 30 = 120$ den Rest 1 lässt, so ist $m^{IV} = 4$.

Zufolge unserer Formel haben wir mithin:

$$Z = 105R' + 70R'' + 126R''' + 120R^{IV} \mp 210p.$$

Sind nun die zugehörigen Reste $R'$, $R''$, $R'''$, $R^{IV}$ beziehungsweise $= 1, 2, 3, 4$, so ist

$$Z = 105 + 140 + 378 + 480 \mp 210p = 1103 \mp 210p.$$

Setzt man $p = 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man die gesuchten Zahlen: 53, 263, 473, 683, 893, 1103, 1313, 1523, 1733,....

Der Beweis der Richtigkeit der Formel ergibt sich alsbald durch die blosse Betrachtung derselben. Die Division mit $D'$ lässt nämlich im ersten Gliede den Rest $R'$, in allen übrigen Gliedern den Rest Null, ebenso gibt die Division mit $D''$ im zweiten Gliede den Rest $R''$, in allen übrigen Gliedern dagegen keinen Rest etc.

Anmerkung. Soll die gesuchte Zahl $Z$ das Product aus sämmtlichen Divisoren nicht übersteigen, so ist die Aufgabe eine vollkommen bestimmte.

---

## II.

## Auflösung der homogenen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Hat man zwei Gleichungen von der Form:

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 + \ldots + Ux^2y^{n-2}$$
$$+ Vxy^{n-1} + Wy^n + Zx^py^q = 0,$$

$$A'x^n + B'x^{n-1}y + C'x^{n-2}y^2 + \ldots + U'x^2y^{n-2}$$
$$+ V'xy^{n-1} + W'y^n + Z'x^py^q = 0,$$

welche mithin bis auf das letzte Glied homogen sind, so kann man beide Gleichungen mit solchen Factoren multipliciren, dass der Coefficient des letzten Gliedes in beiden gleich wird; zieht man sodann beide Gleichungen von einander ab, so ergibt sich eine homogene Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{A}x^n + \mathfrak{B}x^{n-1}y + \mathfrak{C}x^{n-2}y^2 + \ldots + \mathfrak{U}x^2y^{n-2} + \mathfrak{V}xy^{n-1} + \mathfrak{W}y^n = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $y = vx$, so erhält man, wenn man mit $x^n$ dividirt, die Gleichung:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}v^2 + \ldots + \mathfrak{U}v^{n-2} + \mathfrak{V}v^{n-1} + \mathfrak{W}v^n = 0,$$

in welcher somit nur noch eine Unbekannte enthalten ist.

Man habe z. B. die beiden Gleichungen:

$$24y^3 + 95y^2x - 11yx^2 - 210 = 0, \qquad (1)$$

$$3y^3 + 28y^2x - 7yx^2 + 3x^3 - 105 = 0; \qquad (2)$$

so darf man nur die letzte Gleichung mit 2 multipliciren, um das letzte Glied in beiden Gleichungen gleich zu machen. Zieht man sodann die letzte Gleichung von der ersten ab, so erhält man nach vorgängiger Division mit 2:

$$6y^3 + 13y^2x + yx^2 - 2x^3 = 0.$$

Setzt man nun $y = vx$ und dividirt mit $x^3$, so ergibt sich die Gleichung:

$$6v^3 + 13v^2 + v - 2 = 0,$$

deren Wurzeln sind:

$$v_1 = -2, \quad v_2 = \tfrac{1}{3}, \quad v_3 = -\tfrac{1}{2}.$$

Folglich ist

$$y_1 = -2x_1, \quad y_2 = \tfrac{1}{3}x_2, \quad y_3 = -\tfrac{1}{2}x_3.$$

Setzt man diese Werthe nach einander in die Gleichung (2), so erhält man:

1) $$-24x_1^3 + 112x_1^3 + 14x_1^3 + 3x_1^3 - 105 = 0,$$

und daraus $105x_1^3 - 105 = 0$, mithin $x_1 = 1$.

2) $$\tfrac{1}{9}x_2^3 + \tfrac{28}{9}x_2^3 - \tfrac{7}{3}x_2^3 + 3x_2^3 - 105 = 0,$$

folglich $x_2 = \sqrt[3]{27} = 3$.

3) $$-\tfrac{3}{8}x_3^3 + 7x_3^3 + \tfrac{7}{2}x_3^3 + 3x_3^3 - 105 = 0,$$

mithin $x_3 = \sqrt[3]{8} = 2$.

Demnach hat man $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, und hiermit (aus $y = vx$): $y_1 = -2$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$.

Ist eine der beiden gegebenen Gleichungen bereits homogen, so ist das Verfahren noch einfacher, denn man kann aus dieser den Werth von $y$ in $x$ und alsdann mittelst der anderen Gleichung den Werth von $x$, also auch von $y$ bestimmen.

---

## III.

### Ein interessantes Beispiel von Transformation.

*Aufgabe*: Es soll die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\beta}{du} &= \sin.n\cos.u\cos.\beta - \cos.n\cos.u\sin.\beta\sin.(\lambda-k)\\ &\quad + \sin.u\sin.\beta\cos.(\lambda-k)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

mit Hilfe des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks $ABC$ (Taf. I. Fig. 3.), in welchem der Winkel an $B = n$, die Seite $BC = \varphi$, $AC = \psi$ und $AB = \lambda - k$ ist, auf die Form:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\beta}{du} &= \sin.n\cos.(\lambda-k)\cos.(\psi-\beta)\cos.(\varphi-u)\\ &\quad + \sin.(\varphi-u)\sin.(\psi-\beta)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

gebracht werden.

Auflösung: Differentiirt man die rechte Seite der Gleichung (1) nach $n$, so erhält man:

$$\cos.n\cos.u\cos.\beta + \sin.n\cos.u\sin.\beta\sin.(\lambda-k),$$

und daraus durch partielle Integration [wenn man berücksichtigt, dass

$$\operatorname{tg}.\varphi = \frac{\operatorname{tg}.(\lambda-k)}{\cos.n}, \quad \operatorname{tg}.\psi = \sin.(\lambda-k)\operatorname{tg}.n,$$

$$\cos.\varphi = \cos.\psi\cos.(\lambda-k), \quad \sin\psi = \sin.\varphi\sin.n$$

ist]:

$$\frac{\sin.n\cos.u}{\cos.\psi}\cos.(\psi-\beta)-\int\frac{dn.\sin.n\sin.\beta\sin.(\lambda-k)\cos.u}{\cos.^2n},$$

oder auch:

$$\frac{\sin.n\cos.u}{\cos.\psi}\cos.(\psi-\beta)-\frac{\cos.u\sin.\beta\sin.(\lambda-k)}{\cos.n}+C. \quad (3)$$

Da nun die beiden Ausdrücke (1) und (3) identisch sein müssen, so erhält man, wenn man $n=0$ setzt,

$$C=\sin.u\sin.\beta\cos.(\lambda-k).$$

Der Ausdruck (3) wird mithin, wenn man $\cos.n$ zufolge der ersten in Parenthese stehenden Gleichung eliminirt, nach einer leichten Reduction (vermittelst der andern eingeklammerten Hilfsgleichungen):

$$\frac{\sin.n\cos.(\psi-\beta)\cos.(\lambda-k)\cos.u}{\cos.\varphi}-\frac{\sin.\beta\sin.(\varphi-u)}{\cos.\psi}, \quad (4)$$

oder auch (weil $\frac{1}{\cos.^2}=1+\text{tg}.^2$ ist):

$$\left.\begin{array}{l}\sin.n\cos.(\psi-\beta)\cos.(\lambda-k)\cos.u\cos.\varphi(1+\text{tg}.^2\varphi)\\ \quad-\sin.\beta\sin.(\varphi-u)\cos.\psi(1+\text{tg}.^2\psi).\end{array}\right\} \quad (4')$$

Es ist aber:

$$1)\left\{\begin{array}{l}\sin.n\cos.(\psi-\beta)\cos.(\lambda-k)\cos.u\cos.\varphi\,\text{tg}.^2\varphi\\ =\text{tg}.^2n\cos.(\lambda-k)\text{tg}.^2(\lambda-k)\cos.u\sin.\varphi\cos.\varphi(\cot.\psi\cos.\beta+\sin.\beta);\end{array}\right.$$

$$a)\left\{\begin{array}{l}\text{tg}^2n\cos.(\lambda-k)\,\text{tg}.^2(\lambda-k)\cos.u\sin.\varphi\cos.\varphi\cot.\psi\cos.\beta\\ \quad=\text{tg}.n\sin.(\lambda-k)\cos.u\cos.\beta\sin.\varphi\cos.\psi\\ \quad=\cos.u\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\beta;\end{array}\right.$$

$$b)\left\{\begin{array}{l}\text{tg}.^2n\cos.(\lambda-k)\,\text{tg}.^2(\lambda-k)\cos.u\sin.\varphi\cos.\varphi\sin.\beta\\ \quad=\text{tg}.^2\psi\cos.u\sin.\varphi\sin.\beta\cos.\psi;\end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{l}-\sin.\beta\sin.(\varphi-u)\cos.\psi\,\text{tg}.^2\psi\\ =-\text{tg}.^2\psi\sin.\beta\cos.\psi(\sin.\varphi\cos.u-\cos.\varphi\sin.u);\end{array}\right.$$

$$a')\quad -\text{tg}.^2\psi\sin.\beta\cos.\psi\sin.\varphi\cos.u$$

gleich und entgegengesetzt dem Ausdruck b);

$$b')\left\{\begin{array}{l}\sin.\beta\cos.\psi\,\text{tg}.^2\psi\cos.\varphi\sin.u\\ =\sin.\beta\sin.u\sin.n\sin.\psi\sin.\varphi\cos.(\lambda-k).\end{array}\right.$$

Die Ausdrücke a), b), a'), b') geben mithin zusammengenommen:

$$\cos.u\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\beta+\sin.\beta\sin.u\sin.n\sin.\psi\sin.\varphi\cos.(\lambda-k);$$

substituirt man dies in (4'), so ergibt sich für $\frac{d\beta}{du}$ folgender Ausdruck:

$$\left.\begin{array}{c}\sin.n\cos.(\lambda-k)\cos.(\psi-\beta)\cos.u\cos.\varphi\\ -\sin.\beta\sin.(\varphi-u)\cos.\psi+\cos.u\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\beta\\ +\sin.n\cos.(\lambda-k)\sin.u\sin.\beta\sin\psi.\end{array}\right\}\quad(5)$$

Endlich ist

$$3)\left\{\begin{array}{l}\sin.n\cos.(\lambda-k)\cos.(\psi-\beta)\sin.u\sin\varphi\\ =\sin.n\cos.(\lambda-k)\sin.u\sin.\varphi(\cos.\psi\cos.\beta-\sin\psi\sin\beta).(\alpha);\end{array}\right.$$

$$a'')\left\{\begin{array}{l}\sin.n\cos.(\lambda-k)\sin.u\sin.\varphi\cos.\psi\cos.\beta\\ =\sin.u\cos.\varphi\sin.\psi\cos.\beta;\end{array}\right.$$

$$b'')\quad \sin.n\cos.(\lambda-k)\sin.u\sin.\varphi\sin.\psi\sin\beta$$

gleich dem letzten Gliede von (5).

Addirt man demnach das Glied linker Hand der Gleich. $\alpha$) zu dem Ausdrucke (5) und subtrahirt dagegen die beiden Glieder a''), b''), wodurch in (5) nichts geändert wird, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{du}=&\sin.n\cos.(\lambda-k)\cos.(\psi-\beta)(\cos.u\cos.\varphi+\sin.u\sin.\varphi)\\ &+(\cos.u\sin.\varphi-\sin.u\cos.\varphi)\sin.\psi\cos.\beta\\ &-\sin.(\varphi-u)\cos.\psi\sin.\beta\\ =&\sin.n\cos.(\lambda-k)\cos.(\psi-\beta)\cos.(\varphi-u)\\ &+\sin(\varphi-u)\sin.(\psi-\beta).\end{aligned}$$

# V.

# Elementare Darstellung der Lehre von der Quadratur der Hyperbel und der Theorie der hyperbolischen oder natürlichen Logarithmen.

Von
dem Herausgeber.

So oft ich zu dem Vortrage der Lehre von den Kegelschnitten ohne Voraussetzung der höheren Analysis zurückgekehrt bin, ist es mir immer ein drückendes Gefühl gewesen, wenn ich bei der Quadratur der Hyperbel meine Zuhörer rücksichtlich dieser Lehre auf die Zeit verweisen musste, wo sie in die Geheimnisse der Integralrechnung eingeweiht werden würden, und dieses Gefühl war natürlich um so drückender, weil sich bekanntlich die Quadratur der Parabel und der Ellipse in so leichter und strenger Weise völlig elementar bewerkstelligen lässt. Es hat daher auch keineswegs an vielfachen Versuchen von meiner Seite gefehlt, diesen wichtigen Punkt in der Lehre von den Kegelschnitten auf eine für den Unterricht erspriessliche Weise zur Erledigung zu bringen; und wenn meine Bemühungen in dieser Beziehung auch nicht ganz ohne Erfolg geblieben sind, so hat doch keine der von mir früher gefundenen Methoden mich vollkommen befriedigt, weshalb ich dieselben auch nie bekannt gemacht, dessenungeachtet nothgedrungen hin und wieder bei'm Unterrichte benutzt habe. Ganz neuerlich habe ich aber, da ich gegenwärtig wieder die Kegelschnitte vortrage, eine Methode zur elementaren Quadratur der Hyperbel gefunden, die mich vollkommen befriedigt hat und mir zur Ausfüllung einer wesentlichen Lücke in der Lehre von den Kegelschnitten, wenigstens in methodischer Rücksicht, sehr geeignet zu sein scheint, was mich veranlasst, dieselbe im

Folgenden der geneigten Beurtheilung der Leser des Archivs vorzulegen. Ich stehe nicht an, dieser Methode namentlich auch deshalb einen besonderen Werth für die Zwecke des Unterrichts beizulegen, weil sie auf eine, wie es mir scheint, sehr bemerkenswerthe Gränzenbetrachtung führt, die auch noch deshalb von wissenschaftlichem Interesse ist, weil man durch dieselbe zugleich zu einem, wenn auch zur numerischen Berechnung nicht gerade sehr brauchbaren, aber doch sonst bemerkenswerthen analytischen Ausdrucke für eine gewisse transcendente Grösse gelangt, wovon nachher weiter die Rede sein wird. Wie wichtig es ist, dass der angehende Mathematiker so zeitig wie möglich mit dem Wesen solcher Gränzenbetrachtungen bekannt und vertraut gemacht werde, da ja bei seiner künftigen Beschäftigung mit der sogenannten höheren Mathematik der Begriff der Gränze sein fortwährender Begleiter bleibt, ohne welchen er nicht das Geringste anfangen kann, habe ich nun schon oft genug bemerkt, freue mich aber sehr, dass diese Ansicht immer mehr Boden und immer grössere Verbreitung unter den Mathematikern und den wahrhaft tüchtigen und einsichtsvollen Lehrern der Mathematik gewinnt *), welche letzteren hauptsächlich auch dahin streben und zu streben haben, ihre Schüler für künftige höhere theoretische oder praktische Studien zweckmässig und allseitig vorzubereiten, und nicht, wie dies erfahrungsmässig hin und wieder geschieht, mit einer Menge von Dingen zu quälen und geistig zu ermüden, die eben deshalb nicht selten als höchst unnütz bezeichnet werden müssen, weil sie zur wahrhaft soliden Vorbereitung auf künftige Studien, die doch gewiss bei jedem vernünftigen Elementar-Unterrichte immer zunächst der Hauptgesichtspunkt bleiben muss, weder erforderlich, noch besonders geeignet sind.

Das Folgende wird aber, wie ich hoffe, dadurch noch ein besonderes Interesse gewinnen, dass sich, wie ich zeigen werde, an die von mir gefundene elementare Quadratur der Hyperbel auch eine völlig strenge und ganz elementare Theorie der hyperbolischen oder natürlichen Logarithmen, hauptsächlich, wie sich von selbst versteht, eine solche Entwickelung der bekannten logarithmischen Reihen und die auf dieselben gegründete Berechnung der logarithmischen Tafeln anschliessen lässt, wobei mir wieder der aus meinen im Archiv. Thl. XXIII. Nr. 1. §. 2. (S. 6.) und Nr. VIII.

---

*) M. s. z. B. die in allen Beziehungen höchst ausgezeichnete Abhandlung des Herrn Doctor Heilermann in Trier über umhüllende Curven im Archiv. Thl. XXIV. Nr. XXXI., namentlich auch die von allen Lehrern sehr zu beherzigenden Worte am Schlusse (S. 469.) derselben.

II. (S. 210.) mitgetheilten Abhandlungen bekannte *) wichtige arithmetische Satz: dass die Grösse

$$\frac{1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} \quad \text{oder} \quad \frac{1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (n-1)^m}{n^{m+1}}$$

sich der Gränze $\frac{1}{m+1}$ nähert, wenn $n$ in's Unendliche wächst, die vortrefflichsten Dienste geleistet hat, was mir ein neuer Beweis von der grossen Wichtigkeit dieses Satzes für die strenge elementare Behandlung der Mathematik gewesen ist, so dass ich fortwährend der Meinung bin, dass dieser Satz von jetzt an in keinem mathematischen Elementar-Lehrbuche fehlen sollte, da sich derselbe überdies auch so leicht und einfach streng beweisen lässt. Solche so tief in das eigentliche Wesen der Mathematik einschneidende und so ungemein vieler fruchtbaren Anwendungen fähige Sätze, die eben deshalb als wahre mathematische Elementarsätze bezeichnet werden müssen, sind für den Elementar-Unterricht weit wichtiger, als Vieles, was sich jetzt in den Lehrbüchern findet, so wie ich denn überhaupt immer mehr und mehr in der Meinung bestärkt werde, dass der ganze mathematische Elementar-Unterricht und die demselben zu Grunde liegenden Lehrbücher einer Umgestaltung nach mehreren Seiten hin dringend bedürfen, wenn dieselben mit der grossartigen Umgestaltung, welche gegenwärtig die höhere Mathematik immer mehr und mehr erfährt, einigermassen gleichen Schritt halten und auf dieselbe zweckmässig vorzubereiten geeignet sein sollen. Dass ich damit hauptsächlich eine Umgestaltung des arithmetischen Theils der Elemente im Sinne der Strenge der griechischen Mathematiker und namentlich der an diese lebhaft erinnernden, ihr ganz ebenbürtigen und mit ihr ganz auf gleiche Linie zu stellenden Strenge der sogenannten neuen analytischen Schule meine, ist wohl kaum nöthig, noch besonders zu bemerken. Dass aber eine Umgestaltung der Elemente in diesem Sinne über kurz oder lang sich als unabweisbar nothwendig herausstellen, und dass damit zugleich Manches, was sich jetzt in den Elementen findet, als unnütz und schädlich über die Seite geworfen **), manches

---

*) Dass die Erfindung dieses Satzes mir gebühre, soll hiermit natürlich keineswegs gesagt sein; die Hinweisung auf die genannten Abhandlungen war für mich hier nur die bequemste.

**) Sowie z. B. die neuere Analysis die sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten, und Alles, was damit zusammenhängt, bereits vollständig beseitigt hat.

Neue *) in dieselben aufgenommen werden wird und muss, wenn die Elemente mit der neuen Gestaltung der höheren Analysis einigermassen gleichen Schritt halten sollen: davon bin ich vollkommen überzeugt. Einen bescheidenen Beitrag zu einer solchen gewiss nicht ausbleibenden Umgestaltung der mathematischen Elemente zu liefern ist, wie bei mehreren meiner früher im Archiv mitgetheilten, dessen Zwecke, wie ich glaube, entsprechenden Aufsätze, auch der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung, und ich würde mich jedenfalls sehr freuen, wenn dieselbe bei, der Strenge der neueren Analysis huldigenden und mit deren Anforderungen gehörig vertrauten Mathematikern, und bei Lehrern, welche den mathematischen Elementar-Unterricht in einer auf diese Anforderungen zweckmässig vorbereitenden Weise ertheilen, einigen Beifall finden sollte.

## I.

### Elementare Quadratur der Hyperbel.

In der ohne weitere Erläuterung gewiss ganz durch sich selbst verständlichen Fig. 4. auf Taf. I. sei $CQ=x$, $PQ=y$; $CQ_1=x_1$, $P_1Q_1=y_1$; und wenn man nun die Sehne $PP_1$ der Hyperbel zieht, so werde der Flächeninhalt des geradlinigen Trapeziums $PQP_1Q_1$ durch $T$ bezeichnet. Sind nun wie gewöhnlich $a, b$ die beiden Halbaxen der Hyperbel, so ist nach der bekannten Gleichung derselben zwischen ihren Asymptoten

$$xy=\frac{a^2+b^2}{4} \text{ und } x_1y_1=\frac{a^2+b^2}{4};$$

also

$$y=\frac{a^2+b^2}{4}\cdot\frac{1}{x} \text{ und } y_1=\frac{a^2+b^2}{4}\cdot\frac{1}{x_1}.$$

Ist aber ferner $\alpha$ der Asymptotenwinkel, so ist offenbar

$$T=\tfrac{1}{2}(x_1-x)(y_1+y)\sin\alpha,$$

also, wenn man die vorhergehenden Werthe von $y$ und $y_1$ einführt:

$$T=\frac{a^2+b^2}{8}(x_1-x)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x}\right)\sin\alpha,$$

oder:

---

*) Wobei strenge Gränzenbetrachtungen jedenfalls eine Hauptrolle spielen werden und müssen.

$$T=\frac{a^2+b^2}{8}.\frac{(x_1-x)(x_1+x)}{xx_1}\sin\alpha,$$

oder

$$T=\frac{a^2+b^2}{8}.\frac{x_1{}^2-x^2}{xx_1}\sin\alpha.$$

Nun ist aber

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha^2},\quad \text{und bekanntlich}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{b}{a};$$

also, wie man leicht findet:

$$\sin\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$T=\tfrac{1}{4}ab\frac{x_1{}^2-x^2}{xx_1}=\tfrac{1}{4}ab\left(\frac{x_1}{x}-\frac{x}{x_1}\right).$$

Für zwei andere Abscissen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ sei $\mathfrak{T}$ der Flächeninh[a]
des entsprechenden Trapeziums, so ist wie vorher:

$$\mathfrak{T}=\tfrac{1}{4}ab\frac{\mathfrak{x}_1{}^2-\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1}=\tfrac{1}{4}ab\left(\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}}-\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}_1}\right).$$

Ist nun

$$x:x_1=\mathfrak{x}:\mathfrak{x}_1,\ \text{also}\ \mathfrak{x}_1=\frac{x_1}{x}\mathfrak{x};$$

so ist

$$\mathfrak{T}=\tfrac{1}{4}ab\frac{\frac{x_1{}^2}{x^2}\mathfrak{x}^2-\mathfrak{x}^2}{\frac{x_1}{x}\mathfrak{x}^2}=\tfrac{1}{4}ab\frac{x_1{}^2-x^2}{xx_1},$$

folglich, wenn man dies mit dem Obigen vergleicht:

$$\mathfrak{T}=T.$$

Wenn also die Abscissen $x$, $x_1$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_1$ einand[er]
proportional sind, so sind die Flächenräume $T$ und
der entsprechenden Trapezia einander gleich.

Man fasse jetzt ein den Abscissen $x$ und $X$, wo $X$ grös[ser]
als $x$ sein soll, entsprechendes hyperbolisches Trapezium, dess[en]
Flächeninhalt wir durch $F$ bezeichnen wollen, in's Auge, u[nd]
nehme, indem $\omega$ einen gewissen Exponenten bezeichnet, die Abscis[sen]

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\ldots . x_n,\quad x_{n+1}$$

so, dass

$$x_1=\omega x,\quad x_2=\omega^2 x,\quad x_3=\omega^3 x,\ \ldots .,\ x_n=\omega^n x,\quad x_{n+1}=\omega^{n+1}x$$

und

$$x_n < X < x_{n+1} \text{ oder } \omega^n x < X < \omega^{n+1}x$$

ist, was offenbar immer möglich ist. Weil hiernach

$$x : x_1 = x_1 : x_2,$$

$$x_1 : x_2 = x_2 : x_3,$$

$$x_2 : x_3 = x_3 : x_4,$$

u. s. w.

$$x_{n-2} : x_{n-1} = x_{n-1} : x_n,$$

$$x_{n-1} : x_n = x_n : x_{n+1}$$

ist, so sind nach dem oben Bewiesenen die den Abscissen

$$x,\ x_1;\quad x_1,\ x_2;\quad x_2,\ x_3;\ \ldots .;\ x_{n-1},\ x_n;\quad x_n,\ x_{n+1}$$

entsprechenden geradlinigen Trapezia alle einander gleich, und mögen daher sämmtlich durch $\mathfrak{T}$ bezeichnet werden, indem wir zugleich

$$T=n\mathfrak{T},\quad T'=(n+1)\mathfrak{T}$$

setzen wollen. Bekanntlich ist aber nach dem Obigen in der jetzigen Bezeichnung:

$$\mathfrak{T}=\tfrac{1}{4}ab\frac{x_1{}^2-x^2}{xx_1},$$

also, weil $x_1=\omega x$ ist:

$$\mathfrak{T}=\tfrac{1}{4}ab\,\frac{\omega^2x^2-x^2}{\omega x^2}=\tfrac{1}{4}ab\frac{\omega^2-1}{\omega}.$$

Folglich ist

$$T=\tfrac{1}{4}ab.\frac{n(\omega^2-1)}{\omega},\quad T'=\tfrac{1}{4}ab.\frac{(n+1)(\omega^2-1)}{\omega}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$x_n=\omega^n x,\quad x_{n+1}=\omega^{n+1}x;$$

also

$$\omega^n = \frac{x_n}{x}, \quad \omega^{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x};$$

folglich, wenn man die Logarithmen nimmt:

$$n \log \omega = \log \frac{x_n}{x}, \quad (n+1) \log \omega = \log \frac{x_{n+1}}{x};$$

woraus

$$n = \frac{1}{\log \omega} \log \frac{x_n}{x}, \quad n+1 = \frac{1}{\log \omega} \log \frac{x_{n+1}}{x};$$

also nach dem Obigen

$$T = \tfrac{1}{4} ab \frac{\omega^2 - 1}{\omega \log \omega} \log \frac{x_n}{x}, \quad T' = \tfrac{1}{4} ab \frac{\omega^2 - 1}{\omega \log \omega} \log \frac{x_{n+1}}{x}$$

folgt.

Lässt man nun $\omega$ sich der Einheit nähern, so nähern

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots . x_n, \quad x_{n+1}$$

sich offenbar immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer stetigen Reihe von Grössen, und weil

$$x_n < X < x_{n+1}$$

ist, so nähern $x_n$ und $x_{n+1}$ sich unter der gemachten Voraussetzung augenscheinlich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Abscisse $X$ als Gränze. Ferner nähern sich aber unter derselben Voraussetzung die Trapezien-Summen $T$ und $T'$ offenbar immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade dem hyperbolischen Flächenstücke $F$ als Gränze, so dass also, weil das hyperbolische Flächenstück $F$ eine endliche völlig bestimmte Grösse ist, nach dem Obigen auch die Grössen

$$\tfrac{1}{4} ab \frac{\omega^2 - 1}{\omega \log \omega} \log \frac{x_n}{x} \text{ und } \tfrac{1}{4} ab \frac{\omega^2 - 1}{\omega \log \omega} \log \frac{x_{n+1}}{x}$$

sich endlichen völlig bestimmten Gränzen nähern müssen, wenn die Grösse $\omega$ sich der Einheit nähert, welche Gränzen eben der gesuchte arithmetische Ausdruck des zu quadrirenden hyperbolischen Flächenstücks $F$ sein werden. Weil nun aber nach dem Obigen $x_n$ und $x_{n+1}$ sich der gemeinschaftlichen Gränze $X$ nähern, wenn $\omega$ sich der Einheit nähert, so ist das endliche völlig bestimmte hyperbolische Flächenstück $F$ die Gränze, welcher die Grösse

$$\tfrac{1}{4}ab\,\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega}\log\frac{X}{x}$$

sich nähert, wenn $\omega$ sich der Einheit nähert. Da also vorstehende Grösse sich unter dieser Voraussetzung einer bestimmten endlichen Gränze nähert, so muss, weil $\tfrac{1}{4}ab\log\frac{X}{x}$ eine endliche, völlig bestimmte, von $\omega$ ganz unabhängige Grösse ist, offenbar die Grösse

$$\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega}$$

sich für sich auch einer endlichen völlig bestimmten Gränze nähern, welche natürlich, wie aus der Natur des vorstehenden Ausdrucks augenblicklich ganz von selbst hervorgeht, nur eine gewisse bestimmte unbenannte Zahl sein kann, die für alle Hyperbeln dieselbe ist; und im Folgenden durch $C$ bezeichnet werden soll, so dass für ein der Einheit sich näherndes $\omega$

$$C=\operatorname{Lim}\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega},$$

und nach dem Obigen

$$F=\tfrac{1}{4}Cab\log\frac{X}{x}$$

ist.

Was die constante Grösse $C$ betrifft, so bemerke ich zum vollständigen Verständniss des Vorhergehenden hier noch besonders, dass durch die vorhergehenden Betrachtungen zunächst und vor allen Dingen die wirkliche Existenz oder Realität dieser Grösse, d. h. das wirkliche Vorhandensein einer bestimmten endlichen Gränze, welcher die Grösse

$$\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega}$$

sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn $\omega$ sich der Einheit nähert, nachgewiesen worden ist. Dies ist ja aber in der Analysis und der Mathematik überhaupt nicht selten der Fall, dass man sich zuerst von der wirklichen Existenz einer Grösse versichert, und erst späterhin zeigt, wie diese Grösse wirklich bestimmt werden kann, welches Letztere freilich nicht immer möglich ist, wie z. B. in der Theorie der Gleichungen, wo man sehr wohl die Existenz der Wurzeln von der Form $p\pm q\sqrt{-1}$ streng nachweisen kann, aber keine allge-

meinen Methoden zu deren Bestimmung besitzt. Was unsere obige constante Grösse

$$C = \text{Lim}\,\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega},$$

für ein der Einheit sich näherndes $\omega$, betrifft, so wird in der zweiten Abtheilung dieser Abhandlung von der numerischen Bestimmung derselben weiter die Rede sein. Wenn man aber bei'm Unterrichte bloss den Vortrag der Quadratur der Hyperbel, nicht auch der vollständigen Theorie der hyperbolischen oder natürlichen Logarithmen, namentlich der Entwickelung derselben in Reihen, beabsichtigt, so ist es durchaus nicht unbedingt nöthig, bis zu der zweiten Abtheilung dieser Abhandlung vorzuschreiten, indem man sich sehr wohl damit begnügen kann, zu bemerken, dass man den numerischen Werth der Constanten $C$ immer genauer und genauer erhält, wenn man in den Ausdruck

$$\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega}$$

der Einheit immer näher und näher kommende Werthe für $\omega$ einführt, und die entsprechenden numerischen Werthe dieses Ausdrucks berechnet. Wenn auch eine schnelle Annäherung an die zu bestimmende Gränze auf diesem Wege nicht erzielt wird, so scheint mir doch ein Verfahren, wie das angegebene, völlig hinreichend zu sein, wenn der Zweck des Unterrichts und die demselben zugemessene Zeit ein Vorschreiten bis zu der allgemeinen Theorie der Logarithmen nicht gestatten. Ja, es scheint mir selbst eine recht zwekmässige und interessante Aufgabe für die Schüler, namentlich auf den eine mehr praktische Richtung verfolgenden Lehranstalten, zu sein, wenn man ihnen aufgiebt, für zwei beliebig angenommene, und nach dem sogenannten tausendtheiligen Maassstabe mit aller nur möglichen Sorgfalt aufzutragende Axen $2a$ und $2b$ eine Hyperbel nach den aus der Theorie der Kegelschnitte bekannten und in derselben früher schon vollständig gelehrten Methoden mit der grössten Sorgfalt und Sauberkeit auf dem Reissbrett zu construiren, deren Asymptoten zu ziehen, auf einer derselben zwei, natürlich mittelst des tausendtheiligen Maassstabes genau zu messende Abscissen $x$ und $X$ anzunehmen, und den Flächeninhalt $F$ des entsprechenden asymptotischen Raums der Hyperbel durch Einschreibung geradliniger Trapezia und anderer Figuren in denselben so genau als nur irgend möglich annähernd zu bestimmen, ungefähr ganz auf dieselbe Weise, wie der Feldmesser die Flächenräume der von ihm aufgenommenen, von einem bestimmten Gesetze nicht folgenden Curven be-

gränzten Grundstücke zu bestimmen gewohnt ist. Vielleicht möchte es selbst eine gute, die Schüler, welche Sinn für dergleichen Dinge haben, gewiss interessirende Aufgabe sein, wenn sie veranlasst würden, das hyperbolische Flächenstück $F$ und ein der Grösse nach bekanntes Quadrat aus recht gleichförmig dichtem Papier oder einer anderen recht gleichförmig dichten Substanz genau auszuschneiden, beide Figuren auf der chemischen Waage mit der grössten Genauigkeit zu wiegen, und aus dem dadurch bekannt werdenden Verhältniss der Gewichte und dem bekannten Flächenraume des Quadrats den gesuchten Flächeninhalt des hyperbolischen Stücks $F$ zu ermitteln. Dergleichen Uebungen scheinen mir auf Realschulen und ähnlichen Lehranstalten, wo der praktische Sinn geweckt und gekräftigt, aber auf der anderen Seite auch durch die strengste Theorie im eigentlichen Sinne geschult werden soll, einen unbeschreiblich grossen methodischen und didaktischen Werth zu haben, weshalb man mir es verzeihen möge, dass ich mir im Interesse solcher Lehranstalten in dieser Zeitschrift öfters eine Hinweisung auf solche Uebungen erlaube. Hat der Schüler nun aber durch eine der obigen Methoden den Flächeninhalt $F$ so genau als möglich ermittelt, natürlich immer nur näherungsweise, was hier aber keineswegs ein methodischer Fehler ist, da ja alle Methoden überhaupt nur eine annähernde Bestimmung der Grösse $C$ gestatten, so hat er, wenn er aus der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$F=\tfrac{1}{4}Cab\log\frac{X}{x}$$

die Formel

$$C=\frac{4F}{ab\log\frac{X}{x}}$$

ableitet, alle Data, welche zur Bestimmung der Constanten $C$ erforderlich sind. Der Schüler wird zugleich in für ihn lehrreicher Weise nicht übersehen, und von dem einsichtigen Lehrer besonders darauf hingewiesen werden, dass dieses letztere Verfahren, die mathematische Constante $C$ zu bestimmen, in seinem Wesen ganz dasselbe ist, dessen die Naturlehre sich überall zur Bestimmung der in dieser Wissenschaft so häufig vorkommenden und so wichtigen physikalischen Constanten bedient. An dem unsterblichen Gauss ist es mir immer als eine im höchsten Grade zu bewundernde, und insbesondere von mir selbst am meisten an diesem seltenen Manne bewunderte Eigenschaft erschienen, dass er in einem Maasse, wie mir dies von keinem anderen grossen

Mathematiker bekannt ist, die strengste und tiefsinnigste Theorie mit der fruchtreichsten und weitgreifendsten Praxis zu verbinden verstand, ein grossartiges Beispiel, welches unsere Schulmänner wohl veranlassen sollte, dieser Seite des mathematischen Unterrichts eine weit grössere Beachtung zu widmen, als dies leider bis jetzt geschieht; der Erfolg des mathematischen Unterrichts, namentlich auf Realschulen und ähnlichen Lehranstalten, würde dann gewiss in vielen Beziehungen ein ganz anderer sein, wie jetzt *).

---

*) Ich habe schon oben erinnert, dass mittelst der Formel

$$C = \text{Lim}\,\frac{\omega^2 - 1}{\omega \log \omega},$$

für ein der Einheit sich näherndes $\omega$, der Werth von $C$ mittelst einer schnellen Annäherung nicht gefunden werden könne. Setzt man z. B.

$$\omega = 0{,}999999,$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\log \omega &= 0{,}9999996 - 1 = -0{,}0000004 \\
\log \log \omega &= \underline{0{,}6020600 - 7_n} \\
\log . \omega \log \omega &= 0{,}6020596 - 7_n \\
\log . \omega^2 &= 0{,}9999992 - 1 \\
\omega^2 &= 0{,}9999982 \\
\omega^2 - 1 &= -0{,}0000018 \\
\log(\omega^2 - 1) &= 0{,}2552725 - 6_n \\
\log . \omega \log \omega &= \underline{0{,}6020596 - 7_n} \\
\log C &= 0{,}6532129 \\
C &= 4{,}500004.
\end{aligned}$$

Durch die Methoden, von denen in II. die Rede sein wird, hat man gefunden:

$$C = 4{,}6051702$$

und wird also bei der Vergleichung dieses richtigen Werthes von $C$ mit dem durch die vorhergehende Methode gefundenen Näherungswerthe die obige Bemerkung gewiss vollkommen bestätigt finden. Will man daher nicht bis zu den in II. entwickelten Methoden fortschreiten, so scheint mir immer eine solche geometrische Methode, wie die, von welcher oben die Rede gewesen ist, um zu einer genäherten Kenntniss von $C$ zu gelangen, für Anfänger die zweckmässigste und zugleich lehrreichste zu sein.

Man pflegt die Formel

$$F=\tfrac{1}{4}Cab\log\frac{X}{x}$$

noch auf einen andern Ausdruck zu bringen. Bestimmt man nämlich die Zahl $e$ so, dass

$$\log e=\frac{1}{\frac{1}{2}C}=\frac{2}{C}$$

ist, und nimmt die so bestimmte Zahl $e$ als Basis eines logarithmischen Systems an, welches man das hyperbolische Logarithmensystem zu nennen pflegt, so ist, wenn man die Logarithmen in Bezug auf dieses System durch loghyp bezeichnet:

$$\frac{X}{x}=e^{\text{loghyp}\,\frac{X}{x}},$$

also, wenn man auf beiden Seiten die durch log. bezeichneten Logarithmen nimmt:

$$\log\frac{X}{x}=\text{loghyp}\,\frac{X}{x}.\log e,$$

folglich nach dem Obigen:

$$F=\tfrac{1}{4}Cab\log e.\text{loghyp}\,\frac{X}{x}.$$

Wegen der Gleichung

$$\log e=\frac{2}{C}$$

ist aber $C\log e=2$, also:

$$F=\tfrac{1}{2}ab\,\text{loghyp}\,\frac{X}{x}.$$

Bezeichnet man in Taf. I. Fig. 4. a. den Inhalt des hyperbolischen Flächenstücks $\overline{ABPQ}$ durch $\mathfrak{F}$, so ist nach vorstehender Gleichung:

$$\mathfrak{F}=\tfrac{1}{2}ab\,\text{loghyp}\,\frac{x}{\overline{CB}}.$$

Nun ist aber $\overline{AB}=\overline{CB}$, und bekanntlich

$$\overline{CB}.\overline{AB}=\overline{CB}^2=\frac{a^2+b^2}{4},$$

also

$$\overline{CB}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{F}=\tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{loghyp}\,\frac{2x}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Zieht man die Linie $\overline{CP}$, so ist

$$\Delta\,\overline{CAB}=\Delta\,\overline{CPQ},$$

weil bekanntlich

$$\overline{CB}.\overline{AB}=\overline{CQ}.\overline{PQ}$$

ist; also ist offenbar:

$$\overline{CAP}=\overline{ABPQ}=\tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{loghyp}\,\frac{2x}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist $a=b$, $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$, also

$$\mathfrak{F}=\tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{loghyp}\,\frac{x\sqrt{2}}{a}.$$

Für

$$\overline{CB}=\overline{AB}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=1$$

ist bei der gleichseitigen Hyperbel

$$\frac{\sqrt{2a^2}}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}=1,\quad \tfrac{1}{2}a^2=1;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{F}=\overline{ABPQ}=\mathrm{loghyp}\,x=\mathrm{loghyp}\,\overline{CQ}.$$

Wegen dieser Beziehung zwischen der Abscisse $\overline{CQ}$ und dem Flächenstück $\overline{ABPQ}$ bei der gleichseitigen Hyperbel heissen die durch loghyp. bezeichneten Logarithmen hyperbolische Logarithmen, deren Basis $e$ nach dem Obigen durch die Gleichung

$$\log e=\frac{2}{C}=2\,\mathrm{Lim}\,\frac{\omega\log\omega}{\omega^2-1},$$

für ein der Einheit sich in's Unendliche näherndes $\omega$, bestimmt wird.

Bezeichnet man in Taf. I. Fig. 4. b. den Flächeninhalt des hyperbolischen Stücks $\overline{ABPQ}$ wieder durch $\mathfrak{F}$, indem zugleich auch wieder $\overline{CQ}=x$ ist, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{F}=\tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{loghyp}\frac{\overline{CB}}{x},$$

also

$$\mathfrak{F}=\tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{loghyp}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2x},$$

und, wenn man die Linie $CP$ zieht, ganz auf ähnliche Art wie vorher auch

$$\overline{CAP}=\overline{ABPQ}=\tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{loghyp}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2x}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist

$$\mathfrak{F}=\tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{loghyp}\frac{a}{x\sqrt{2}}.$$

Für

$$\overline{CB}=\overline{AB}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=1$$

ist bei der gleichseitigen Hyperbel:

$$\mathfrak{F}=\overline{ABPQ}=\mathrm{loghyp}\,\frac{1}{x}=\mathrm{loghyp}\,\frac{1}{\overline{CQ}}$$

oder

$$\mathfrak{F}=\overline{ABPQ}=-\mathrm{loghyp}\,x=-\mathrm{loghyp}\,\overline{CQ}.$$

Bezeichnet man in Taf. I. Fig. 5. das hyperbolische Flächenstück $\overline{APR}$ durch $F_1$, so ist nach dem Vorhergehenden, wenn jetzt $\overline{CR}=x$, $\overline{PR}=y$ gesetzt wird:

$$F_1=\Delta\,\overline{CPR}-\overline{CAP}=\tfrac{1}{2}xy-\tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{loghyp}\frac{2.\overline{CQ}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Es ist aber

$$\overline{CA}:\overline{CD}=\overline{CR}:\overline{CS},$$

$$\overline{CA}:\overline{AD}=\overline{CR}:\overline{RS};$$

also

$$a:\sqrt{a^2+b^2}=x:\overline{CS},$$

$$a:b\qquad=x:\overline{RS};$$

folglich

$$\overline{CS}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x,\quad \overline{RS}=\frac{b}{a}x.$$

Nun ist

$$\overline{SP}=\overline{RS}-\overline{PR}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$$

und

$$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{SP}:\left\{\begin{matrix}\overline{PQ}\\ \overline{SQ}\end{matrix}\right. \text{*)},$$

d. i.

$$b:\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}=2b:\sqrt{a^2+b^2}=\overline{SP}:\left\{\begin{matrix}\overline{PQ}\\ \overline{SQ}\end{matrix}\right.,$$

also

$$\left.\begin{matrix}\overline{PQ}\\ \overline{SQ}\end{matrix}\right\}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b}.\overline{SP}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}(x-\sqrt{x^2-a^2}),$$

und folglich

$$\overline{CQ}=\overline{CS}-\overline{SQ}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}(x+\sqrt{x^2-a^2}).$$

Also ist:

$$\overline{CQ}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}(bx+ay),$$

$$\overline{PQ}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}(bx-ay);$$

woraus auch

$$\overline{CQ}+\overline{PQ}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x,$$

$$\overline{CQ}-\overline{PQ}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}y,$$

$$\overline{CQ}.\overline{PQ}=\frac{a^2+b^2}{4},$$

*) Weil $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{BD}$ ist, so ist auch $\overline{PQ}=\overline{SQ}$.

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{PQ}}=\frac{bx+ay}{bx-ay},$$

$$\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2=\frac{a^2+b^2}{4}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$\overline{CQ}^2-\overline{PQ}^2=\frac{a^2+b^2}{ab}xy$$

folgt, was hier nur beiläufig bemerkt sein mag. Führt man jetzt

$$\overline{CQ}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}(bx+ay)$$

in den obigen Ausdruck von $F_1$ ein, so erhält man:

$$F_1=\tfrac{1}{2}xy-\tfrac{1}{2}ab\,\text{loghyp}\,\frac{bx+ay}{ab}$$

oder

$$F_1=\tfrac{1}{2}xy-\tfrac{1}{2}ab\,\text{loghyp}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Wenn $N$ eine beliebige positive Zahl bezeichnet, so ist immer

$$N=e^{\text{loghyp}\,N},$$

also, wenn man auf beiden Seiten die durch log. bezeichneten Logarithmen nimmt:

$$\log N=\text{loghyp}\,N.\log e,$$

folglich

$$\text{loghyp}\,N=\frac{\log N}{\log e},$$

mittelst welcher Formel loghyp $N$ immer aus log $N$ leicht berechnet werden kann, weil die mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel

$$\log e=\frac{2}{C}$$

zu bestimmende Zahl $e$, eben so wie die Constante $C$, als bekannt zu betrachten ist. Auch kann man unmittelbar setzen:

$$\text{loghyp}\,N=\tfrac{1}{2}C\log N,$$

was wir der Kürze wegen nicht weiter noch besonders in die obigen Formeln einführen wollen.

---

## II.

### Elementare Theorie der hyperbolischen oder natürlichen Logarithmen, namentlich der Entwickelung derselben in Reihen.

Die in Taf. I. Fig. 6. dargestellte Hyperbel sei gleichseitig, und wie früher werde

$$\overline{AB}=\overline{CB}=1$$

gesetzt.

Setzt man dann $\overline{BQ}=x$, so ist in Taf. I. Fig. 6. a. die Abscisse $\overline{CQ}=1+x$, und da nun nach I. in diesem Falle

$$\overline{ABPQ}=\operatorname{loghyp}\overline{CQ}$$

ist, so ist

$$\overline{ABPQ}=\operatorname{loghyp}(1+x).$$

Theilt man jetzt $\overline{BQ}$ in $n$ gleiche Theile und macht die Construction ferner wie die Figur zeigt, so erhellet, weil bekanntlich allgemein bei der gleichseitigen Hyperbel unter den gemachten Voraussetzungen

$$\overline{CQ}.PQ=\frac{a^2+b^2}{4}=1$$

ist, auf der Stelle, dass für ein in's Unendliche wachsendes $n$

$$\overline{ABPQ}=\operatorname{Lim}\left\{\begin{array}{r}\frac{x}{n}.1+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{n}}+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x}{n}}\\ +\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{3x}{n}}\\ \text{u. s. w.}\\ +\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{(n-1)x}{n}}\end{array}\right\}$$

oder

$$\overline{ABPQ}=\text{Lim}.\frac{x}{n}\left\{1+\frac{1}{1+\frac{x}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2x}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3x}{n}}\right.$$

u. s. w.

$$\left.+\frac{1}{1+\frac{(n-1)x}{n}}\right\}$$

ist. Nehmen wir nun aber an, dass $x \overline{\overline{<}} 1$ sei, so sind die sämmtlichen Brüche $\frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \frac{3x}{n}, \frac{4x}{n}, \ldots, \frac{(n-1)x}{n}$ offenbar kleiner als die Einheit, und nach einem bekannten Elementarsatze aus der Lehre von den geometrischen Progressionen*) ist folglich:

$$\overline{ABPQ}=\text{Lim}.\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l} 1 \\ +1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}-\frac{x^3}{n^3}+\frac{x^4}{n^4}-\ldots \\ +1-\frac{2x}{n}+\frac{2^2x^2}{n^2}-\frac{2^3x^3}{n^3}+\frac{2^4x^4}{n^4}-\ldots \\ +1-\frac{3x}{n}+\frac{3^2x^2}{n^2}-\frac{3^3x^3}{n^3}+\frac{3^4x^4}{n^4}-\ldots \\ \text{u. s. w.} \\ +1-\frac{(n-1)x}{n}+\frac{(n-1)^2x^2}{n^2}-\frac{(n-1)^3x^3}{n^3}+\frac{(n-1)^4x^4}{n^4}-\ldots \end{array}\right\}$$

---

*) Bekanntlich ist nach der Summation der geometrischen Reihen

$$1+u+u^2+u^3+\ldots+u^n=\frac{1-u^{n+1}}{1-u}=\frac{1}{1-u}-\frac{u^{n+1}}{1-u}.$$

Ist nun der absolute Werth von $u$ kleiner als die Einheit, so nähert $\frac{u^{n+1}}{1-u}$ sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade, wenn $n$ in's Unendliche wächst. Also nähert $\frac{1}{1-u}-\frac{u^{n+1}}{1-u}$ oder $1+u+u^2+u^3+\ldots+u^n$ sich der Gränze $\frac{1}{1-u}$ bis zu jedem beliebigen Grade, wenn $n$ in's Unendliche wächst. Folglich ist

$$1+u+u^2+u^3+u^4+\ldots=\frac{1}{1-u},$$

oder, wenn man $-u$ für $u$ setzt,

$$1-u+u^2-u^3+u^4-\ldots=\frac{1}{1+u}.$$

oder, wenn man die Vertikalreihen summirt:

$$\overline{ABPQ} = \text{Lim.}\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l} n - \frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n}x \\ + \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^2}x^2 \\ - \frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3}{n^3}x^3 \\ + \frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^4}x^4 \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

also:

$$\begin{aligned} \overline{ABPQ} = x - x^2\,\text{Lim}\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2} \\ + x^3\,\text{Lim}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} \\ - x^4\,\text{Lim}\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3}{n^4} \\ + x^5\,\text{Lim}\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^5} \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

für ein in's Unendliche wachsendes $n$. Weil nun nach dem in der Einleitung angeführten sehr wichtigen arithmetischen Satze allgemein

$$\text{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$$

ist, immer für ein in's Unendliche wachsendes $n$, so ist

$$\overline{ABPQ} = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der oben gefundenen Gleichung

$$\overline{ABPQ} = \text{loghyp}(1+x),$$

so erhält man unmittelbar:

$$\text{loghyp}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots,$$

vorausgesetzt, dass $x \overline{\overline{<}} 1$ ist.

In Taf. I. Fig. 6. b. ist, wenn wieder $\overline{BQ}=x$ gesetzt wird, wo $x<1$ *) ist, $\overline{CQ}=1-x$; und da nun nach I. in diesem Falle

$$\overline{ABPQ}=-\operatorname{loghyp}\overline{CQ}$$

ist, so ist

$$\overline{ABPQ}=-\operatorname{loghyp}(1-x).$$

Macht man jetzt die Construction, welche durch die Figur selbst hinreichend erläutert wird, wieder auf ganz ähnliche Art wie vorher, so ist offenbar für ein in's Unendliche wachsendes $n$:

$$\overline{ABPQ}=\operatorname{Lim}\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{n}.1+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{n}}+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{2x}{n}}\\ +\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{3x}{n}}\\ \text{u. s. w.}\\ +\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{(n-1)x}{n}}\end{array}\right\}$$

oder

$$\overline{ABPQ}=\operatorname{Lim}.\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{1-\frac{x}{n}}+\frac{1}{1-\frac{2x}{n}}+\frac{1}{1-\frac{3x}{n}}\\ \text{u. s. w.}\\ +\frac{1}{1-\frac{(n-1)x}{n}}\end{array}\right\},$$

also, weil, wegen $x<1$, offenbar die Brüche

$$\frac{x}{n},\ \frac{2x}{n},\ \frac{3x}{n},\ \frac{4x}{n},\ldots,\ \frac{(n-1)x}{n}$$

*) Dass man in diesem Falle nicht wie im vorhergehenden auch $x=1$ setzen kann, erhellet auf der Stelle, weil für diesen Werth von $x$ der hyperbolische Flächenraum, auf den hier Alles ankommt, keine endliche völlig bestimmte Grösse mehr sein würde, was hier nur so lange der Fall ist, als $x<1$ ist.

sämmtlich kleiner als die Einheit sind, nach dem schon oben angewandten Satze von den geometrischen Progressionen:

$$\overline{ABPQ}=\text{Lim}.\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l}1\\+1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{x^3}{n^3}+\frac{x^4}{n^4}+\ldots\\+1+\frac{2x}{n}+\frac{2^2x^2}{n^2}+\frac{2^3x^3}{n^3}+\frac{2^4x^4}{n^4}+\ldots\\+1+\frac{3x}{n}+\frac{3^2x^2}{n^2}+\frac{3^3x^3}{n^3}+\frac{3^4x^4}{n^4}+\ldots\\\text{u. s. w.}\\+1+\frac{(n-1)x}{n}+\frac{(n-1)^2x^2}{n^2}+\frac{(n-1)^3x^3}{n^3}+\frac{(n-1)^4x^4}{n^4}+\ldots\end{array}\right\}$$

oder, wenn man die Vertikalreihen summirt:

$$\overline{ABPQ}=\text{Lim}.\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l}n+\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n}x\\+\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^2}x^2\\+\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3}{n^3}x^3\\+\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^4}x^4\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

also

$$\begin{aligned}\overline{ABPQ}=x&+x^2\text{Lim}\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}\\&+x^3\text{Lim}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}\\&+x^4\text{Lim}\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3}{n^4}\\&+x^5\text{Lim}\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^5}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und folglich nach dem schon oben angewandten arithmetischen Satze:

$$\overline{ABPQ} = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der oben gefundenen Gleichung

$$\overline{ABPQ} = -\operatorname{loghyp}(1-x),$$

so erhält man:

$$-\operatorname{loghyp}(1-x) = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots.$$

oder

$$\operatorname{loghyp}(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.,$$

wobei bekanntlich vorausgesetzt worden ist, dass $x < 1$ sei.

Es ist also hiernach, indem man $x$ immer positiv nimmt:

$$\operatorname{loghyp}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

für $x \overset{=}{<} 1$, und

$$\operatorname{loghyp}(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

für $x < 1$. Nimmt man nun aber $x$ positiv und negativ, so kann man diese beiden Gleichungen offenbar in die eine Gleichung

$$\operatorname{loghyp}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

zusammenfassen, wenn man nur voraussetzt, dass $x$ stets grösser als $-1$ und nicht grösser als $+1$ sei, was man in der Kürze auf folgende Art zu schreiben pflegt:

$$\operatorname{loghyp}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

$$\{-1 < x \overset{=}{<} +1\}$$

Bezeichnen wir die Basis der durch loghyp bezeichneten hyperbolischen Logarithmen wie in I. durch $e$, und jetzt ferner die Basis der durch log bezeichneten Logarithmen durch $B$, so ist, wenn $N$ eine beliebige positive Zahl bezeichnet:

$$N = B^{\log N}, \quad N = e^{\operatorname{loghyp} N};$$

also

$$B^{\log N} = e^{\operatorname{loghyp} N};$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung zuerst die durch log, dann die durch loghyp bezeichneten Logarithmen nimmt:

$$\log N . \log B = \operatorname{loghyp} N . \log e,$$

$$\log N . \operatorname{loghyp} B = \operatorname{loghyp} N . \operatorname{loghyp} e;$$

also, weil $\log B = 1$, $\operatorname{loghyp} e = 1$ ist:

$$\log N = \log e . \operatorname{loghyp} N,$$

$$\log N = \frac{1}{\operatorname{loghyp} B} . \operatorname{loghyp} N;$$

woraus sich die Gleichung

$$\log e = \frac{1}{\operatorname{loghyp} B}$$

oder

$$\log e . \operatorname{loghyp} B = 1$$

ergiebt. Setzt man der Kürze wegen

$$M = \log e = \frac{1}{\operatorname{loghyp} B},$$

so ist nach dem Obigen:

$$\log N = M \operatorname{loghyp} N,$$

und man muss folglich die hyperbolischen Logarithmen aller Zahlen mit der für jedes logarithmische System mit der Basis $B$ constanten Zahl $M$ multipliciren, um die Logarithmen für die Basis $B$ zu erhalten, so dass also die hyperbolischen Logarithmen gewissermassen die Grundlage für alle übrigen logarithmischen Systeme bilden, weshalb man die ersteren auch natürliche Logarithmen genannt hat und durch das mit loghyp. gleichbedeutende Zeichen lognat. zu bezeichnen pflegt. Die Zahl

$$M = \log e = \frac{1}{\operatorname{loghyp} B} = \frac{1}{\operatorname{lognat} B}$$

heisst der Modulus des logarithmischen Systems mit der Basis $B$.

Weil nach I. bekanntlich

$$C \log e = 2 \quad \text{oder} \quad C = \frac{2}{\log e}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$C=\frac{2}{M} \text{ oder } \tfrac{1}{2}C=\frac{1}{M},$$

und die Constante $C$ kann also aus dem Modulus $M$ immer leicht berechnet werden.

Der Modulus $M$ wird aber mittelst der Formel

$$M=\frac{1}{\operatorname{loghyp} B}=\frac{1}{\operatorname{lognat} B}$$

auf folgende Art berechnet.

Es sei $N$ wieder eine beliebige positive Zahl, die grösser als Null ist. Setzt man

$$N=\frac{1+x}{1-x}$$

und bestimmt aus dieser Gleichung $x$, so erhält man:

$$x=\frac{N-1}{N+1},$$

wo der absolute Werth von $x$ offenbar immer kleiner als die Einheit ist, und folglich

$$N=\frac{1+\frac{N-1}{N+1}}{1-\frac{N-1}{N+1}},$$

also

$$\operatorname{lognat} N=\operatorname{lognat}\left(1+\frac{N-1}{N+1}\right)-\operatorname{lognat}\left(1-\frac{N-1}{N+1}\right).$$

Nun ist aber nach dem Obigen, weil der absolute Werth von $\frac{N-1}{N+1}$ kleiner als die Einheit ist:

$$\operatorname{lognat}\left(1+\frac{N-1}{N+1}\right)=\frac{N-1}{N+1}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3-\tfrac{1}{4}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^4+\ldots,$$

$$\operatorname{lognat}\left(1-\frac{N-1}{N+1}\right)=-\frac{N-1}{N+1}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3-\tfrac{1}{4}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^4+\ldots,$$

also, wenn man subtrahirt, nach dem Obigen:

$$\operatorname{lognat} N=2\left\{\frac{N-1}{N+1}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^5+\tfrac{1}{7}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^7+\ldots\right\}$$

und, wenn man hierin $N^2$ für $N$ setzt, wo $N$ wieder eine Null übersteigende positive Zahl sein soll, weil

$$\text{lognat}.N^2 = 2\,\text{lognat}\,N$$

ist:

$$\text{lognat}\,N = \frac{N^2-1}{N^2+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{N^2-1}{N^2+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{N^2-1}{N^2+1}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{N^2-1}{N^2+1}\right)^7 + \ldots,$$

mittelst welcher Formel man den natürlichen oder hyperbolischen Logarithmus jeder Null übersteigenden positiven Zahl $N$ berechnen kann, so dass also diese Formel die eigentliche Grundlage der Berechnung der Tafeln der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bildet.

Will man $\log N$ für die Basis $B$ finden, so muss man den entsprechenden Modulus $M$ kennen, weil dann

$$\log N = M\,\text{lognat}\,N$$

ist. Nun ist aber nach dem Obigen

$$M = \frac{1}{\text{lognat}\,B},$$

also nach dem Vorhergehenden, wenn man $B$ für $N$ setzt:

$$M = \frac{1}{\frac{B^2-1}{B^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^7 + \ldots}.$$

Ueberhaupt hat man für $\log N$, wo immer $B$ die Basis ist, den folgenden äusserst merkwürdigen Ausdruck:

$$\log N = \frac{\frac{N^2-1}{N^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{N^2-1}{N^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{N^2-1}{N^2+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{N^2-1}{N^2+1}\right)^7 + \ldots}{\frac{B^2-1}{B^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^7 + \ldots},$$

mittelst welches sich der Logarithmus jeder beliebigen Null übersteigenden positiven Zahl $N$ für jede beliebige Basis $B$ berechnen lässt, und auf dem also die Berechnung der logarithmischen Tafeln für alle logarithmischen Systeme lediglich beruhet.

Was die Constante $C$ betrifft, so ist nach dem Obigen bekanntlich

$$C = \frac{2}{M},$$

also

$$C = 2\left\{\frac{B^2-1}{B^2+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^5 + \ldots\right\},$$

mittelst welcher Formel der Werth der Constanten $C$ für jedes beliebige logarithmische System mit der Basis $B$ berechnet werden kann.

Aus dem Bisherigen sieht man, dass man die Lehre von der Quadratur der Hyperbel, und in Verbindung damit die Theorie der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen, hauptsächlich deren Darstellung durch unendliche Reihen, so wie die darauf gegründete vollständige Theorie der Berechnung der logarithmischen Tafeln, durch ganz elementare Betrachtungen mit einer den Ansprüchen der neueren Analysis vollständig genügenden Strenge, und einer vollständigen Uebereinstimmung mit den durch diese letztere Wissenschaft gewonnenen Resultaten, entwickeln kann, wozu man bisher noch keine dem Zweck entsprechende und den neueren strengeren Ansprüchen genügende elementare Methode besass. Ich bin daher geneigt, es für eine wirkliche Verbesserung und wesentliche Vervollständigung des mathematischen Elementar-Unterrichts zu halten, wenn man sich entschliesst, das Obige in denselben aufzunehmen, wozu ich dasselbe tüchtigen, mit den neueren Ansprüchen der Wissenschaft gehörig vertrauten Lehrern daher bestens zu empfehlen mir erlaube.

---

## Anhang.

Wenn auch die elementare Bestimmung des Inhalts des körperlichen Inhalts eines durch Umdrehung einer Ellipse oder Hyperbel um die Hauptaxe entstandenen Konoids allgemein bekannt ist, so will ich dieselbe doch, der Vollständigkeit der vorhergehenden elementaren Betrachtungen wegen, dem Obigen in der Kürze noch beifügen.

Der körperliche Inhalt des durch Umdrehung von $APQ$ (Taf. I. Fig. 7.) um $AP = x$ entstandenen Körpers sei $V$, so ist, wenn $p$ den Parameter der Ellipse oder Hyperbel bezeichnet, und im Folgenden sich immer die oberen Zeichen auf die Ellipse, die unteren auf die Hyperbel beziehen, indem man sich $x$ in $n$ gleiche Theile getheilt denkt, nach den bekannten Gleichungen dieser Curven in Bezug auf den Scheitel als Anfang der Coordinaten, für ein in's Unendliche wachsendes $n$ offenbar:

$$V=\text{Lim}.\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l}p\left(\frac{x}{n}\mp\frac{x^2}{2n^2a}\right)+p\left(\frac{2x}{n}\mp\frac{2^2x^2}{2n^2a}\right)\\ \quad+p\left(\frac{3x}{n}\mp\frac{3^2x^2}{2n^2a}\right)\\ \quad+p\left(\frac{4x}{n}\mp\frac{4^2x^2}{2n^2a}\right)\\ \quad\text{u. s. w.}\\ \quad+p\left(\frac{nx}{n}\mp\frac{n^2x^2}{2n^2a}\right)\end{array}\right\}\pi$$

$$=\text{Lim}.\pi px^2\left\{\begin{array}{l}\frac{1+2+3+4+\ldots.+n}{n^2}\\ \mp\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots.+n^2}{n^3}.\frac{x}{2a}\end{array}\right\}$$

$$=\pi px^2\left\{\begin{array}{l}\text{Lim}\frac{1+2+3+4+\ldots.+n}{n^2}\\ \mp\frac{x}{2a}\text{Lim}\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots.+n^2}{n^3}\end{array}\right\},$$

also nach dem aus der Einleitung bekannten wichtigen arithmetischen Satze:

$$V=\pi px^2(\tfrac{1}{2}\mp\frac{x}{2a}.\tfrac{1}{3})=\tfrac{1}{2}\pi px^2(1\mp\frac{x}{3a}),$$

oder auch

$$V=\pi\frac{b^2x^2}{a}(1\mp\frac{x}{3a}),$$

weil bekanntlich für die Ellipse und Hyperbel

$$p=\frac{2b^2}{a}$$

ist. Auch hier sieht man von Neuem, wie ungemein leicht der mehr erwähnte arithmetische Satz zu den gesuchten Resultaten führt, und wie sehr derselbe daher die Aufnahme in die Elemente für sich in Anspruch zu nehmen berechtigt ist.

# VI.

# Zwei geometrische Aufgaben.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Ph. Wolfers*

zu Berlin.

---

In dem letzten Abschnitte von Leonhardi Euleri „Institutionum calculi integralis volumen primum" wird die Auflösung der Differential-Gleichungen, in denen die Differentiale zu mehreren Dimensionen ansteigen, behandelt. Den dort zur Erläuterung der Methoden angeführten verschiedenen Beispielen will ich die zwei folgenden hinzufügen, welche auch als geometrische Aufgaben von einigem Interesse sein dürften.

### Aufgabe I.

Man soll die Curve bestimmen, welche die rechtwinkligen Coordinaten $AX$ und $AY$ in gleichen Abständen $=a$ vom Anfangspunkte berührt und die Eigenschaft hat, dass ihre Tangente stets von $AX$ und $AY$ Stücke abschneidet, deren Summe constant und $=a$ ist.

### Auflösung.

Ist $C$ (Taf. I. Fig. 8.) ein beliebiger Punkt der Curve, die Abscisse $AB=x$, die Ordinate $BC=y$, $ED$ die Tangente, so soll

$$AD+BE=a$$

sein. Bezeichnet man nun den Winkel $EDX$ durch $\alpha$, so hat man

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{dy}{dx},$$

und es wird die Bedingungsgleichung

$$x-y:\frac{dy}{dx}+y-x\frac{dy}{dx}=a,$$

oder, indem man $dy=pdx$ setzt,

$$1)\qquad px-y+py-xp^2=ap.$$

Differentiirt man diese Gleichung und setzt statt $dy$ stets seinen Werth $pdx$, so erhält man ohne Schwierigkeit

$$2)\qquad (x+y-2px-a)\,dp=0,$$

welcher einmal Genüge geschieht, indem man

$$dp=0,\ \text{also}\ p=\text{Const.}=\gamma$$

annimmt. Substituirt man diesen Werth von $p$ in 1), so erhält man als Gleichung der gesuchten Curve

$$3)\qquad y=\gamma x+\frac{a\gamma}{\gamma-1},$$

welche keine krumme, sondern eine gerade Linie ausdrückt. Da nun für $x=0$ $y=a$ und für $x=a$ $y=0$ werden soll, so wird aus 3) im ersten Falle

$$a=\frac{a\gamma}{\gamma-1},\ \text{also}\ \gamma=\infty,$$

und im zweiten

$$0=\gamma a+\frac{a\gamma}{\gamma-1},\ \text{also}\ \gamma=0.$$

Die Constante $\gamma$ wird mithin alle Werthe von 0 bis $\infty$ annehmen können, und so alle die geraden Linien darstellen, welche $DE$ ähnlich so gezogen werden, dass stets

$$AE+AD=a$$

werde.

Aus der Gleichung 2) folgt aber zweitens die Bedingung

$$x+y-2px-a=0,$$

und wenn man diese mit 1) verbindet:

$$p^2x-y=0\ \text{oder}\ p=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}},$$

und aus der letzten durch Integration

$$4)\qquad \sqrt{y}=\sqrt{x}+\beta.$$

Hier ist $\beta$ die Constante der Integration, und da wieder für $x=0$ $y=a$ und für $x=a$ $y=0$ wird, offenbar

$$\beta = \pm\sqrt{a}.$$

Macht man daher nun die Gleichung

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} \pm \sqrt{a}$$

rational, so kommt man zu der Gleichung

$$5) \qquad y^2 - 2xy + x^2 - 2ay - 2ax + a^2 = 0,$$

welche offenbar einer Parabel angehört. Vergleicht man sie nämlich mit der allgemeinen Gleichung vom zweiten Grade:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

so ist hier:

$$B^2 = 4AC.$$

## Aufgabe II.

Man soll die Curve bestimmen, welche, unter übrigens gleichen Umständen wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Eigenschaft hat, dass die Tangente einen constanten Werth $=a$ erhält.

### Auflösung.

Aus der vorigen Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{dy}{dx} = -p$$

folgt sogleich

$$\sin\alpha = \frac{\pm p}{\sqrt{1+p^2}} \text{ und } \cos\alpha = \frac{\mp 1}{\sqrt{1+p^2}},$$

und es wird alsdann die Bedingung der Aufgabe ausgesprochen durch die Gleichung

$$\frac{y\sqrt{1+p^2}}{p} - x\sqrt{1+p^2} = a$$

oder

$$1) \qquad (y-px)\sqrt{1+p^2} = ap,$$

wo die Wurzel als zweideutig betrachtet werden muss. Differentiirt man diese Gleichung und substituirt statt $dy$ seinen Werth $pdx$, so gelangt man zu der Gleichung

$$\frac{(y-px)pdp}{\sqrt{1+p^2}}-xdp\sqrt{1+p^2}=adp;$$

oder indem man $y$ mittelst 1) eliminirt:

$$dp[a+x(1+p^2)^{\frac{3}{2}}]=0. \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir zunächst

$$dp=0,\quad p=\text{Const.}=\gamma,$$

und so nach 1):

$$y=\gamma x+\frac{a\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}. \tag{3}$$

Da für $x=0$ $y=a$ und für $x=a$ $y=0$, so wird wieder im ersten Falle $\gamma=\infty$ und im zweiten $\gamma=0$, und es drückt daher die Gleichung 3) die unendlich vielen geraden Linien von gleicher Länge $a$ aus, welche man ähnlich wie $DE$ legen kann.

Aus 2) geht aber noch die Bedingung

$$a+x(1+p^2)^{\frac{3}{2}}=0$$

oder

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

hervor. Integrirt man, so wird:

$$y=\beta\pm\sqrt{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3}. \tag{4}$$

Für die bereits mehrmals erwähnten Grenzwerthe von $x$ und $y$ erhalten wir zur Bestimmung der Constanten $\beta$

$$a=\beta\pm a \quad \text{und} \quad 0=\beta;$$

damit also $\beta$ denselben Werth $=0$ erhalte, wenden wir nur das obere Zeichen an und erhalten so als Gleichung der gesuchten Curve:

$$y^2=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3, \tag{5}$$

welche, wenn sie rational werden soll, den sechsten Grad erreicht.

**B e m e r k u n g.**

Zum Schluss möge hier noch angeführt werden, dass diese beiden Aufgaben bei Gelegenheit eines Wegebaues entstanden oder mir wenigstens als solche mitgetheilt worden sind, indem die Ecke, in welcher sich zwei Wege unter rechtem Winkel schneiden, nach der einen oder andern Weise abgestumpft werden sollte.

---

## VII.

# Ueber den Einfluss des Vordertheils und Hintertheils der Schiffe auf den Widerstand des Wassers.

Von
Herrn Geheimen Rath ***Eckhardt***
zu Darmstadt.

---

Schon vor beinahe 80 Jahren haben die französischen Akademiker d'Alembert, Bossut und Condorcet Versuche über den Widerstand des Wassers gegen kleine Schiffchen angestellt, welche mit prismatischen Vorder- und Hintertheilen versehen waren, und in den Memoiren der Pariser Akademie vom Jahre 1778 pag. 353. beschrieben sind. In demselben Bande lieferte Euler eine Theorie dazu, die aber keineswegs mit den Resultaten der Beobachtungen übereinstimmte, und seitdem ist diese wichtige Materie, als zu verwickelt, unerledigt geblieben. Durch eine andere wissenschaftliche Arbeit darauf hingelenkt, unternahm ich es, diese Versuche und Euler's Theorie einer nochmaligen Revision zu unterwerfen, und ich erlaube mir, das, was ich gefunden habe, im Folgenden mitzutheilen. Da diese Entwickelung von Euler wenig bekannt zu sein scheint, indem bei sonst vorzüglichen Schriftstellern, wie Eytelwein, Langsdorf u. A., ganz abweichende Ansichten vorkommen, so halte ich es für angemessen, eine wörtliche Uebersetzung derselben hier vorauszuschicken:

„Es sei $AC$ (Taf. I. Fig. 2.) die Axe des prismatischen Schiffsschnabels, welche die breite Seite desselben $BB$ in $C$ halbirt. Setzen wir diese Axe $AC=a$, die Seite $AB=b$ und den Winkel $BAC=\alpha$, die Tiefe $Aa=c$, so erhalten wir $BC=b\,\mathrm{Sin}\,\alpha$.

Bewegt sich nun der Schiffsschnabel nach der Richtung $AC$ mit einer Geschwindigkeit $=v$, wo $v$ den in einer Sekunde durchlaufenen Raum bezeichnet, und nennen wir die Höhe, von welcher ein Körper in derselben Zeit herabfällt, $=g$, so ergiebt sich die Höhe, welche der Geschwindigkeit $v$ entspricht, $h=\frac{v^2}{4g}$; wenn daher das Wasser in der senkrechten Richtung $MN$ mit der Geschwindigkeit $v$ auf die Fläche $ABba$, deren Inhalt $bc$ ist, einen Stoss ausübt, so würde die Stärke dieses Stosses dem Gewichte einer Wassermasse $=\frac{bcv^2}{4g}$ entsprechen. Da aber dieser Stoss unter einem Winkel $=\alpha$ statt findet, so wird seine Stärke durch $\frac{bcv^2 \operatorname{Sin} \alpha^2}{4g}$ für die senkrechte Richtung $MN$ auf die Fläche $AB$ ausgedrückt werden müssen; hieraus ergiebt sich die Stärke des Parallelstosses in der Richtung $AC = bc \operatorname{Sin} \alpha \frac{v^2 \operatorname{Sin} \alpha^2}{4g}$, wo $bc \operatorname{Sin} \alpha$ die Hälfte der grössten Breite $BB$ ausdrückt. Das Doppelte dieser Kraft $= 2bc \operatorname{Sin} \alpha \frac{v^2 \operatorname{Sin} \alpha^2}{4g}$ giebt denjenigen Theil des Widerstandes, welchen der Stoss des Wassers auf beiden Seiten des Schnabels ausübt, welches vollkommen mit der gewöhnlichen Theorie übereinstimmt." Soweit Euler *).

Da diese letztere Formel nicht mit den Versuchen übereinstimmte, indem für $\alpha=0$ der Widerstand des Wassers nicht ebenfalls $=0$ wurde, so suchte Euler den noch übrig bleibenden Widerstand durch die Reibung des Wassers an dem ganzen Körper zu erklären, und gab dafür eine sehr verwickelte Formel, welche sich ebenfalls in der Ausübung nicht bewährte. Betrachtet man aber den Zweck näher, welchen sich die Akademiker vorgesetzt hatten, so bestand er augenscheinlich darin, die Abnahme des Widerstandes zu bestimmen, welche durch Anbringung von Schnäbeln von verschiedenen Winkeln an der Spitze $A$ bewirkt wird, wenn die Breite des Schiffes $BB$ dieselbe bleibt. Nun ist aber offenbar in der Formel von Euler die Seite $AB$ constant und die Breite $BB$ veränderlich, welche letztere für $\alpha=0$ ebenfalls Null wird, während bei den Versuchen von Bossut das Gegentheil statt fand. Die obige, für das Prisma gefundene Formel ist daher für diesen besonderen Fall nicht anwendbar; dagegen gilt die allgemeine Formel $\frac{bcv^2}{4g} \sin \alpha^3$ für den

*) Mem. de l'Académie des sciences de Paris de 1778. pag. 597.

Parallelstoss in allen denjenigen Fällen, wo die Seite $AB=b$ constant ist, wie z. B. bei dem Steuerruder, und wird als Theorem an die Stelle der bisherigen Annahme gesetzt werden müssen, wonach sich der schiefe Stoss wie die Quadrate der Sinus der Einfallswinkel verhalten sollte.

Um nun dieses Theorem auf die Beobachtungen von Bossut anwenden zu können, müssen wir zuvor den Apparat, welcher dabei angewendet wurde, etwas näher betrachten. Derselbe bestand in einem 4 Fuss langen, 2 Fuss breiten und eben so tiefen Parallelopipedum, an dessen Vorder- und Hinterfläche dreiseitige Prismen mit verschiedenen Winkeln an der Spitze befestigt werden konnten. Dieses Schiffchen wurde mittelst einer Schnur, an welcher ein Gewicht von 162 Pfund hing, in einem 200 Fuss langen und 100 Fuss breiten Wasserbecken fortgezogen, und die Zeit beobachtet, welche dasselbe brauchte, um einen Weg von 96 Fuss zurückzulegen. Nennen wir den Widerstand des Wassers gegen das Schiffchen, wenn weder vorne noch hinten ein Prisma angebracht ist, $=F$, und denjenigen Widerstand des Wassers, wenn blos vorne ein solches Prisma angebracht wird, $=\varphi$, so haben wir, da sich die Widerstände wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, und bei gleichen Wegen die Geschwindigkeiten wie die zum Durchlaufen derselben gebrauchten Zeiten verhalten:

$$F:\varphi=V^2:V'^2=T^2:t^2 \text{ *)},$$

daher $\frac{\varphi}{F}=\frac{t^2}{T^2}$. Mit dieser Formel erhält man den Widerstand der schiefen Flächen in Decimaltheilen des Normalstosses $F$ ausgedrückt, wie er in der Tafel von Bossut pag. 372. der Pariser Memoiren von 1778 angegeben ist und keineswegs mit der obigen Formel von Euler übereinstimmt. Nehmen wir aber den Normalstoss auf die Vorderfläche $F=\frac{2bcv^2}{4g}$ als die constante Einheit an, mit welcher der schiefe Stoss verglichen werden soll (wobei wir den Stoss und Widerstand für gleich annehmen), so ist die Differenz unter dem Normal- und schiefen Stoss nach dem Theorem von Euler:

$$F-\varphi=m(1-\operatorname{Sin}\alpha^3)F,$$

wo $m$ einen besonderen Coefficienten bedeutet, der aus den Beobachtungen bestimmt werden muss und von der Gestalt des schwimmenden Körpers abhängig ist. Hieraus folgt aber:

*) Für gleichförmig beschleunigte Bewegung.

$$F - m(1 - \text{Sin}\,\alpha^3)F = (1 - m + m\,\text{Sin}\,\alpha^3)F = \varphi.$$

Setzen wir $1 - m = C$, so erhalten wir:

$$F(m\,\text{Sin}\,\alpha^3 + C) = \varphi.$$

Aus den Beobachtungen folgt $m = 0,6$ und hieraus $C = 0,4$; daher ist die Formel, welche auf dem Euler'schen Theorem beruht und für die Beobachtungen von Bossut eingerichtet ist:

$$\frac{\varphi}{F} = 0,6\,\text{Sin}\,\alpha^3 + 0,4. \qquad (I)$$

Bestimmen wir nun die Werthe von $\frac{\varphi}{F}$ für die verschiedenen Winkel an der Spitze der Prismen, sowohl aus den Beobachtungen von Bossut, als nach dieser letztern Formel, so ergiebt sich daraus folgende Zusammenstellung:

| Winkel $\alpha$ | Zeitdauer $t$ | Relativ. Widerstand $\frac{\varphi}{F}$ | | Winkel $\alpha$ | Zeitdauer $t$ | Relativ. Widerstand $\frac{\varphi}{F}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Beobacht. | Formel | | | Beobacht. | Formel |
| 90° | 47″,44 | 1,0000 | 1,0000 | 42° | 35″,78 | 0,5689 | 0,5794 |
| 84 | 47,22 | 0,9908 | 0,9892 | 36 | 34,85 | 5397 | 5218 |
| 78 | 46,44 | 9583 | 9610 | 30 | 33,05 | 4853 | 4750 |
| 72 | 45,35 | 9138 | 9160 | 24 | 31,61 | 4440 | 4402 |
| 66 | 43,75 | 8505 | 8566 | 18 | 30,53 | 4142 | 4174 |
| 60 | 41,84 | 7779 | 7894 | 12 | 30,23 | 4061 | 4054 |
| 54 | 39,50 | 6933 | 7174 | 6 | 30,01 | 4003 | 4001 |
| 48 | 38,05 | 0,6433 | 0,6460 | 0 | 30,00 | *nicht beobachtet* | 0,4000 |

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, dass die auf dem Theorem von Euler beruhende Formel (I) nicht wie die bisherigen nur für die grössern Winkel, etwa bis zu 60° herab, mit den Beobachtungen übereinstimmt, sondern selbst für die kleinsten Winkel Resultate liefert, welche mit den angestellten Versuchen im Einklang sind. Diese Uebereinstimmung bürgt nicht blos für die Richtigkeit der zum Grunde gelegten Theorie, sondern giebt auch noch ein schönes Zeugniss für die Sorgfalt und Genauigkeit ab, mit welcher diese Versuche von den französischen Akademikern angestellt worden sind. Es ist nur Schade, dass nicht eben so zahlreiche Versuche auch für den Fall angestellt worden sind,

wo die Prismen am Hintertheile des Schiffchens angebracht waren, indem nur für drei Winkel, nämlich für 48°, 24° und 12°, Beobachtungen vorhanden sind; wir wollen jedoch versuchen, aus diesen wenigen Angaben einige allgemeine Resultate zu ziehen. Betrachten wir das Schiffchen während der Vorwärtsbewegung, so wird man am Hintertheil einen leeren Raum bemerken, den das von vorne nach hinten strömende Wasser auszufüllen sucht. Hierdurch entsteht ein Stoss auf das Hintertheil des Schiffchens, ähnlich dem auf das Vordertheil, nur mit verminderter Geschwindigkeit und in entgegengesetzter Richtung, so dass der Stoss auf das Vordertheil durch den Stoss auf das Hintertheil eine Verminderung erleidet. Für die am Hintertheil angebrachten Prismen giebt daher die Theorie eine ähnliche Formel, wie die oben entwickelte, nur mit einem andern Coefficienten, nämlich:

$$\frac{\varphi'}{F} = m' \operatorname{Sin} \alpha^3 + C'. \qquad \text{(II)}$$

Für $m'$ findet man aus den Beobachtungen den Werth $= \frac{0,5}{3} = 0,167$, woraus $C' = \frac{2,5}{3} = 0,833$ folgt. Man erhält hiermit folgende, mit den Beobachtungen gut übereinstimmende Resultate:

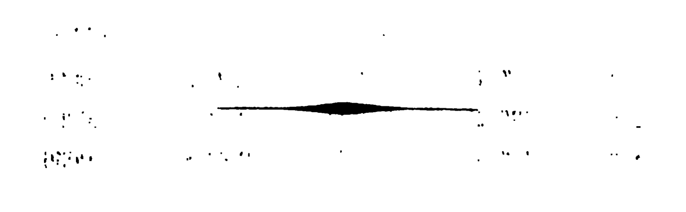
| Winkel | Zeitdauer | Relativer Widerstand $\frac{\varphi'}{F}$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $t$ | Beobacht. | Formel | Differ. |
| 48° | 44″,80 | 0,8918 | 0,9017 | 0,0096 |
| 24° | 43″,85 | 0,8544 | 0,8445 | 0,0099 |
| 12° | 43″,49 | 0,8404 | 0,8348 | 0,0056 |

indem die Abweichung der Formel von den Resultaten der Beobachtungen nur höchstens $\frac{1}{100}$ beträgt, womit man zufrieden sein kann.

Soll endlich die Verminderung des Widerstandes gefunden werden, welche durch gleichzeitige Anbringung von prismatischen Spitzen sowohl am Vordertheil, als am Hintertheil des Schiffchens entsteht, so wird es am bequemsten sein, die Verminderung sowohl für das Vordertheil $1 - \frac{\varphi}{F} = D$, als für das Hintertheil $1 - \frac{\varphi'}{F} = D'$ für die verschiedenen Winkel zu berechnen,

damit man sie in vorkommenden Fällen beliebig combiniren kann. Ich setze eine solche Tabelle zum Schlusse dieser Betrachtungen hierher, welche so lange dienen kann, bis darüber weitere Beobachtungen bekannt werden.

| Halber Winkel an der Spitze $\alpha$ | Verminder. an dem Vordertheil $1-\frac{\varphi}{F}=D$ | Verminder. an dem Hintertheil $1-\frac{\varphi'}{F}=D'$ |
|---|---|---|
| 90° | 0,0000 | 0,0000 |
| 84 | 0,0096 | 0,0028 |
| 78 | 0,0385 | 0,0107 |
| 72 | 0,0838 | 0,0233 |
| 66 | 0,1426 | 0,0396 |
| 60 | 0,2103 | 0,0584 |
| 54 | 0,2823 | 0,0783 |
| 48 | 0,3538 | 0,0983 |
| 42 | 0,4203 | 0,1162 |
| 36 | 0,4782 | 0,1328 |
| 30 | 0,5250 | 0,1458 |
| 24 | 0,5596 | 0,1554 |
| 18 | 0,5823 | 0,1618 |
| 12 | 0,5946 | 0,1652 |
| 6 | 0,5993 | 0,1665 |
| 0 | 0,6000 | 0,1667 |



# VIII.

## Miscellen.

---

Wenn auch die Art, wie die prachtvolle Sternwarte zu Cincinnati in Amerika entstanden ist, gewiss jedem Mathematiker und Astronomen im Allgemeinen bekannt ist, so glaube ich doch, dass es den Lesern des Archivs nicht unangenehm sein wird, wenn ich ihnen darüber die folgenden, aus dem mehrfach interessanten Buche: Wanderungen zwischen Hudson und Mississippi 1851 und 1852, von Moritz Busch. Erster Band. Stuttgart und Tübingen. 1854. S. 218 — S. 223. entlehnten näheren Details mittheile. Grunert.

„Wer da Zweifel hegt, dass die Welt aus Nichts geschaffen wurde, der gehe hin, sehe sich die Sternwarte von Cincinnati an, lasse sich ihre Geschichte erzählen und sage: pater peccavi. Sie ist ihrem Ursprunge nach ein vollständiges Wunder, in ihrem Bestehen ein ruhmvolles Monument der Kühnheit und Unermüdlichkeit ihres Begründers, und in ihrer Ausstattung ein lauter Protest gegen die Ansicht, dass die Amerikaner Verächter der Kunst und Wissenschaft seien. Professor Mitchel, in dessen Kopfe der Plan dazu entsprang, ist einer von den Typen des Yankeethums, an denen man es achten lernt. Zäh wie Gummi, unwiderstehlich wie ein Steinbohrer, in allen Sätteln gerecht, drängen, winden und pressen diese Naturen sich durch jedwedes Hinderniss hindurch und dem Ziele zu, scheine es auch unerreichbar. Immer voll grossartiger Pläne, erkennt ihr eiserner Wille keine Unüberwindlichkeit an, und nie verlegen, baut ihre Klugheit sich Brücken selbst über Unmöglichkeiten. Von armen Eltern stammend und früh verwaist, sah Mitchel sich im zwölften Jahre gezwungen, als Ladendiener in ein Kramgeschäft zu Xenia zu treten, eine Stellung, die seinen aufstrebenden Geist nicht hinderte, fleissig Griechisch und Latein zu treiben. Fünfzehn Jahre alt bewarb er sich um eine Freistelle in der Kriegsschule zu Westpoint, und als er diese durch Verwendung von Gönnern erlangt, wanderte der Knabe durch eine Wildniss von siebenhundert Mei-

len aus Ohio an den Hudson, traf mit einem Ranzen auf dem Rücken und 25 Cent baar Geld in der Tasche in Westpoint ein und widmete sich nun dem Studium mit solchem Eifer, dass er nach Verlauf von vier Jahren bereits zum Professor reif war. Dies war 1829. Im folgenden Sommer leitete er die Vermessung von zwei pennsylvanischen Eisenbahnen, und 1832 sah man ihn am Gerichtshofe von St. Augustine in Florida als Sachverwalter plaidiren. Dieses Geschäft setzte er später in Cincinnati fort, bis er endlich durch einen Ruf als Lehrer der Mathematik und Astronomie einen Wirkungskreis erhielt, in welchem er seiner Mission näher gerückt war. In dieser Stellung entstand und reifte in ihm der Gedanke zur Gründung eines Observatoriums. Dies war allem Anscheine nach ein so tolles Unternehmen, als je eines im Gehirn eines Schwärmers gesprosst. Weder ein Platz, noch Geld zur Errichtung einer derartigen Anstalt war vorhanden. Das Interesse am fernen Sternhimmel war unter Leuten, die bisher nur für das Allernächste Sinn gehabt, erst zu wecken, und fast dreissigtausend Dollars waren allein für das Gebäude und die erforderlichen Instrumente aufzutreiben. Das waren üble Aussichten. Aber Mitchel hatte das Auge, welches durch alle Schwierigkeiten hindurchschaut. Er machte seine Berechnung, griff das Werk an und — Hut ab vor Meister und Bauleuten! — nach vier Jahren stand es da, so stolz und so vollkommen, wie es in der Idee seines Urhebers vorgebildet gewesen, die einzige Sternwarte auf der Welt, die vom Volke, von den Massen errichtet worden.

Das Erste, woran Mitchel zu denken hatte, war die Gründung einer Gesellschaft für seinen Zweck. Diese kam 1842 zu Stande, und seltsam — sie zählte unter ihren Mitgliedern mehr als achtzig Procent Handwerker und Kaufleute. Das Nächste war ein geeignetes Stück Grund und Boden für das Gebäude. Man wendete sich an Longworth, den reichen Landeigenthümer, und er bewilligte einen Strich von vier Acres, ohne irgend welche Zahlung dafür zu beanspruchen. Ein drittes Hauptforderniss waren Instrumente, und um diese wurde ungesäumt an das Frauenhofersche Institut geschrieben und ein Contract wegen Lieferung eines grossen Telescops abgeschlossen, dessen Kosten sich auf nicht weniger als 9500 Dollars beliefen. Als am 9. November 1843 der Grundstein zum Gebäude gelegt wurde, war von dieser Summe noch kein Drittel eingezahlt, und da dieselbe bei Vollendung des Instruments, welche für den Juni 1844 erwartet wurde, vollständig abgeführt werden musste, so war die Hauptsorge zuvörderst die Einsammlung der bis jetzt bloss auf dem Papiere befindlichen Beiträge. Diesem Geschäfte hatte sich Mitchel selbst zu unterziehen, und obschon das Jahr für Handel und Wandel ein ungünstiges war und er in Folge dessen mancher Weigerung und mancher Vertröstung auf später begegnete, sah er sich nach Verlauf eines Monates doch im Stande, 3500 Dollars an eincassirten Geldern in die Hände des Schatzmeisters der Gesellschaft zu legen. Ueberdiess hatte er fernere zweitausend Dollars in Wechseln, zahlbar „in trade", d. h. in Zimmermanns-, Maurers-, Tischlers- und Glasersarbeit, in Stiefeln und Schuhen, in Schnitt- und Eisenwaaren,

in Speck, Oel, Mehl, kurz — hier zu Lande ein sehr gewöhnliches Verfahren, — in allerlei Handelsartikeln und Leistungen, erhalten. Allein noch immer fehlten dreitausend Dollars, um die letzte Rimesse nach Europa zu bezahlen. Diese zu erheben, entwarf Mitchel eine Liste der reichsten Bürger Cincinnatis. Acht Namen auf derselben hatten den Betrag von 200, zehn die Summe von 100, die Uebrigen 50 Dollars neben sich, und siehe da, der Professor der Mathematik hatte so genau gerechnet, dass er bei Vorlegung seiner Liste nur in einem einzigen Falle sich getäuscht fand. Die hierdurch ausfallenden 200 Dollars wurden anderweitig beschafft, und als der Zahlungstermin erschien, war das erforderliche Geld bereit.

Hiermit jedoch waren die Aussichten der Gesellschaft auf Beisteuern in Baarzahlungen erschöpft und kein Cent verblieb in der Kasse, um ein Gebäude zu errichten, dessen Herstellung mindestens auf sechstausend Dollars zu veranschlagen war. Auch hier wusste Mitchel Rath zu schaffen. Da sich kein Baumeister gewinnen liess, unter bewandten Umständen die Sache zu übernehmen, entschloss der Professor sich, die nöthigen Arbeiter tageweise zu dingen und ihre Leistungen selbst zu überwachen. Gedacht, gethan. Am 1. Juni 1844 begann er mit zwei Maurern und einem Karren den Bau, welcher, in dieser bescheidenen Weise fortgesetzt, wenigstens 20 Jahre zu seiner Vollendung bedurft hätte, während kraft der Schenkungsurkunde der Platz an Longworth heimfiel, wofern die Sternwarte nicht bis zum Herbste 1845 fertig wurde. Hundert andere Schwierigkeiten erhoben sich, aber nur, um dem Genie Mitchel's augenblicklich zu weichen. Man forderte einen übermässigen Lohn für die Zufuhr von Ziegeln auf die Höhe von Mount Adams, und der Professor entdeckte, dass sich das Werk auch aus Bruchsteinen aufführen liesse, die oben, ganz in der Nähe des geschenkten Landes gewonnen werden konnten. Man verlangte ferner zu hohe Preise für die Herbeischaffung von Kalk, und Mitchel errichtete selbst einen Kalkofen, der zwar etliche Male einstürzte, aber dem Bedürfnisse ganz wohl entsprach. Man berechnete die Sandfuhren zu theuer, und siehe da, der zukünftige Direktor des Observatoriums kaufte ein Paar Pferde und zeigte, indem er die Karren selbst vollschaufelte, auf den Berg trieb und an Ort und Stelle ablud, den Arbeitern praktisch, wie viele Fuhren bei gutem Willen in einem Tage gethan werden konnten. Noch ein Nachtheil der Lage war zu überwinden. Es war kein Wasser näher zu haben, als am Fusse der Höhe, eine halbe Meile entfernt, und es von da herbeizuholen, würde ausserordentliche Kosten gemacht haben. Auch diesem Uebelstande wurde flink abgeholfen. Der Professor zog einen Damm quer über eine Senkung in der Hügelwand und hatte das Vergnügen, diese rasch hergestellte Cisterne durch einige Regentage ausreichend gefüllt zu sehen.

Nach diesen Vorbereitungen wurde mit dem Bau selbst angefangen. Die erste Woche, wie bemerkt, mit nur zwei Maurern arbeitend, ermöglichte Mitchel, der nicht bloss hierbei, sondern auch als Sammler von Beiträgen die rastloseste Thätigkeit entwickelte, nach Verlauf von

acht Tagen die Anstellung einer doppelten Zahl. In der dritten Woche wuchs dieselbe zu acht, in der vierten zu zwanzig Mann, und endlich waren nicht weniger als fünfzig am Werke. Diese ganze Zeit über hatte Mitchel seinen Pflichten als Professor der Mathematik und Philosophie nachzukommen, und von den fünf täglichen Lehrstunden, die er im College zu ertheilen hatte, ward nicht eine versäumt. Vor 8 Uhr Morgens waren bereits alle Arbeiter auf dem Bauplatze, im Steinbruche, in der Sandgrube und beim Kalkofen inspicirt. Von 8 bis 1 Uhr hielten ihn seine Obliegenheiten im College fest, und ehe die zweite Stunde geschlagen, war der Unermüdliche wieder auf dem Baugerüste oder mit Sammeln von Beisteuern beschäftigt. Jeder Samstag erschöpfte alle seine Fonds. Aber freudigen Muthes begann er die nächste Woche, überzeugt, dass auch in ihr der Ausdauer ihr gebührender Lohn werden müsse. Häufig hatte er nach einer Schuld so viele Wege zu gehen, als sie Dollars betrug. Oft musste er die auf Zahlung in Handelsartikeln ausgestellten Wechsel ein halb Dutzend Mal umtauschen, ehe es gelang, sie in baares Geld umzusetzen. Immer jedoch war die Baukasse in der von den Verhältnissen geforderten Verfassung, und als der September verflossen, war die Sternwarte unter Dach, ohne dass auch nur eines Dollars Werth Schulden darauf lasteten.

Die innere Ausstattung wurde beinahe lediglich von denen beschafft, welche sich statt mit Geld mit Arbeitstagen und Naturalleistungen unterschrieben hatten. Die eine Thüre besorgte dieser, die andere jener Zimmermann. In gleicher Weise wurden die Fensterrahmen geliefert. Ebenso die Scheiben, Bänder und Wirbel. Die Mehrzahl der Schlösser, den grössten Theil der Dielen und Treppenstufen, der Oefen und Kaminsimse bekam man unentgeltlich von den Fabrikanten und Handwerkern der Stadt, und kaum möchte in der Stadt ein Haus aufzufinden sein, welches in einer Ausdehnung wie das Observatorium auf Mount Adams der unmittelbaren Betheiligung aller Classen der Bevölkerung sein Entstehen verdankt. Wir sind hergebrachtermassen die intelligenten Deutschen. Allein ich würde mich bedacht haben, mit Ja zu antworten, wenn der Amerikaner, dem ich die obigen Notizen danke, mich gefragt hätte, ob ich mir getraue, daheim in einer Stadt von gleicher Grösse mit Cincinnati 29 Tischler, 18 Holzhändler und (andere Handwerker ungerechnet) 19 Mitglieder einer lobesamen Schneiderzunft aufzutreiben, welche willig wären, für ein Ding wie eine Sternwarte Summen zu unterschreiben, wie ich sie hier auf der Liste erblickte. Gewiss, ich hätte mich bedacht und wahrscheinlich auch ein wenig geschämt, obgleich ich so gut wie andere Leute in Becker's Weltgeschichte gelesen habe, dass Keppler und Kopernicus in Deutschland geboren wurden.

Eine detaillirte Beschreibung des Observatoriums möchte zu weit führen. Es genüge daher die Bemerkung, dass es ein massives Gebäude ist, welches im Centrum drei, auf den Flügeln zwei Stockwerke hat, dass es ferner mit einem dorischen Porticus geziert und dass es nach allen Seiten ebenso solid als zweckmässig ausgestattet ist. Ausser dem

Raume, in welchem sich auf steinernem Fussgestell das Hauptinstrument der Anstalt, das gewaltige Fernrohr, $17\frac{1}{2}$ Fuss lang und bis zu 1400 Mal vergrössernd, erhebt, und ausser mehreren andern, den Zwecken der Wissenschaft gewidmeten Sälen und Zimmern enthält es auch die Wohnung des Directors Mitchel, der ausser dieser Vergünstigung durchaus keine Vergütung für seine Mühe hat — ein Umstand, der seinen Eifer für das Zustandekommen des Unternehmens in um so glorreicherem Lichte erscheinen lässt."

So weit Herr Moritz Busch.

Möge der treffliche Mitchel, der Erbauer und gegenwärtige Director der prachtvollen Sternwarte zu Cincinnati, noch lange die Früchte seines in der Geschichte der Astronomie ohne Beispiel dastehenden Eifers in ungeschwächter Kraft und Gesundheit geniessen! Grunert.

---

Ueber die traurige Art und Weise, wie der um die mathematischen Wissenschaften so vielfach verdiente Vega seinen Tod in den Wellen der Donau gefunden, erzählt der treffliche Herausgeber der Nouvelles Annales de Mathématiques, Herr O. Terquem in Paris, in seinem ausgezeichneten und für die Förderung des mathematischen Unterrichts so wichtigen Journale Folgendes, was in seinen Einzelnheiten den Lesern des Archivs gewiss theilweise unbekannt und deshalb ohne Zweifel interessant sein wird. G.

Note du Rédacteur. En 1802 Vienne fut consternée en apprenant la mort de Vega, noyé dans le Danube*). On pensait à un suicide, attribué, dit on, au chagrin qu'un passe-droit faisait éprouver au colonel. Telle était l'opinion publique sur cette catastrophe, lorsque, sept années après, en 1811, un régiment d'artillerie vint à passer Vienne. L'officier qui surveillait la salle du dessin, vit entre les mains d'un canonier un rapporteur en cuivre, portant le nom de Vega, et le canonnier dit que le bourgeois chez lequel il logeait, lui avait prêté cet instrument, et il disait vrai. Ce bourgeois était un meunier; interrogé sur la possession de cet instrument, le meunier fit des réponses embarrassées, et l'on se rappela que c'était chez lui que Vega était descendu pendant son séjour à Vienne. Mis en prison, et après plusieurs interrogatoires, le meunier fit cet aveu: „Lorsque Vega vint chez moi en 1802, j'avais un très-beau cheval auquel j'étais

*) Né en 1754.

passionnément attaché. Le colonel me demanda à diverses fois de le lui vendre. J'ai constamment refusé; mais il finit par offrir un si haut prix, que je cédai, et afin que je ne puisse changer de résolution, il me paya comptant et la livraison devait avoir lieu dans la soirée. A l'heure convenue, nous rendîmes à l'écurie, et pour cela il fallait passer par-dessus une passerelle, jetée sur le cours d'eau dérivé du Danube et qui fait aller le moulin. Arrivé sur la passerelle, j'eus un si violent regret de me séparer de mon cheval, que l'idée diabolique s'empara de moi de garder l'argent et le cheval. Il faisait très-obscur. Le colonel marchait devant moi: je lui donnai une forte secousse; il tomba dans l'eau et disparut."

Daprès cette déclaration l'assasin mourut sur la potence. Ainsi cet incident providentiel lava d'un soupçon injurieux la mémoire du célèbre artilleur.

En France, dans l'état actuel du jury, le malheureux meunier, entraîné par un vertige momentané de fébrile cupidité, aurait obtenu la faveur des circonstances atténuantes.

(Nouvelles Annales de Mathématiques. Avril. 1855. p. 50.)

---

## Preisaufgabe der Berliner Akademie der Wissenschaften.

Die Differentialgleichungen eines um einen festen Punkt rotirenden Körpers, auf welchen keine andere beschleunigende Kraft als die Schwere wirkt, durch regelmässig fortschreitende Reihen zu integriren, welche alle zur Kenntniss der Bewegung erforderlichen Grössen explicite durch die Zeit darstellen.

Sprache: Deutsch, Französisch, Lateinisch.

Einsendungstermin: 1. März 1858.

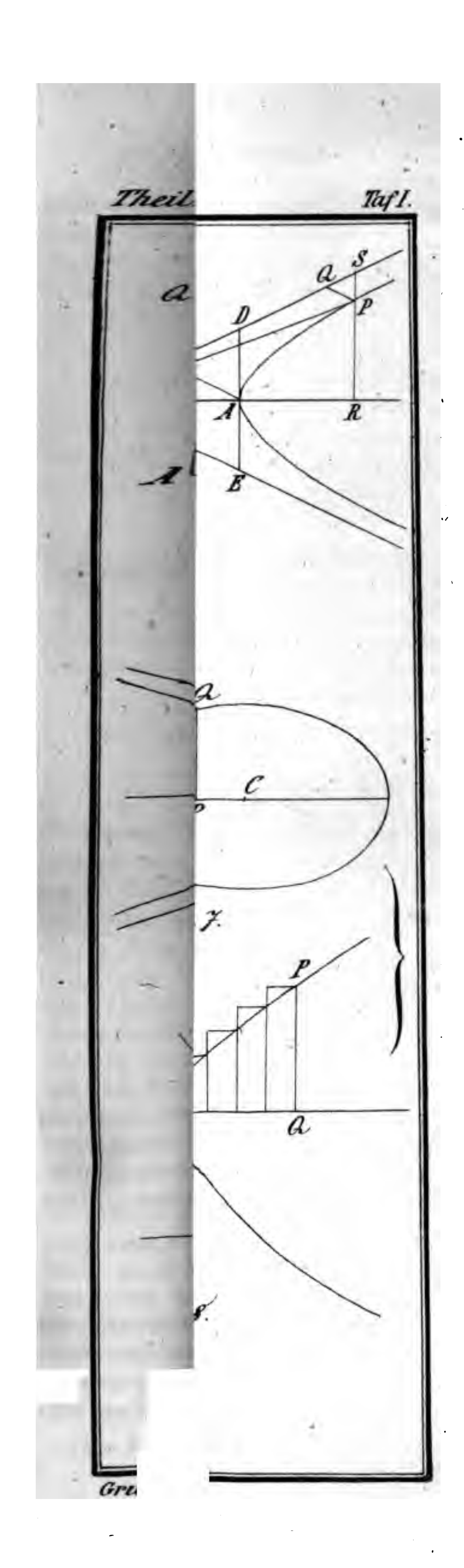
Preis: 100 Ducaten.

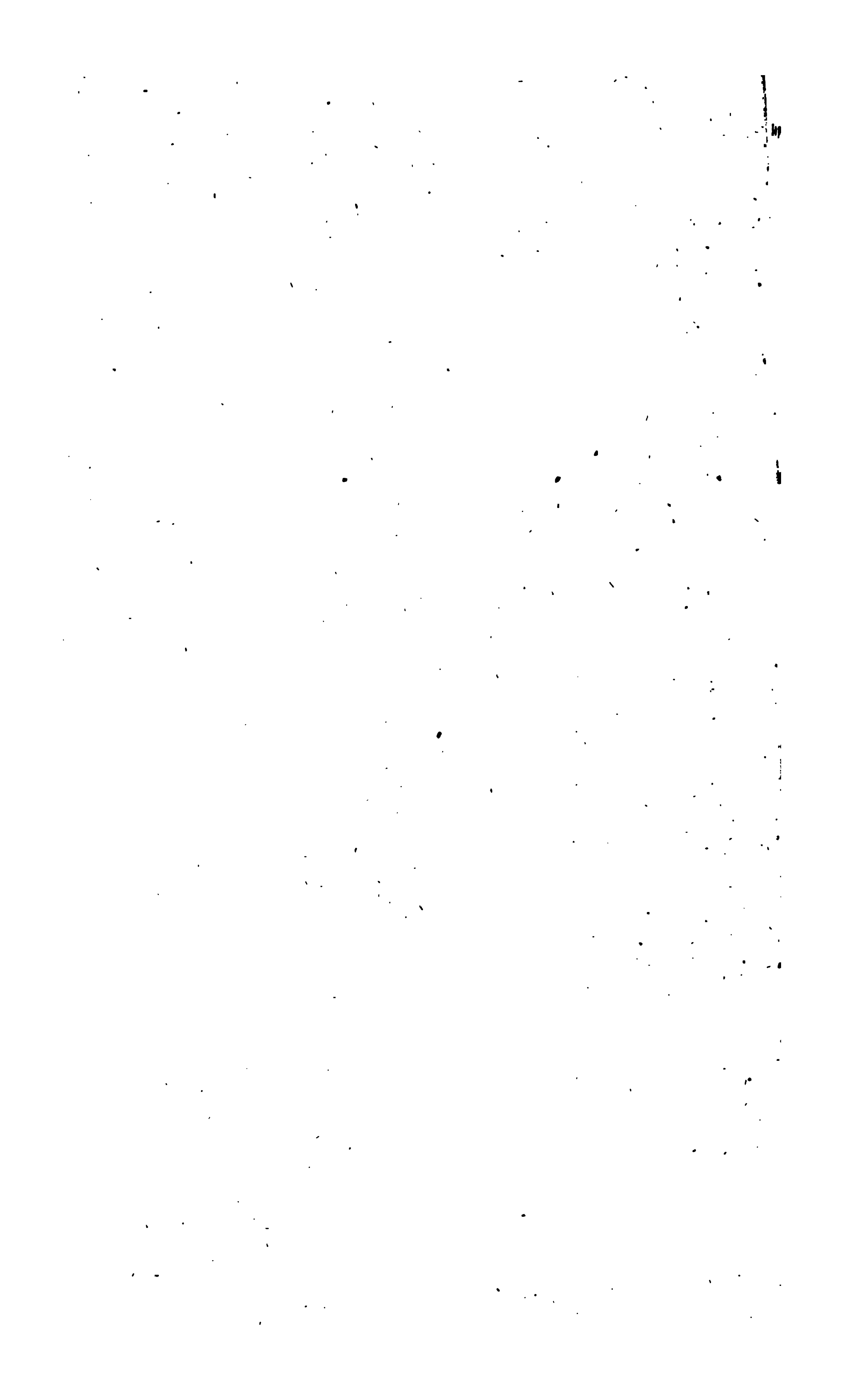
Jede Bewerbungsschrift ist mit einer Inschrift zu versehen und diese auf dem Aeusseren des versiegelten Zettels, welcher den Namen und den Wohnort des Verfassers enthält, zu wiederholen.

---

### D r u c k f e h l e r.

S. 77. Z. 8. v. o. hinter $D'D'''D^{IV}=70$ schalte man ein: $D'D''D^{IV}=42$.
„ 78. „ 13. v. u. statt „Division mit 2" setze man „Division mit 3".
„ 81. „ 8. v. u. statt „der Gleich. $\alpha$)" setze man „der Gleich. (3)".


Theil.
Taf I.
Q
S
Q
D
P
A
R
E
Q
C
7.
P
Q
8.
Gr



# IX.

# Vollständige Bestimmung der Evoluten doppelt gekrümmter Linien aus ihrer Evolvente.

Von

Herrn *R. Hoppe*,

Dr. phil. und Privatdocenten an der Universität in Berlin.

---

Lässt man eine Gerade auf einer beliebigen Curve hinrollen, so dass sie dieselbe stets berührt, ohne auf ihr zu gleiten, so beschreibt jeder Punkt der Geraden eine Linie, welche man eine Evolvente der Curve nennt, während die Curve selbst die Evolute der so beschriebenen Linie heisst. Ist die Evolute eine ebene Curve, so ist sie bekanntlich identisch sowohl mit dem geometrischen Orte der Krümmungsmittelpunkte, als auch mit der umhüllenden Linie der Normalen der Evolvente, Eigenschaften, die man mitunter zur Definition der Evolute benutzt hat. Da solche Definitionen auf Curven doppelter Krümmung nicht mehr anwendbar sind und zu Verwechselungen, ja sogar zu Irrthümern (wie in Schlömilch's „Compendium der höheren Mathematik") Veranlassung geben, so sind sie zu verwerfen, und es ist nothwendig, beim ursprünglichen Begriffe stehen zu bleiben.

Monge war der Erste, welcher die Untersuchung der Evolventen und Evoluten auf beliebige Curven im Raume ausdehnte. Durch ihn sind bereits eine Anzahl bemerkenswerther Eigenschaften derselben bekannt geworden, namentlich folgende: Jede Evolvente hat unendlich viele Evoluten. Diese liegen sämmtlich auf einer und derselben abwickelbaren Fläche, deren erzeugende Gerade die Pollinie des Krümmungskreises ist. Die Pollinien haben

eine umhüllende Linie, welche die Grenze (l'arête de rebroussement) der abwickelbaren Fläche bildet. Durch jeden Punkt dieser Fläche lässt sich eine Evolute ziehen, und zwar ist letztere die kürzeste Linie zwischen je zweien ihrer Punkte, die auf der Fläche möglich ist.

Hiermit ist jedoch die Aufgabe, zu jedem Punkte der Evolvente $P$ den zugehörigen der Evolute $P_1$ analytisch und allgemein anzugeben, nicht vollständig gelöst. Bezeichnet nämlich $P_0$ den Krümmungsmittelpunkt der Evolvente, so ist $PP_0P_1$ ein in $P_0$ rechtwinkliges Dreieck, wovon man nur eine Kathete $PP_0$ kennt. Die übrigen Stücke enthalten eine willkürliche Constante: es handelt sich darum, eins der Stücke des Dreiecks mittelst der Bestimmungsstücke der Evolvente und der Constanten auszudrücken. Monge begnügt sich damit, die Differenzialgleichung anzugeben, aus deren Integration die vollständige Bestimmung zugleich mit der, die einzelnen Evoluten unterscheidenden, Constanten hervorgehen würde. Ich füge deshalb zur Ergänzung der Theorie den folgenden Satz hinzu.

Der Winkel zwischen der Tangente der Evolute und der Hauptnormale der Evolvente $P_0PP_1$ enthält die willkürliche Constante als einfaches Increment, und ist das Integral der Torsion der Evolvente nach dem Bogen genommen.

Hiermit ist die Lage des Punktes $P_1$ explicite ausgedrückt, und seine Coordinaten lassen sich ohne weitere Integration oder Auflösung einer Gleichung angeben. Den zum Beweise nöthigen Formeln lässt sich auf folgende Weise die grösste Uebersichtlichkeit und Symmetrie ertheilen. Zwischen den Cosinus der 9 Richtungswinkel dreier auf einander senkrechter Geraden gegen ein rechtwinkliges Axensystem finden 21 Relationen statt. Indem sich diese als hinreichend bekannt voraussetzen lassen, bedarf es nur der geordneten Aufstellung jener 9 Grössen, um 21 Formeln kenntlich auszudrücken. Nun sind die Tangente, Hauptnormale und Pollinie des Krümmungskreises einer Curve drei auf einander senkrechte Gerade. Stellt man die Cosinus ihrer Richtungswinkel gegen die Axen der $x$, $y$, $z$ in folgendes Quadrat:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tangente | $x'$, | $y'$, | $z'$, |
| Hauptnormale | $\varrho x''$, | $\varrho y''$, | $\varrho z''$, |
| Pollinie | $l$, | $m$, | $n$; |

wo $\varrho$ den Krümmungsradius, und die Accente die Differenzial-

quotienten nach dem Bogen $s$ genommen bezeichnen, so kann man sämmtliche Formeln, die zwischen jenen 9 Grössen stattfinden, einschliesslich der Ausdrücke von $\varrho, l, m, n,$ ohne Mühe ablesen. In Betreff des Vorzeichens der Determinanten ist nur festzuhalten, dass die aus der Diagonale von $x'$ nach $n$ genommenen Glieder als positiv betrachtet werden.

Setzt man die Torsion der Curve, d. h. den unendlich kleinen, von der Osculationsebene beschriebenen Winkel $\partial\vartheta$, dividirt durch den gleichzeitig vom Punkte $xyz$ beschriebenen Bogen $\partial s$

$$=\vartheta',$$

so ist bekanntlich

$$\vartheta'^2 = l'^2 + m'^2 + n'^2.$$

Differenziirt man die Gleichungen

$$l = \varrho(y'z'' - z'y''), \quad \varrho^2(x''^2 + y''^2 + z''^2) = 1;$$

so erhält man nach Elimination von $\varrho'$:

$$l' = -\varrho\{\varrho x'' l x''' + (\varrho y'' l + z')y''' + (\varrho z'' l - y')z'''\},$$

oder, da

$$z' = \varrho x'' m - \varrho y'' l, \quad y' = \varrho z'' l - \varrho x'' n$$

ist,

$$l' = -\varrho^2 x''(lx''' + my''' + nz''').$$

Bildet man nach Analogie die Ausdrücke von $m'$ und $n'$, und nimmt die Quadratwurzel aus der Quadratsumme aller drei Grössen, so kommt

$$\vartheta' = \varrho(lx''' + my''' + nz''').$$

Das Vorzeichen der Grösse $\vartheta'$, welches an sich der Willkür unterliegt, sei durch diese Formel festgestellt. Man hat demnach:

$$l' = -\varrho\vartheta' x'', \quad m' = -\varrho\vartheta' y'', \quad n' = -\varrho\vartheta' z''. \tag{1}$$

Mit Hülfe dieser drei Formeln lässt sich der aufgestellte Satz zugleich mit den Sätzen von Monge beweisen.

Es mögen sich von jetzt an die eingeführten Zeichen ausschliesslich auf die Evolvente beziehen, und die entsprechenden, auf die Evolute bezüglichen Grössen durch den Index 1 unterschieden werden. Um der Definition gemäss aus der Evolute den Punkt $xyz$ der Evolvente zu bestimmen, hat man auf der Tangente vom Berührungspunkte aus in der dem Laufe des Bogens entgegenge-

setzten Richtung ein Stück $=s_1$ abzuschneiden; die Coordinaten des Endpunkts werden sein:

$$x=x_1-s_1x_1', \quad y=y_1-s_1y_1', \quad z=z_1-s_1z_1'.$$

Diese Gleichungen drücken die Beziehung zwischen Evolute und Evolvente vollständig aus. Differenziirt man sie, so kommt

$$x'=-s_1x_1''\frac{\partial s_1}{\partial s}, \quad y'=-s_1y_1''\frac{\partial s_1}{\partial s}, \quad z'=-s_1z_1''\frac{\partial s_1}{\partial s}.$$

Die Quadratsumme der drei Grössen ist

$$1=\left(\frac{s_1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)^2.$$

Die Wurzel kann man stets als positiv betrachten, indem ihre Factoren nur beim Eintreten von Rückkehrpunkten, und zwar zu gleicher Zeit, ihre Vorzeichen wechseln. Demnach ist

$$\frac{\partial s_1}{\partial s}=\frac{\varrho_1}{s_1},$$

so dass die Gleichungen in folgende übergehen:

$$x'=-\varrho_1x_1'', \quad y'=-\varrho_1y_1'', \quad z'=-\varrho_1z_1'',$$

und in dieser Form den Umstand ausdrücken, dass die Hauptnormale der Evolute parallel ist der Tangente der Evolvente, mithin senkrecht steht auf ihrer Normalebene. Da sie zugleich auf der Tangente $PP_1$ senkrecht steht, so muss letztere, somit das ganze Dreieck $P_0PP_1$ in der Normalebene der Evolvente liegen.

Bezeichnet man den Winkel $P_0PP_1$ durch $\lambda$ und drückt seinen Cosinus durch die Richtungswinkel seiner Schenkel aus, so kommt:

$$\cos\lambda=\varrho x''x_1'+\varrho y''y_1'+\varrho z''z_1'.$$

Nun ist

$$x'=-\varrho_1x_1''=n_1y_1'-m_1z_1'.$$

Diess differenziirt gibt mit Anwendung der Gleichungen (1):

$$x''=\{y_1''n_1-z_1''m_1-\varrho_1\vartheta_1'(y_1'z_1''-z_1'y_1'')\}\frac{\partial s_1}{\partial s}$$

$$=\left(\frac{x_1'}{\varrho_1}-l_1\vartheta_1'\right)\frac{\varrho_1}{s_1}=\frac{x_1'-\varrho_1l_1\vartheta_1'}{s_1}.$$

Bildet man nach Analogie die Ausdrücke von $y''$ und $z''$, führt einerseits die drei Werthe in den Ausdruck von $\cos\lambda$ ein, und

nimmt andererseits ihre Quadratsumme, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\cos\lambda = \frac{\varrho}{s_1}, \quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{1 + \varrho_1^2 \vartheta_1'^2}{s_1^2};$$

und nach Elimination von $s_1$:

$$\varrho_1^2 \vartheta_1'^2 = \operatorname{tg}^2\lambda.$$

Da noch keine Bestimmung getroffen worden ist, nach welcher Seite hin $\lambda$ positiv sein soll, so geschehe diess durch die Gleichung

$$\varrho_1 \vartheta_1' = -\operatorname{tg}\lambda. \tag{2}$$

Da nun $\varrho$ und $s_1$ die Seiten des Dreiecks sind, welche den Winkel $\lambda$ einschliessen, so folgt aus der Gleichung $s_1 \cos\lambda = \varrho$, dass das Dreieck rechtwinklig bei $P_0$ ist. Folglich steht $P_1 P_0$ senkrecht auf der Osculationsebene der Evolvente und $P_1$ ist ein Pol ihres Krümmungskreises.

Setzt man ferner in die oben gefundenen Ausdrücke von $x''$, $y''$, $z''$ die Werthe von $\varrho_1 \vartheta_1'$ und $s_1$ ein, so kommt:

$$\varrho x'' = x_1' \cos\lambda + l_1' \sin\lambda,$$

$$\varrho y'' = y_1' \cos\lambda + m_1' \sin\lambda,$$

$$\varrho z'' = z_1' \cos\lambda + n_1' \sin\lambda.$$

Drückt man jetzt die linke Seite der Gleichung

$$y' \cdot \varrho z'' - z' \cdot \varrho y'' = l$$

in Elementen der Evolute aus, so findet man:

$$l = l_1 \cos\lambda - x_1' \sin\lambda.$$

Diess differenziirt gibt mit Beachtung des Werthes von $\varrho x''$:

$$-\varrho\vartheta' x'' = -(\varrho_1 \vartheta_1' x_1'' \cos\lambda + x_1'' \sin\lambda)\frac{\partial s_1}{\partial s} - \varrho x'' \lambda'.$$

Die Klammer verschwindet nach Gleichung (2) und es bleibt

$$\vartheta' = \lambda', \quad \lambda = \vartheta + c,$$

was zu beweisen war.

Um jetzt die Lage des Punktes $P_1$ anzugeben, braucht man nur vom Krümmungsmittelpunkt an, dessen Coordinaten

$$x + \varrho^2 x'', \quad y + \varrho^2 y'', \quad z + \varrho^2 z''$$

sind, auf der Pollinie das Stück $\varrho \operatorname{tg}(\vartheta + c)$ abzuschneiden, dann erhält man zu Coordinaten des Endpunkts:

$$x_1 = x + \varrho^2 x'' - \varrho l \operatorname{tg}(\vartheta + c),$$
$$y_1 = y + \varrho^2 y'' - \varrho m \operatorname{tg}(\vartheta + c),$$
$$z_1 = z + \varrho^2 z'' - \varrho n \operatorname{tg}(\vartheta + c).$$

Das Vorzeichen des letzten Gliedes in jedem Ausdrucke, welches die Ableitung unbestimmt lässt, durch geometrische Betrachtungen zu ermitteln, würde höchst umständlich sein; dagegen erweist sich das Minuszeichen sogleich als einzig gültig, sobald man die Werthe von $x_1$, $y_1$, $z_1$ in die Grundgleichungen einführt.

Die übrigen Stücke der Evolute, welche sich beiläufig ergeben, sind folgende:

$$s_1 = \frac{\varrho}{\cos(\vartheta + c)},$$

$$\varrho_1 = s_1 \frac{\partial s_1}{\partial s} = \varrho \frac{\varrho' + \varrho\vartheta' \operatorname{tg}(\vartheta + c)}{\cos^2(\vartheta + c)},$$

$$\vartheta_1' = -\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\varrho_1} = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\sin(\vartheta + c)\cos(\vartheta + c)}{\varrho' + \varrho\vartheta' \operatorname{tg}(\vartheta + c)}.$$

# X.

# Ueber das Ikosaeder und Pentagonaldodekaeder.

Von

Herrn *C. Wicke,*

Studios. phil. zu Cassel.

---

Bekanntlich besitzt eine jede Form des regulären Krystallsystems die Eigenschaft, dass, wenn eine Fläche derselben (bei gehöriger Vergrösserung) wenigstens zwei Axen schneidet, dies immer in Entfernungen vom Mittelpunkte der Krystallgestalt geschieht, die in einem rationalen Verhältnisse zu einander stehen. Nimmt man auch beim regelmässigen Pentagonaldodekaeder und Ikosaeder drei rechtwinklig zu einander stehende Axen an, welche die Mitte gegenüberliegender Kanten verbinden, so ist jenes Verhältniss zwar kein rationales, aber doch, wie wir im Folgenden sehen werden, ein ganz einfaches. Auch stellt sich heraus, dass, bedingt durch die Annahme jener Axen, einige interessante Beziehungen zwischen beiden Körpern stattfinden.

Betrachten wir zunächst das Ikosaeder und denken uns dasselbe so gestellt, dass die eine Axe senkrecht von oben nach unten, die zweite horizontal von links nach rechts und die dritte horizontal von vorn nach hinten geht, so wird z. B. die Fläche links oben die Vertikalaxe in der Entfernung ihrer wirklichen Länge vom Mittelpunkte schneiden, mit der von vorn nach hinten gehenden Horizontalaxe parallel laufen und, gehörig vergrössert, die andere Horizontalaxe in einer Entfernung vom Mittelpunkte treffen, die wir mit $X$ bezeichnen wollen. Legen wir durch diese verlängerte Axe und die Vertikalaxe eine Ebene, so erhalten wir einen Durchschnitt $acedb$ (Taf. II. Fig. 1.). $ab$ ist hier die Vertikal-, $db$ die Horizontalaxe $=A$, $ac$ die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, $cd$ die halbe Kante des Ikosaeders $=\frac{S}{2}$ und $eb$ die ver-

längerte Horizontalaxe $=X$, die im Punkte $e$ von der vergrösserten Fläche des Ikosaeders geschnitten wird.

Um zunächst eine Gleichung zwischen $S$ und $A$ aufzustellen, verlängern wir $cd$ und ziehen parallel mit $db$ die Linie $af$. Es ist alsdann

$$ac^2 = (fd - cd)^2 + af^2,$$

d. i.

$$ac^2 = (A - \frac{S}{2})^2 + A^2,$$

oder

$$ac^2 = 2A^2 - AS + \frac{S^2}{4}.$$

Da $ac$ auch die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist, so hat man:

$$ac^2 = \tfrac{3}{4}S^2.$$

Die beiden Werthe von $ac^2$ gleich gesetzt, giebt:

$$\tfrac{3}{4}S^2 = 2A^2 - AS + \frac{S^2}{4},$$

d. i.

$$S^2 + 2AS = 4A^2,$$

mithin

I) $$S = A(\sqrt{5} - 1).$$

Wir wollen jetzt die Linie $eb = X$ bestimmen. Es verhält sich:

$$ab : eb = cd : ed,$$

d. i.

$$A : X = \frac{S}{2} : (X - A),$$

folglich

$$X = \frac{2A^2}{2A - S}.$$

Substituiren wir in diesen Ausdruck den Werth von $S$ aus I), so ist:

$$X = \frac{2A}{3 - \sqrt{5}}.$$

Nenner und Zähler mit $(3 + \sqrt{5})$ multiplicirt, giebt:

$$X = \frac{A(3 + \sqrt{5})}{2},$$

d. i.

$$X = \frac{A(\sqrt{5}-1)}{2} + 2A.$$

Da nach I) $A(\sqrt{5}-1) = S$, so ist:

II) $$X = 2A + \frac{S}{2},$$

d. h.: Eine jede Fläche des Ikosaeders schneidet eine der Axen in einer Entfernung vom Mittelpunkte, welche gleich ist der **Summe** aus dem Abstande zweier gegenüberliegenden Kanten und der halben Kante.

Geben wir dem Pentagonaldodekaeder eine dem Ikosaeder analoge Stellung, vergrössern ebenfalls die Fläche links oben bis zur verlängerten Horizontalaxe und legen durch diese und die Vertikalaxe eine Ebene, so erhalten wir den Durchschnitt $ahkdb$ (Taf. II. Fig. 2.). $ab = bd = a$ sind zwei Axen, $ah$ ist die Höhe des regelmässigen Fünfecks, $hd = \frac{s}{2}$ die halbe Kante des Pentagonaldodekaeders und $kl$ die verlängerte Axe, welche im Punkte $k$ von der vergrösserten Fünfecksfläche geschnitten wird.

Wir stellen zunächst wieder eine Gleichung zwischen $s$ und $a$ auf.

Da $ah$ (Taf. II. Fig. 3.) die Höhe eines regelmässigen Fünfecks, also auch eines Dreiecks $alm$ ist, in welchem der Winkel an der Grundlinie doppelt so gross, als der in der Spitze ist, so haben wir die Proportion:

$$al : lm = lm : (al - lm),$$

d. i.

$$al : s = s : (al - s),$$

$$al = \frac{s}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Es ist ferner:

$$ah^2 = al^2 - lh^2.$$

Den Werth von $al$ aus der vorigen Gleichung in diese substituirt, giebt:

$$ah^2 = \frac{s^2}{2}(\sqrt{5} + \frac{5}{2});$$

$ah$ ist aber auch Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $ahf$ und also:

$$ah^2 = 2a^2 - as + \frac{s^2}{4}.$$

Beide Werthe von $ah^2$ gleich gesetzt, giebt:

$$\frac{s^2}{2}(\sqrt{5} + \frac{5}{2}) = 2a^2 - as + \frac{s^2}{4},$$

$$s^2 + \frac{2a}{\sqrt{5}+2}.s = \frac{4a^2}{\sqrt{5}+2},$$

mithin

$$s = \frac{a}{2+\sqrt{5}}(-1 \pm \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}),$$

folglich:

$$s = a(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 1),$$

also:

III) $$s = a(3 - \sqrt{5}).$$

Die Linie $kb = x$ (Taf. II. Fig. 2.) berechnen wir ähnlich wie beim Ikosaeder und erhalten dann zunächst:

$$x = \frac{2a^2}{2a - s}.$$

Setzt man für $s$ den Werth aus III), so erhält man:

$$x = \frac{2a}{\sqrt{5} - 1}$$

oder

$$x = \frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2},$$

d. i.

$$x = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} + a.$$

Aus Gleichung III) folgt $(\sqrt{5} - 1) = 2 - \frac{s}{a}$, also, wenn man substituirt:

IV) $$x = 2a - \frac{s}{2},$$

d. h.: Jede Fläche des Pentagonaldodekaeders, welche eine Axe in der Entfernung ihrer Länge vom Mittelpunkte trifft und mit der anderen parallel geht, schneidet die dritte Axe in einem Abstande vom Mittelpunkte, welcher gleich ist der

**Differenz** aus der Entfernung zweier gegenüberliegenden Kanten und der halben Kante.

Um Beziehungen aufzufinden, welche zwischen dem Pentagonaldodekaeder und dem Ikosaeder bestehen, betrachten wir zunächst die Formeln I) und III).

Die Gleichung III), nämlich:

$$s = a(3 - \sqrt{5}),$$

kann man auch schreiben:

$$s = a(2 - (\sqrt{5} - 1)).$$

Nun ist nach I):

$$\sqrt{5} - 1 = \frac{S}{A};$$

diesen Werth in die vorige Gleichung substituirt, giebt

$$s = a\left(2 - \frac{S}{A}\right)$$

oder

$$\text{V)} \qquad s + \frac{a}{A} . S = 2a,$$

d. h.: Die Summe aus einer Kante des Pentagonaldodekaeders und der des Ikosaeders, letztere mit dem Verhältniss der Axen beider Körper multiplicirt, ist gleich der Entfernung zweier gegenüberliegenden Kanten des Pentagonaldodekaeders.

Wird in V) $A = a$, so hat man:

$$\text{VI)} \qquad s + S = 2a,$$

d. h.: Haben Ikosaeder und Pentagonaldodekaeder gleiche Axen, so ist die Summe aus einer Kante des Pentagonaldodekaeders und einer Kante des Ikosaeders gleich dem Abstande zweier gegenüberliegenden Kanten eines dieser Körper.

Eine andere Beziehung zwischen unseren beiden Körpern folgt aus III), I) und der Formel für die Diagonale des regelmässigen Fünfecks, welche erstere wir schon oben entwickelten. Bezeichnen wir letztere mit $d$, so ist:

$$d = \frac{s}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Nach III) ist:

$$s = a(3-\sqrt{5}).$$

$s$ in den Ausdruck für $d$ substituirt, giebt:

$$d = \frac{a(3-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2},$$

folglich:

$$d = a(\sqrt{5}-1).$$

Die Gleichung I) lautet:

$$S = A(\sqrt{5}-1),$$

mithin:

VII) $$d:S = a:A,$$

d. h.: **Die Diagonale eines Fünfecks des Pentagonaldodekaeders und eine Kante des Ikosaeders stehen im geraden Verhältnisse zu den Axen beider Körper.**

Relationen zwischen dem Ikosaeder und Pentagonaldodekaeder in Bezug auf die Flächenwinkel derselben lassen sich leicht aus Taf. II. Fig. 4. herleiten.

Es sei $ab = bd = a = A$, $kb = x$, $eb = X$, $\angle eab = \frac{\alpha}{2} =$ dem halben Flächenwinkel des Ikosaeders; $\angle kab = \frac{\beta}{2} =$ dem halben Flächenwinkel des Pentagonaldodekaeders; $cd = \frac{S}{2}$, $hd = \frac{s}{2}$. Es sei ferner $dg = db$.

Den Gleichungen II), IV) und VI) zufolge ist:

$$eg = \frac{S}{2}, \quad gk = \frac{s}{2}, \quad kd = \frac{S}{2}.$$

Es ist nun:

$$\operatorname{tang} khd = \frac{kd}{hd},$$

d. i.

VIII) $$\operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = \frac{S}{s},$$

d. h.: **Haben Ikosaeder und Pentagonaldodekaeder gleiche Axen, so ist die Tangente des halben Flächenwinkels des Pentagonaldodekaeders gleich dem Quotienten aus der Kante des Ikosaeders und der des Pentagonaldodekaeders.**

Ferner ist:

$$\tang ecd = \frac{eg+gk+kd}{cd} = \frac{\frac{S}{2}+\frac{s}{2}+\frac{S}{2}}{\frac{S}{2}},$$

folglich:

$$\text{IX)} \qquad \tang\frac{\alpha}{2} = 2+\frac{s}{S},$$

d. h.: Haben Ikosaeder und Pentagonaldodekaeder gleiche Axen, so ist die Tangente des halben Flächenwinkels des Ikosaeders gleich dem um 2 vermehrten Quotienten aus der Kante des Pentagonaldodekaeders und der des Ikosaeders.

---

# XI.

# Verschiedene mathematische Bemerkungen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Privatdocenten der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

---

## I.

### Integration der partiellen Differentialgleichung

$$(a_1+b_1x+c_1y)z+(a_2+b_2x+c_2y)\frac{\partial z}{\partial x}+(a_3+b_3x+c_3y)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$+(a_4+b_4x+c_4y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(a_5+b_5x+c_5y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(a_6+b_6x+c_6y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\ldots=0$$

### mittelst bestimmter Integrale.

Ich setze voraus, es sei

$$(1) \qquad z=\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy}\,W du dv$$

ein, der vorgelegten Gleichung Genüge leistender Werth, unter $W$ eine Function von $u$ und $v$ und unter $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ von $x$ und $y$ unabhängige Zahlen verstanden.

Behufs der Substitution des Werthes von $z$ in die vorgelegte Gleichung hat man folgende Ausdrücke zu bilden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} u e^{ux+vy} W du dv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} v e^{ux+vy} W du dv,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} u^2 e^{ux+vy} W du dv,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} uv e^{ux+vy} W du dv,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} v^2 e^{ux+vy} W du dv,$$

. . . . . . . . . . . . . .

Werden nun diese Werthe substituirt, so erhält man:

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy} W\{(a_1+b_1x+c_1y)+(a_2+b_2x+c_2y)u+(a_3+b_3x+c_3y)v$$
$$+(a_4+b_4x+c_4y)u^2+(a_5+b_5x+c_5y)uv$$
$$+(a_6+b_6x+c_6y)v^2+\ldots\} du dv,$$

was durch schickliche Functionswerthe von $W$ und durch bestimmt gewählte Grenzen verschwinden soll.

Setzt man der leichtern Uebersicht halber:

$$a_1+a_2u+a_3v+a_4u^2+a_5uv+a_6v^2+\ldots=L,$$
$$b_1+b_2u+b_3v+b_4u^2+b_5uv+b_6v^2+\ldots=M,$$
$$c_1+c_2u+c_3v+c_4u^2+c_5uv+c_6v^2+\ldots=N;$$

so hat man:

$$(2) \qquad \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy} W(L+Mx+Ny) du dv = 0.$$

Nun lassen sich die beiden Integrale

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy}\, WMx\,du\,dv, \quad \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy}\, WNy\,du\,dv$$

auch so schreiben:

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} WM\frac{\partial e^{ux+vy}}{\partial u}du\,dv, \quad \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} WN\frac{\partial e^{ux+vy}}{\partial v}du\,dv,$$

und geben nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt:

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy}\, WMx\,du\,dv$$

$$=\int_{v_1}^{v_2} \{MWe^{ux+vy}\}_{u_1}^{u_2} dv - \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy}\frac{\partial(MW)}{\partial u}du\,dv,$$

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy}\, WNy\,du\,dv$$

$$=\int_{u_1}^{u_2} \{NWe^{ux+vy}\}_{v_1}^{v_2} du - \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy}\frac{\partial(NW)}{\partial v}du\,dv,$$

wenn man unter $\{MWe^{ux+vy}\}_{u_1}^{u_2}$ dasjenige versteht, was aus $MWe^{ux+vy}$ wird, wenn man dem $u$ die speciellen Werthe $u_1$ und $u_2$ beilegt und vom Resultat der ersten Substitution das Resultat der zweiten abzieht.

Durch diess nimmt die Gleichung (2) folgende Gestalt an:

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy}\left\{LW-\frac{\partial(MW)}{\partial u}-\frac{\partial(NW)}{\partial v}\right\}du\,dv$$

$$+\int_{v_1}^{v_2} \{MWe^{ux+vy}\}_{u_1}^{u_2} dv + \int_{u_1}^{u_2} \{NWe^{ux+vy}\}_{v_1}^{v_2} du = 0.$$

Man genügt derselben, wenn man $W$ so wählt, dass

$$LW-\frac{\partial(MW)}{\partial u}-\frac{\partial(NW)}{\partial v}=0 \tag{3}$$

wird, und die Grenzen $u_1, u_2, v_1, v_2$ so, dass der Gleichung:

$$\int_{v_1}^{v_2} \{MWe^{ux+vy}\}_{u_1}^{u_2} dv + \int_{u_1}^{u_2} \{NWe^{ux+yv}\}_{v_1}^{v_2} du = 0 \tag{4}$$

Genüge geschieht.

Die Gleichung (3) ist eine partielle Differentialgleichung und lässt sich leicht nach bekannten Methoden auflösen. Entwickelt, stellt sie sich so:

$$W\left(L-\frac{\partial M}{\partial u}-\frac{\partial N}{\partial v}\right)=M\frac{\partial W}{\partial u}+N\frac{\partial W}{\partial v},$$

und ihre Integration erfordert die Auflösung folgender zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &Ndu-Mdv=0,\\ &\left(-L+\frac{\partial M}{\partial u}+\frac{\partial N}{\partial v}\right)Wdv+NdW=0. \end{aligned}$$

Die erste derselben gibt, da $M$ und $N$ Functionen von $u$ und $v$ sind, wenn man integrirt:

$$(6)\qquad \varphi(u,v)=a;$$

sucht man hieraus $u$ und setzt den gefundenen Werth in die zweite der Gleichungen (5), so findet man durch Integration derselben:

$$W=\psi(v,a,b),$$

und dieses ist das Integral der Gleichung (3), wenn man für $b$ eine willkührliche Function von $a$ setzt, und unter $a$ den in (6) gefundenen Werth versteht. Nachdem man $W$ gefunden, substituire man den Werth desselben in (4), und findet man für $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ von $x$ und $y$ unabhängige Werthe, welche die Gleichung (4) identificiren, so hat man offenbar das Integral der vorgelegten Gleichung gefunden; es ist nämlich

$$z=\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} e^{ux+vy}\,W du dv,$$

oder, eine Summe solcher Ausdrücke, jede mit einer anderen willkührlichen Function versehen, wenn man mehrere Werthe für die Grenzen des Integrales findet.

Die hier aus einander gesetzte Methode lässt sich auch auf den Fall ausdehnen, wo in der Differentialgleichung eine beliebige Anzahl von unabhängig Variablen auftreten. Wäre nämlich die gegebene partielle Differentialgleichung von der Form:

$$Px+P_1\frac{\partial x}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial x}{\partial x_2}+\ldots+P_n\frac{\partial x}{\partial x_n}+P_{n+1}\frac{\partial^2 x}{\partial x_1{}^2}+P_{n+2}\frac{\partial^2 x}{\partial x_1\partial x_2}+\ldots=0,$$

und ihre Coefficienten bezüglich $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n$ linear, nämlich

$$P_m = a_m + b_m x_1 + c_m x_2 + \ldots . + k_m x_n,$$

so setze man:

$$x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \ldots e^{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + \ldots . + u_n x_n} W du_1 du_2 du_3 \ldots du_n,$$

wo $W$ eine Function ist von $u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n$, und wo die Grenzen von $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$ unabhängig sind. Man gelangt dann, denselben Weg wie früher einschlagend, zu einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die das $W$ liefert, und zu einer Gleichung, woraus die Integrationsgrenzen zu bestimmen sind.

Eben so ist einleuchtend, dass derselbe Weg auch eingeschlagen werden kann, wenn in der vorgelegten Gleichung statt partieller Differentialquotienten partielle Differenzquotienten stehen.

---

## II.

### Entwickelung des Werthes von dem unendlichen Kettenbruche $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \ldots .}}}$.

Setzt man

$$(1) \quad \varphi(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \ldots .,$$

so ist

$$\varphi(x+1) = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots,$$

$$\varphi(x+2) = 1 + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)} + \ldots,$$

und folglich:

$$(2) \qquad \varphi(x) - \varphi(x+1) = \frac{\varphi(x+2)}{x(x+1)}.$$

Setzt man nun weiter:

$$\psi(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}, \tag{3}$$

so ist

$$\psi(x+1)=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+1)}, \tag{4}$$

und wenn man aus (3) den Werth von $\varphi(x)$, aus (4) den Werth von $\varphi(x+2)$ sucht, diese gefundenen Werthe in (2) substituirt, und reducirt, so erhält man:

$$\psi(x)=\frac{1}{x+\psi(x+1)},$$

und daher

$$\psi(x+1)=\frac{1}{x+1+\psi(x+2)},$$

$$\psi(x+2)=\frac{1}{x+2+\psi(x+3)},$$

. . . . . . . . . . . .

und

$$\psi(x)=\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+1+\cfrac{1}{x+2+\cfrac{1}{x+3+\ldots}}}}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{\psi(1)}=\frac{\varphi(1)}{\varphi(2)}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ldots}}},$$

das heisst:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ldots}}}=\frac{1+\frac{1}{1!\,1!}+\frac{1}{2!\,2!}+\frac{1}{3!\,3!}+\ldots}{1+\frac{1}{1!\,2!}+\frac{1}{2!\,3!}+\frac{1}{3!\,4!}+\ldots}.$$

Man sehe hierüber: die Zusätze zu Legendre's Geometrie und auch den Aufsatz von Amoretti, der in den „Nouvelles annales de mathematiques“, rédigées par M. Terquem, Janvier 1855, steht.

Nun ist aber:

$$1+\frac{1}{1!\,1!}+\frac{1}{2!\,2!}+\frac{1}{3!\,3!}+\ldots=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2\cos u}du,$$

$$1+\frac{1}{1!\,2!}+\frac{1}{2!\,3!}+\frac{1}{3!\,4!}+\ldots=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos u e^{2\cos u}du,$$

wie man sich sehr leicht überzeugen kann, wenn man statt $e^{2\cos u}$ seinen Werth

$$1+2\cos u+\frac{4\cos^2 u}{2!}+\frac{8\cos^3 u}{3!}+\frac{16\cos^4 u}{4!}+\ldots$$

setzt, dann Glied für Glied integrirt, stets die bekannten Formeln

$$\int_0^{\pi}\cos^{2n+1}u du=0,\quad \int_0^{\pi}\cos^{2n}u du=\frac{\pi}{4^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

benützend. Es ist somit:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ldots}}}=\frac{\int_0^{\pi} e^{2\cos u}du}{\int_0^{\pi}\cos u e^{2\cos u}du}.$$

---

## III.

### Note über Gleichungen.

Die Aufgabe, sämmtliche Wurzeln einer numerischen Gleichung zu berechnen, wird bekanntlich auf folgende Weise gelöst. Man sucht zuerst eine Wurzel der Gleichung, dividirt dann das vorgelegte Gleichungspolynom durch den, dieser Wurzel entsprechenden Wurzelfactor, und erhält so eine Gleichung, die um einen Grad niedriger ist, als die vorgelegte; mit der verfährt man eben so, wodurch man eine Gleichung erhält, die um zwei Grade niedriger ist, als die vorgelegte; mit dieser um zwei Grade niedrigeren Gleichung verfährt man wieder so, u. s. f. u. s. f.

Die Divisionen durch die Wurzelfactoren sind aber eine lästige Arbeit, sobald die Wurzeln der Gleichung irrational, oder ga irrational und imaginär sind; ich will daher zeigen, wie man sich dieser Mühe überheben kann.

Sei

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-2}x^2+A_{n-1}x+A_n=0$$

die vorgelegte Gleichung und

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \dots$$

eine Wurzel derselben, die wir uns nach der Horner'schen Methode berechnet denken. Wir kommen mittelst derselben successive zu Gleichungen, von denen

die erste jede Wurzel um $a_0$,

„ zweite „ „ „ $a_0 + \frac{a_1}{10}$,

„ dritte „ „ „ $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}$,

„ vierte „ „ „ $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000}$,

. . . . . . . . . . . . . . . . .

kleiner hat als die vorgelegte Gleichung; sei die letzte der von uns so gebildeten Gleichungen

$$x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \dots + B_{n-2} x^2 + B_{n-1} x + B_n = 0,$$

so ist offenbar $B_n$ sehr nahe gleich Null; lässt man diese Zahl also fort, so geht diese Gleichung über in

$$x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \dots + B_{n-2} x^2 + B_{n-1} x = 0,$$

und sämmtliche Wurzeln derselben sind (sehr nahe) um $\alpha$ kleiner, als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung. — Nun ist aber eine Wurzel derselben $x = 0$, die andern ergeben sich aus der Auflösung der Gleichung:

$$x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \dots + B_{n-2} x + B_{n-1} = 0,$$

deren Coefficienten uns bekannt sind, da wir ja zu denselben bei der Auflösung der vorgelegten Gleichung nach der Horner'schen Methode gelangten.

Wir sehen also, dass, wenn wir eine Wurzel $x = \alpha$ der vorgelegten Gleichung nach Horner's Methode berechnen, wir durch den Mechanismus dieser Methode zu den Coefficienten der Gleichung

$$x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \dots + B_{n-2} x + B_{n-1} = 0$$

geführt werden, welche vom $(n-1)$ten Grade ist und Wurzeln hat, die, um $\alpha$ vermehrt, die $n-1$ übrigen Wurzeln der vorgelegten Gleichung liefern. Wenn wir nun auf dieselbe Weise die letzterhaltene Gleichung behandeln, eine Wurzel $x = \beta$ derselben finden und zu der Gleichung

$$x^{n-2}+C_1x^{n-3}+C_2x^{n-4}+\ldots.+C_{n-2}=0$$

geführt werden, so kann man sagen, dass die vorgelegte Gleichung die beiden Wurzeln

$$x=\alpha,\quad x=\alpha+\beta$$

besitzt, und dass die anderen $n-2$ Wurzeln um $\alpha+\beta$ grösser sind, als die Wurzeln der eben aufgeschriebenen Gleichung vom $(n-2)$ten Grade u. s. f.

---

Ich habe in meinem Werke: „Allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen" bewiesen, dass zwei Gleichungen

$$\varphi(x,y)=0,\quad \psi(x,y)=0$$

entweder nicht wesentlich von einander verschieden sind oder sich widersprechen, falls folgende Gleichung identisch statt findet:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \tag{1}$$

(Man sehe auch hierüber den Aufsatz von Dienger im Archiv. Band XXI. S. 219.)

Es kann manchmal der Fall eintreten, dass die Gleichung (1) nicht identisch ist, aber identisch wird für jenen Werth von $y$, der aus $\varphi(x,y)=0$ folgt; alsdann ist

$$\psi(x,y)=f(x,y)\,.\,\varphi(x,y)+a,$$

unter $a$ eine constante Zahl verstanden. Denn, bildet man $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ und substituirt deren Werthe in (1), so erhält man:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=f\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=f\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial y};$$

folglich:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}=\varphi(x,y)\cdot\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right],$$

was gleich Null ist, weil $\varphi(x,y)=0$ ist.

Das System der beiden vorgelegten Gleichungen kann, wenn $a \gtrless 0$ ist, zusammen nicht bestehen; wird hingegen, falls $a=0$ ist, für alle jene Werthe befriedigt, die der Gleichung $\varphi(x,y)=0$ genügen.

---

# XII.

# Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

Von
dem Herausgeber.

---

Die Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, so wie sie in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie nach dem Vorgange der französischen Geometer gewöhnlich gegeben wird, nimmt eine ziemlich grosse Anzahl verschiedener Coordinaten-Transformationen in Anspruch, und hat sich mir namentlich dann immer als mangelhaft, wenigstens als unbequem, fühlbar gemacht, wenn es auf die wirkliche Entwickelung der einfachsten Gleichung des betreffenden Kegelschnitts, nicht bloss auf die Bestimmung der Art oder Form desselben im Allgemeinen, ankam. Ich will daher diesen wichtigen Gegenstand im vorliegenden Aufsatze einer neuen Behandlung unterwerfen, die sich sowohl in Bezug auf die leichte Uebersichtlichkeit des Ganges der Entwickelung im Allgemeinen, als auch rücksichtlich der Einfachheit und Eleganz der eine leichte weitere Anwendung gestattenden Resultate der Untersuchung, vielleicht der Aufmerksamkeit der Mathematiker einigermassen empfehlen dürfte.

Die zu discutirende allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen sei, $x$ und $y$ als rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt,

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0.$$

Legen wir nun durch einen Punkt, dessen polare Coordinaten in

dem primitiven Systeme der $x$, $y$ wir durch $\alpha$, $\varrho$ bezeichnen wollen, ein neues, dem primitiven Systeme der $xy$ paralleles Coordinatensystem, und bezeichnen in diesem neuen Systeme die polaren Coordinaten im Allgemeinen durch $\varphi_1$, $r_1$, so muss man, um von dem primitiven Systeme der $xy$ zu diesem neuen Systeme polarer Coordinaten überzugehen, nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar im Allgemeinen

$$x=\varrho\cos\alpha+r_1\cos\varphi_1,\quad y=\varrho\sin\alpha+r_1\sin\varphi_1$$

setzen, wodurch die zu discutirende allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned}0= & \ a(\varrho\cos\alpha+\varrho_1\cos\varphi_1)^2\\ & +b(\varrho\sin\alpha+\varrho_1\sin\varphi_1)^2\\ & +2c(\varrho\cos\alpha+r_1\cos\varphi_1)(\varrho\sin\alpha+r_1\sin\varphi_1)\\ & +2d(\varrho\cos\alpha+r_1\cos\varphi_1)\\ & +2e(\varrho\sin\alpha+r_1\sin\varphi_1)\\ & +f,\end{aligned}$$

oder nach gehöriger Entwickelung die Gestalt:

$$\begin{aligned}0= & \ (a\cos\alpha^2+b\sin\alpha^2+2c\sin\alpha\cos\alpha)\varrho^2+2(d\cos\alpha+e\sin\alpha)\varrho+f\\ & +2\{(a\varrho\cos\alpha+c\varrho\sin\alpha+d)\cos\varphi_1+(b\varrho\sin\alpha+c\varrho\cos\alpha+e)\sin\varphi_1\}r_1\\ & +(a\cos\varphi_1{}^2+b\sin\varphi_1{}^2+2c\sin\varphi_1\cos\varphi_1)r_1{}^2.\end{aligned}$$

Wir wollen nun die Grössen $\alpha$, $\varrho$ so zu bestimmen suchen, dass das zweite Glied dieser Gleichung im Allgemeinen verschwindet. Dies giebt zur Bestimmung der beiden in Rede stehenden Grössen die folgenden Gleichungen:

$$a\varrho\cos\alpha+c\varrho\sin\alpha+d=0,$$

$$b\varrho\sin\alpha+c\varrho\cos\alpha+e=0;$$

aus denen

$$\varrho=-\frac{d}{a\cos\alpha+c\sin\alpha},\quad \varrho=-\frac{e}{b\sin\alpha+c\cos\alpha};$$

also

$$\frac{d}{a\cos\alpha+c\sin\alpha}=\frac{e}{b\sin\alpha+c\cos\alpha}$$

oder

$$\frac{a\cos\alpha+c\sin\alpha}{b\sin\alpha+c\cos\alpha}=\frac{a+c\,\mathrm{tang}\,\alpha}{c+b\,\mathrm{tang}\,\alpha}=\frac{d}{e}$$

folgt, woraus sich ferner

$$\mathrm{tang}\,\alpha=\frac{ae-cd}{bd-ce}$$

ergiebt, mittelst welcher Formel der 360° nicht übersteiger Winkel $\alpha$ immer bestimmt werden kann, wobei man jedoch bemerken hat, dass diese Formel für $\alpha$ jederzeit zwei um 1 von einander verschiedene Werthe liefert. Welchen dieser bei Werthe man aber zu nehmen hat, kann immer leicht und sic entschieden werden. Aus den Formeln

$$\varrho=-\frac{d}{a\cos\alpha+c\sin\alpha},\quad \varrho=-\frac{e}{b\sin\alpha+c\cos\alpha}$$

erhellet nämlich auf der Stelle, dass den beiden in Rede steh den, um 180° von einander verschiedenen Werthen von $\alpha$ je zeit zwei Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen von $\varrho$ sprechen; und da nun $\varrho$ seiner Natur nach nur positiv sein ka so kann nie ein Zweifel übrig bleiben, wie man den 360° n übersteigenden Winkel $\alpha$ zu nehmen hat.

Leicht erhält man auch mit Beziehung der oberen und u ren Zeichen auf einander:

$$\sin\alpha=\pm\frac{ae-cd}{\sqrt{(ae-cd)^2+(bd-ce)^2}},$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{bd-ce}{\sqrt{(ae-cd)^2+(bd-ce)^2}};$$

und hieraus ferner:

$$\varrho=\mp\frac{\sqrt{(ae-cd)^2+(bd-ce)^2}}{ab-c^2},$$

wo die Zeichen jederzeit so zu nehmen sind, dass $\varrho$ positiv ausf

Für die jetzt bestimmten Werthe von $\alpha$ und $\varrho$ wird nun obige Gleichung unserer Linie des zweiten Grades:

$$r_1{}^2=-\frac{(a\cos\alpha^2+b\sin\alpha^2+2c\sin\alpha\cos\alpha)\varrho^2+2(d\cos\alpha+e\sin\alpha)\varrho}{a\cos\varphi_1{}^2+b\sin\varphi_1{}^2+2c\sin\varphi_1\cos\varphi_1}$$

Bemerkt man nun noch, dass, wie aus den beiden Gleichun

$$a\varrho\cos\alpha+c\varrho\sin\alpha+d=0,$$

$$b\varrho\sin\alpha+c\varrho\cos\alpha+e=0$$

auf der Stelle folgt:

$$(ab-c^2)\varrho\cos\alpha = ce-bd,$$

$$(ab-c^2)\varrho\sin\alpha = cd-ae,$$

also

$$\varrho\cos\alpha = \frac{ce-bd}{ab-c^2}, \quad \varrho\sin\alpha = \frac{cd-ae}{ab-c^2}$$

ist, so findet man, wenn man diese Grössen in den Zähler des obigen Werths von $r_1^2$ einführt, für diesen Zähler mittelst leichter Rechnung den folgenden Ausdruck:

$$-\frac{ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde}{ab-c^2},$$

woraus sich nun nach dem Obigen die folgende merkwürdige Gleichung unserer Linie des zweiten Grades ergiebt:

$$r_1^2 = \frac{ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde}{(ab-c^2)(a\cos\varphi_1^2+b\sin\varphi_1^2+2c\sin\varphi_1\cos\varphi_1)}.$$

Hier dringt sich nun aber schon ganz von selbst die Bemerkung auf, dass alle obigen Ausdrücke unendlich werden, und daher die ganze vorhergehende Entwickelung ihre Gültigkeit verliert, die Wegschaffung des zweiten Gliedes aus unserer obigen Gleichung der Linie des zweiten Grades folglich überhaupt unzulässig und unmöglich ist, wenn die Grösse $ab-c^2$ verschwindet, so dass wir also von jetzt an zu der Annahme genöthigt sind, dass die Grösse $ab-c^2$ nicht verschwinde, indem wir zu dem Falle, wenn $ab-c^2=0$ ist, späterhin besonders zurückkehren werden.

Weil nun bekanntlich

$$\cos\varphi_1^2 = \frac{1+\cos 2\varphi_1}{2}, \quad \sin\varphi_1^2 = \frac{1-\cos 2\varphi_1}{2}$$

und $\sin 2\varphi_1 = 2\sin\varphi_1\cos\varphi_1$ ist, so ist

$$a\cos\varphi_1^2+b\sin\varphi_1^2+2c\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos 2\varphi_1 + c\sin 2\varphi_1$$

$$= \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\left(\cos 2\varphi_1+\frac{2c}{a-b}\sin 2\varphi_1\right),$$

also, wenn wir, den Winkel $2\mu$ positiv und nicht grösser als $360^0$ nehmend,

$$\tang 2\mu = \frac{2c}{a-b}$$

setzen:

$$a\cos\varphi_1{}^2+b\sin\varphi_1{}^2+2c\sin\varphi_1\cos\varphi_1=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\cos 2(\mu-\varphi_1),$$

und folglich:

$$r_1{}^2=\frac{ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde}{(ab-c^2)\left\{\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\cos 2(\mu-\varphi_1)\right\}}.$$

Es ist aber ferner

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\cos 2(\mu-\varphi_1)$$

$$=\frac{a+b}{2}\{\cos(\mu-\varphi_1)^2+\sin(\mu-\varphi_1)^2\}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\{\cos(\mu-\varphi_1)^2-\sin(\mu-\varphi_1)^2\}$$

$$=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)\cos(\mu-\varphi_1)^2+\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)\sin(\mu-\varphi_1)^2,$$

folglich:

$$r_1{}^2=\frac{\dfrac{ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde}{ab-c^2}}{\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)\cos(\mu-\varphi_1)^2+\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)\sin(\mu-\varphi_1)^2}.$$

Wenn man das Product

$$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)$$

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\sec 2\mu^2$$

entwickelt, indem man

$$\sec 2\mu^2=1+\operatorname{tang} 2\mu^2=\frac{(a-b)^2+4c^2}{(a-b)^2}$$

setzt, so findet man leicht:

$$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)=ab-c^2,$$

und schliesst also hieraus, dass die Grössen

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu \text{ und } \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, jenachdem

$$ab - c^2 > 0 \text{ oder } ab - c^2 < 0$$

ist.

In dem Falle

$$ab - c^2 > 0$$

kann man also immer setzen:

$$A^2 = \pm \frac{ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde}{(ab - c^2)\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)},$$

$$B^2 = \pm \frac{ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde}{(ab - c^2)\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)};$$

indem man die oberen oder unteren Vorzeichen nimmt, jenachdem die Grösse

$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde$$

mit den beiden Grössen

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sec 2\mu \text{ und } \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sec 2\mu$$

gleiches oder ungleiches Vorzeichen hat, und erhält dann nach dem Obigen:

$$r_1^2 = \pm \frac{1}{\frac{\cos(\mu - \varphi_1)^2}{A^2} + \frac{\sin(\mu - \varphi_1)^2}{B^2}}$$

oder

$$\frac{r_1^2 \cos(\mu - \varphi_1)^2}{A^2} + \frac{r_1^2 \sin(\mu - \varphi_1)^2}{B^2} = \pm 1,$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem

$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde$$

mit den beiden Grössen

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sec 2\mu \text{ und } \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sec 2\mu$$

gleiches oder ungleiches Vorzeichen hat.

In dem Falle

$$ab - c^2 < 0$$

kann man immer setzen:

$$A^2 = \pm \frac{ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde}{(ab - c^2)\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)},$$

$$B^2 = \mp \frac{ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde}{(ab - c^2)\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)};$$

indem man, was immer möglich ist, die Zeichen so nimmt $A^2$ und $B^2$, wie es erforderlich ist, positiv werden. Dann

$$r_1{}^2 = \pm \frac{1}{\frac{\cos(\mu - \varphi_1)^2}{A^2} - \frac{\sin(\mu - \varphi_1)^2}{B^2}}$$

oder

$$\frac{r_1{}^2 \cos(\mu - \varphi_1)^2}{A^2} - \frac{r_1{}^2 \sin(\mu - \varphi_1)^2}{B^2} = \pm 1.$$

Legt man durch den durch die polaren Coordinaten $\alpha$, stimmten Punkt ein rechtwinkliges Coordinatensystem der welchem der positive Theil der Axe der $X$ mit dem pc Theile der ersten Axe des durch denselben Punkt gelegten winkligen Systems, auf welches sich die polaren Coor $\varphi_1$, $r_1$ beziehen, den auf gewöhnliche Weise genommene kel $\mu$ einschliesst, so erhellet leicht, dass in völliger Allgem

$$X = r_1 \cos(\varphi_1 - \mu), \quad Y = r_1 \sin(\varphi_1 - \mu)$$

ist. Also ist, wenn

$$ab - c^2 > 0$$

ist:

$$\left(\frac{X}{A}\right)^2 + \left(\frac{Y}{B}\right)^2 = \pm 1;$$

und für

$$ab - c^2 < 0$$

ist:

$$\left(\frac{X}{A}\right)^2 - \left(\frac{Y}{B}\right)^2 = \pm 1.$$

Für $ab - c^2 > 0$ ist folglich die Linie des zweiten Grad Ellipse oder imaginär, jenachdem

$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde$$

mit den Grössen

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu \text{ und } \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu$$

gleiches oder ungleiches Vorzeichen hat. Für $ab-c^2<0$ ist die Linie des zweiten Grades eine Hyperbel.

Die Formel

$$\tan 2\mu = \frac{2c}{a-b}$$

liefert für den 360° nicht übersteigenden positiven Winkel $2\mu$ zwei um 180° von einander verschiedene Werthe, von denen im Vorhergehenden beliebig der eine oder der andere genommen werden kann; und weil nun nach dem Obigen

$$\sec 2\mu = \pm \frac{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{a-b}$$

ist, so wird man offenbar den Winkel $2\mu$ immer so nehmen können, dass $\sec 2\mu$ mit $a-b$ gleiches Vorzeichen hat, also

$$\frac{a-b}{2}\sec 2\mu$$

positiv ist. Ist nun $ab-c^2>0$, so haben $a$ und $b$ offenbar gleiche Vorzeichen, und nimmt man nun, wozu man augenscheinlich berechtigt ist, $a$ und $b$ als positiv an, so sind in diesem Falle die Grössen

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu \text{ und } \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu,$$

welche bekanntlich gleiche Vorzeichen haben, offenbar beide positiv. In dem Falle $ab-c^2>0$ wird man also, unter der stets zulässigen Voraussetzung, dass $a$ und $b$ beide positiv sind, nach dem Obigen auch sagen können, dass die Curve des zweiten Grades eine Ellipse oder imaginär ist, jenachdem die Grösse

$$ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde$$

positiv oder negativ ist.

Bisher ist offenbar stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die Grösse

$$ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde$$

nicht verschwindet. Ist aber

$$ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde=0$$

und daher auch

$$(a\cos\alpha^2+b\sin\alpha^2+2c\sin\alpha\cos\alpha)\varrho^2+2(d\cos\alpha+e\sin\alpha)\varrho+f=0,$$

so ist nach dem Obigen die Gleichung unserer Curve des zweiten Grades eigentlich

$$(a\cos\varphi_1{}^2+b\sin\varphi_1{}^2+2c\sin\varphi_1\cos\varphi_1)r_1{}^2=0,$$

und daher entweder

$$r_1=0$$

oder

$$a\cos\varphi_1{}^2+b\sin\varphi_1{}^2+2c\sin\varphi_1\cos\varphi_1=0.$$

Nach dem Obigen kann man diese letztere Gleichung auch unter der Form

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)\cos(\mu-\varphi_1)^2\\ +\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)\sin(\mu-\varphi_1)^2\end{array}\right\}=0$$

darstellen, und weil nun in dem Falle $ab-c^2>0$ bekanntlich die Grössen

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu \quad\text{und}\quad \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu$$

gleiche Vorzeichen haben, so ist in diesem Falle die Gleichung

$$a\cos\varphi_1{}^2+b\sin\varphi_1{}^2+2c\sin\varphi_1\cos\varphi_1=0$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)\cos(\mu-\varphi_1)^2\\ +\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu\right)\sin(\mu-\varphi_1)^2\end{array}\right\}=0$$

offenbar unzulässig. Für $ab-c^2>0$ kann also nur

$$r_1=0,$$

für $ab-c^2<0$ dagegen kann

$$r_1=0 \quad\text{und}\quad \tang(\mu-\varphi_1)=\pm\sqrt{-\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu}{\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu}}$$

sein, wo im letzteren Falle also $\varphi_1$ ein constanter Winkel ist. Die Gleichung $r_1=0$ repräsentirt den Punkt $(\alpha\varrho)$, die Gleichung

$$\tan(\mu-\varphi_1)=\pm\sqrt{-\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sec 2\mu}{\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sec 2\mu}},$$

welche nur in dem Falle $ab-c^2<0$ zulässig ist, repräsentirt, weil der Winkel $\varphi_1$ constant ist, zwei durch den Punkt $(\alpha\varrho)$ gehende gerade Linien.

Wir wenden uns nun zu der Betrachtung des Falls, wenn

$$ab-c^2=0$$

ist. In diesem Falle wollen wir zeigen, dass sich im Allgemeinen immer eine gerade Linie und ein Punkt von solcher Beschaffenheit finden lassen, dass die beiden Entfernungen eines jeden Punktes der durch die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

charakterisirten Curve des zweiten Grades von der in Rede stehenden geraden Linie und dem in Rede stehenden Punkte einander gleich sind, woraus sich dann von selbst ergiebt, dass in dem Falle $ab-c^2=0$ die Curve des zweiten Grades im Allgemeinen eine Parabel ist, deren Directrix und Brennpunkt die in Rede stehende gerade Linie und der in Rede stehende Punkt sind.

Um dies zu beweisen, sei

$$Ax+By+C=0$$

die Gleichung der gesuchten geraden Linie, und $X$, $Y$ seien die Coordinaten des gesuchten Punktes. Die Entfernung des Punktes $(xy)$ in der Linie des zweiten Grades von dem Punkte $(XY)$ ist bekanntlich

$$\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2},$$

und das Quadrat der Entfernung des Punktes $(xy)$ in der Linie des zweiten Grades von der im Allgemeinen durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

charakterisirten geraden Linie ist

$$\frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}.$$

Also liefern uns die Bedingungen der Aufgabe, indem $(xy)$ immer einen Punkt in der Linie des zweiten Grades repräsentirt, die Gleichung

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=\frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2},$$

welche man leicht auf die Form

$$\left.\begin{array}{r}B^2x^2+A^2y^2-2ABxy-2\{AC+(A^2+B^2)X\}x\\ -2\{BC+(A^2+B^2)Y\}y\\ -\{C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)\}\end{array}\right\}=0$$

bringt; und weil nun wegen der Bedingungen der Aufgabe diese Gleichung offenbar mit der Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

identisch sein muss, so erhalten wir die Gleichungen

$$B^2=a,\quad A^2=b,\quad AB=-c$$

und

$$AC+(A^2+B^2)X=-d,$$

$$BC+(A^2+B^2)Y=-e,$$

$$C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)=-f;$$

wo sich nun frägt, ob die fünf Grössen $A$, $B$, $C$, $X$, $Y$ so bestimmt werden können, dass diesen sechs Gleichungen genügt wird, was wir nun untersuchen wollen.

Weil nach der Voraussetzung

$$ab-c^2=0 \text{ oder } ab=c^2$$

ist, so haben $a$ und $b$ gleiche Vorzeichen, und wir sind daher offenbar anzunehmen berechtigt, dass diese Grössen beide positiv sind. Aus den beiden Gleichungen

$$A^2=b,\quad B^2=a$$

folgt mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$A=\pm\sqrt{b},\quad B=\pm\sqrt{a}$$

oder

$$A=\pm\sqrt{b},\quad B=\mp\sqrt{a},$$

wo $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ reelle Grössen sind. Im ersten und zweiten Falle ist respective

$$AB=\sqrt{ab} \text{ und } AB=-\sqrt{ab}.$$

Weil nun wegen der Gleichung $ab=c^2$, die hier immer die Grundlage der Untersuchung bildet, jenachdem $c$ positiv oder negativ ist, $c=\sqrt{ab}$ oder $c=-\sqrt{ab}$ ist, und bekanntlich $AB=-c$ sein soll, so muss man mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$A=\pm\sqrt{b},\quad B=\mp\sqrt{a}$$

oder

$$A=\pm\sqrt{b},\quad B=\pm\sqrt{a}$$

setzen, jenachdem die Grösse $c$ positiv oder negativ ist *), so dass sich also die drei Gleichungen

$$B^2=a,\quad A^2=b,\quad AB=-c$$

immer in reeller Weise erfüllen lassen, wie aus dem Vorhergehenden sich in ganz unzweideutiger Weise ergiebt.

Nachdem wir $A$ und $B$ bestimmt haben, wollen wir nun auch die drei Gleichungen

$$AC+(A^2+B^2)X=-d,$$

$$BC+(A^2+B^2)Y=-e,$$

$$C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)=-f$$

auflösen. Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$X=-\frac{d+AC}{A^2+B^2},\quad Y=-\frac{e+BC}{A^2+B^2};$$

folglich

$$X^2+Y^2=\frac{(d+AC)^2+(e+BC)^2}{(A^2+B^2)^2},$$

also, wenn man dies in die dritte Gleichung einführt:

$$C^2-\frac{(d+AC)^2+(e+BC)^2}{A^2+B^2}=-f,$$

woraus sich leicht

---

*) Der Fall, wenn $c$, und wegen der Gleichung $ab-c^2=0$ also auch eine der beiden Grössen $a$, $b$ verschwindet, erledigt sich von selbst, indem es in diesem Falle ganz gleichgültig ist, wie man die Zeichen nimmt, weil die dritte Gleichung $AB=-c$ dann immer erfüllt ist. Wir werden daher auch im Folgenden diesen Fall nicht weiter besonders hervorheben.

$$\frac{d^2+e^2+2(dA+eB)C}{A^2+B^2}=f,$$

also

$$C=\frac{f(A^2+B^2)-(d^2+e^2)}{2(dA+eB)}$$

ergiebt. Daher hat man zur Bestimmung von $C$, $X$, $Y$ die Formeln:

$$C=\frac{f(A^2+B^2)-(d^2+e^2)}{2(dA+eB)},$$

$$X=-\frac{d+AC}{A^2+B^2}, \quad Y=-\frac{e+BC}{A^2+B^2};$$

mittelst welcher sich die in Rede stehenden Grössen im Allgemeinen immer in reeller Weise bestimmen lassen, wodurch also bewiesen ist, dass unsere Linie des zweiten Grades im vorliegenden Falle, wo $ab-c^2=0$ ist, in der That im Allgemeinen eine Parabel ist, mit der durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

charakterisirten Directrix und dem durch die Coordinaten $X$, $Y$ bestimmten Brennpunkte.

Wegen der doppelten Zeichen in den Ausdrücken von $A$ und $B$ könnte es scheinen, als wenn es zwei Directrixen und zwei Brennpunkte gäbe. Dass dies aber nicht der Fall ist, kann leicht auf folgende Art gezeigt werden, wobei wir die absoluten Werthe von $A$, $B$ respective durch $A'$, $B'$ bezeichnen wollen.

Für ein positives $c$ ist

$$A=\pm A', \quad B=\mp B',$$

folglich

$$C=\pm\frac{f(A'^2+B'^2)-(d^2+e^2)}{2(dA'-eB')}=\pm C',$$

$$X=-\frac{d+A'C'}{A'^2+B'^2}, \quad Y=-\frac{e-B'C'}{A'^2+B'^2};$$

also die Gleichung der Directrix:

$$\pm A'x\mp B'y\pm C'=0$$

oder

$$A'x-B'y+C'=0,$$

so dass man also zur Bestimmung der Directrix und des Brennpunkts bloss die Formeln

$$A'x - B'y + C' = 0,$$

$$X = -\frac{d + A'C'}{A'^2 + B'^2}, \quad Y = -\frac{e - B'C'}{A'^2 + B'^2}$$

hat, welche doppelte Zeichen nicht mehr enthalten.

Für ein negatives $c$ ist

$$A = \pm A', \quad B = \pm B',$$

folglich

$$C = \pm \frac{f(A'^2 + B'^2) - (d^2 + e^2)}{2(dA' + eB')} = \pm C',$$

$$X = -\frac{d + A'C'}{A'^2 + B'^2}, \quad Y = -\frac{e + B'C'}{A'^2 + B'^2};$$

also die Gleichung der Directrix:

$$\pm A'x \pm B'y \pm C' = 0$$

oder

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

so dass man also zur Bestimmung der Directrix und des Brennpunkts bloss die Formeln

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

$$X = -\frac{d + A'C'}{A'^2 + B'^2}, \quad Y = -\frac{e + B'C'}{A'^2 + B'^2}$$

hat, welche doppelte Zeichen nicht mehr enthalten.

Weil durch das vorhergehende Verfahren unmittelbar die Directrix und der Brennpunkt der Parabel bestimmt werden, also auch leicht deren Axe durch die gewöhnlichen Formeln der analytischen Geometrie gefunden werden kann, so scheint mir die vorhergehende Methode vor der gewöhnlichen Methode der Discussion auch aus diesem Grunde wesentliche Vorzüge zu haben.

Nun sind aber noch zwei Ausnahmefälle, in denen die obigen Formeln ihre Anwendbarkeit verlieren, zu betrachten.

Der erste dieser Fälle ist der Fall, wenn $A^2 + B^2 = 0$ ist, wo $X$ und $Y$ unendlich werden. In diesem Falle ist $A = 0$, $B = 0$, also $a = 0$, $b = 0$, und folglich wegen der Gleichung $ab - c^2 = 0$ auch $c = 0$, so dass also die zu discutirende allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen in diesem Falle

$$2dx + 2ey + f = 0$$

ist, und folglich eine gerade Linie darstellt.

Der zweite der beiden in Rede stehenden Fälle ist der Fall, wenn $dA + eB = 0$ ist, in welchem Falle $C$, und demzufolge auch $X$ und $Y$, unendlich werden. Wenn $c$ positiv ist, so ist

$$A = \pm\sqrt{b}, \quad B = \mp\sqrt{a},$$

so wie $c = \sqrt{ab}$. Wegen der vorausgesetzten Gleichung $dA + eB = 0$ ist

$$d\sqrt{b} - e\sqrt{a} = 0,$$

also

$$e = d\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \text{ und } d = e\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

so dass sich also die zu discutirende Gleichung auf eine der beiden Formen

$$ax^2 + by^2 + 2\sqrt{ab}.xy + 2dx + 2d\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}y + f = 0,$$

$$ax^2 + by^2 + 2\sqrt{ab}.xy + 2e\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x + 2ey + f = 0;$$

also auf eine der beiden Formen

$$(x\sqrt{a} + y\sqrt{b})^2 + 2\frac{d}{\sqrt{a}}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b}) + f = 0,$$

$$(x\sqrt{a} + y\sqrt{b})^2 + 2\frac{e}{\sqrt{b}}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b}) + f = 0$$

bringen lässt. Wenn $c$ negativ ist, so ist

$$A = \pm\sqrt{b}, \quad B = \pm\sqrt{a},$$

so wie $c = -\sqrt{ab}$. Wegen der vorausgesetzten Gleichung $dA + eB = 0$ ist

$$d\sqrt{b} + e\sqrt{a} = 0,$$

also

$$e = -d\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \text{ und } d = -e\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

folglich die zu discutirende Gleichung

$$ax^2+by^2-2\sqrt{ab}.xy+2dx-2d\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}y+f=0,$$

$$ax^2+by^2-2\sqrt{ab}.xy-2e\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x+2ey+f=0$$

oder

$$(x\sqrt{a}-y\sqrt{b})^2+2\frac{d}{\sqrt{a}}(x\sqrt{a}-y\sqrt{b})+f=0,$$

$$(x\sqrt{a}-y\sqrt{b})^2-2\frac{e}{\sqrt{b}}(x\sqrt{a}-y\sqrt{b})+f=0.$$

Da sich nun die vorstehenden Gleichungen in Bezug auf

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{b} \text{ oder } x\sqrt{a}-y\sqrt{b}$$

als unbekannte Grösse wie quadratische Gleichungen auflösen lassen, so ist klar, dass im vorliegenden Falle die durch die zu discutirende Gleichung des zweiten Grades dargestellte Curve durch zwei gerade Linien repräsentirt wird oder imaginär ist, welches beides davon abhängt, ob die Wurzeln der in Rede stehenden quadratischen Gleichungen reell oder imaginär sind.

Im Obigen ist freilich die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

nur auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen worden, was aber auch ganz zulässig und völlig hinreichend ist; denn aus der bekannten Form der allgemeinsten Formeln zur Verwandlung der Coordinaten in der Ebene erhellet auf der Stelle, dass die obige Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen ihre Form im Allgemeinen nicht im Geringsten ändert, wie man auch das Coordinatensystem transformiren mag.

---

Nachdem wir hiermit unsern Zweck, die allgemeine Gleichung des zweiten Grades

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

zwischen zwei veränderlichen Grössen zu discutiren, erreicht haben, wollen wir nur noch in der Kürze bemerken, dass man in dem Falle, wenn

$$ab-c^2=0$$

ist, wo sich aus der Gleichung

$$0=(a\cos\alpha^2+b\sin\alpha^2+2c\sin\alpha\cos\alpha)\varrho^2+2(d\cos\alpha+e\sin\alpha)\varrho+f$$

$$+2\{(a\varrho\cos\alpha+c\varrho\sin\alpha+d)\cos\varphi_1+(b\varrho\sin\alpha+c\varrho\cos\alpha+e)\sin\varphi_1\}r_1$$

$$+(a\cos\varphi_1{}^2+b\sin\varphi_1{}^2+2c\sin\varphi_1\cos\varphi_1)r_1{}^2$$

bekanntlich das zweite Glied nicht wegschaffen lässt, aus dieser Gleichung immer das erste Glied wegschaffen kann. Weil $c=\pm\sqrt{ab}$ ist, so ist die vorstehende Gleichung, wie man leicht findet:

$$0=(\cos\alpha\sqrt{a}\pm\sin\alpha\sqrt{b})^2\varrho^2+2(d\cos\alpha+e\sin\alpha)\varrho+f$$

$$+2\{(\cos\alpha\sqrt{a}\pm\sin\alpha\sqrt{b})(\cos\varphi_1\sqrt{a}\pm\sin\varphi_1\sqrt{b})\varrho+d\cos\varphi_1+e\sin\varphi_1\}r_1$$

$$+(\cos\varphi_1\sqrt{a}\pm\sin\varphi_1\sqrt{b})^2r_1{}^2,$$

also, wenn man, um das erste Glied wegzuschaffen,

$$\cos\alpha\sqrt{a}\pm\sin\alpha\sqrt{b}=0,$$

$$2(d\cos\alpha+e\sin\alpha)\varrho+f=0;$$

folglich

$$\tan\alpha=\mp\sqrt{\frac{a}{b}},\quad \varrho=-\frac{f}{2(d\cos\alpha+e\sin\alpha)},$$

wo die Wurzelgrösse reell ist, setzt:

$$\{2(d\cos\varphi_1+e\sin\varphi_1)+(\cos\varphi_1\sqrt{a}\pm\sin\varphi_1\sqrt{b})^2r_1\}r_1=0,$$

woraus sich $r_1=0$ oder

$$r_1=-2\frac{d\cos\varphi_1+e\sin\varphi_1}{(\cos\varphi_1\sqrt{a}\pm\sin\varphi_1.\sqrt{b})^2}$$

ergiebt.

Setzt man

$$r_1\cos\varphi_1=x_1,\quad r_1\sin\varphi_1=y_1,$$

so ist obige Gleichung auch:

$$(x_1\sqrt{a}\pm y_1\sqrt{b})^2+2(dx_1+ey_1)=0.$$

Diesen hier nur beiläufig berührten Gegenstand weiter zu verfolgen, namentlich alle einzelnen möglichen Fälle zu unterscheiden und gehörig zu discutiren, ist jetzt nicht meine Absicht, da dem eigentlichen Zwecke dieser Abhandlung im Obigen schon vollständig genügt ist.

# XIII.

## Untersuchung des Fehlers, wenn die Ebenen eines Glasspiegels nicht parallel sind.

Von
Herrn Professor Dr. *Ignatz Lemoch*
an der Universität zu Lemberg.

---

Sind (Taf. II. Fig. 5.) die Ebenen $AB$, $DE$ parallel, $DE$ die belegte Seite, so wird der von $S$ unter dem Winkel $SCF$ auffallende Strahl nach $CJ$ gebrochen, und da nach dem Gesetze der Reflexion der Winkel $CJG = KJH$, somit auch $GCJ = JKH$, und der letztere der Einfallswinkel nach der Reflexion an die Ebene $AB$ ist, so bildet auch der aus dem Glase austretende Strahl $KO$ mit seinem Einfallslothe $KL$ denselben Winkel, unter dem er auf die erste Fläche aufgefallen ist; es ist somit $SCF = LKO$.

Sind jedoch (Taf. II. Fig. 6.) $LMR$ und $BMN$ die beiden Flächen eines Spiegels, diese somit unter dem Winkel $BML = \gamma$ geneigt, $BAL$ ein Durchschnitt beider Flächen mit der Einfallsebene, diese auf die obere Fläche $MN$ senkrecht, der Neigungswinkel zwischen den Ebenen $BML$ und $BAL$, nämlich $MBA = \varepsilon$ und der Winkel $BAL = A$, so denken wir uns aus $A$ mit dem Halbmesser Eins eine Kugel beschrieben, welche die Ebenen $MN$, $LA$ und $LAB$ schneidet, und bekommen dadurch das sphärische Dreieck $abc$, in welchem $bc = A$, $bac = \gamma$, $ab = 90 - \varepsilon$, $acb$ ein rechter Winkel ist; aus diesem Dreiecke folgt $\cos\varepsilon = \operatorname{cotg}\gamma \operatorname{tg} A$, also

$$\operatorname{tang} A = \cos\varepsilon \operatorname{tang}\gamma, \qquad (1)$$

und weil $A$ und $\gamma$ sehr kleine Winkel sind, so kann man die Tangenten den Bögen gleich setzen, und bekommt:

$$A = \gamma \cos\varepsilon. \qquad (2)$$

Zur Erklärung der ferneren Rechnung wird es besser sein, wenn wir uns in Taf. II. Fig. 7. das Dreieck $ABL$ in die Ebene des Papiers umlegen; $S$ ist dann der Punkt, von dem der Strahl $SC$ kommt, $CF$ das Einfallsloth, somit $SCF=\alpha$ der Einfallswinkel; der Strahl wird beim Eintritte in das Glas zum Einfallsloth gebrochen, und wenn der Brechungswinkel $FCJ=\beta$ heisst, so ist

$$\sin\alpha = n\sin\beta. \qquad (3)$$

Der gebrochene Strahl wird an der spiegelnden Ebene $AL$ unter demselben Winkel $m$ reflektirt, unter dem er aufgefallen ist, macht nach der Reflexion an die Ebene $AB$ mit dem Einfallslothe $GE$ den Winkel $GEH=\alpha'$, und wird beim Austritte nach $O$ gebrochen; daher ist, wenn der Brechungswinkel $GEO=\beta'$ gesetzt wird,

$$\sin\beta' = n\sin\alpha'. \qquad (4)$$

Ferner ist $ACJ=90^0-\beta$ und zugleich der äussere Winkel des Dreiecks $CSA$, daher $90^0-\beta=A+m$; der Winkel $EDL=m$ ist ein äusserer des Dreieckes $EDA$, somit $m=90^0-\alpha'+A$; aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\alpha'-\beta=2A. \qquad (5)$$

Der Fehler wegen der nicht parallelen Begränzung des Spiegels ist $\beta'-\alpha=x$, somit ist

$$\beta'=\alpha+x. \qquad (6)$$

Um $x$ zu bestimmen ist $\sin\beta'-\sin\alpha=n(\sin\alpha'-\sin\beta)$; werden diese Unterschiede in Produkte aufgelöst, so erhält man:

$$\sin\left(\frac{\beta'-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta'+\alpha}{2}\right)=n\sin\left(\frac{\alpha'-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha'+\beta}{2}\right),$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) und (5):

$$\sin\frac{x}{2}\cos\left(\frac{2\alpha+x}{2}\right)=n\sin A\cos(\beta+A). \qquad (7)$$

Wegen der Kleinheit der Winkel $x$ und $A$ kann $\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$, $\sin A=A$ gesetzt, ferner $x$ gegen $2\alpha$, $A$ gegen $\beta$ vernachlässigt werden; dadurch verwandelt sich die Gleichung (7) in $x\cos\alpha=2nA\cos\beta$, und da aus (3) $\cos\beta=\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{n}$ folgt, so ist $x=\frac{2A\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$; wird hier für $A$ der Werth aus (2) substituirt, so ist der in Sekunden ausgedrückte Fehler $\beta'-\alpha$ oder

$$x''=\frac{2\gamma''\cos\varepsilon\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}. \qquad (8)$$

**Anmerkung.** Beim Durchgange eines Lichtstrahles durch ein prismatisches Glasstück beträgt der Fehler nur die Hälfte des eben gefundenen, $\alpha'$ und $\beta'$ sind dann der Einfalls- und Brechungswinkel an der zweiten Ebene.

Da $n$ immer grösser als die Einheit ist, somit in Gleichung (8) $n^2-\sin^2\alpha$ nicht Null werden kann, so folgt, dass $x$ nur dann verschwindet, wenn entweder $\gamma=0$ oder $\varepsilon=90^0$ wird, d. h. wenn entweder die Gränzflächen des Glases parallel oder wenn die Einfallsebene mit der Durchschnittslinie der Gränzflächen parallel ist.

Lässt man bei demselben $\alpha$ und $\gamma$ die Lage der Einfallsebene, also $\varepsilon$, variabel sein, so wird für $\varepsilon=0$ und $\varepsilon=180^0$ der Fehler ein Maximum, für $\varepsilon>90^0$ aber $<270^0$ wird $x$ negativ, die Punkte $S$ und $A$ liegen sodann zu verschiedenen Seiten des Einfallslothes.

Nimmt man in (8) bloss $\alpha$ veränderlich, so beträgt für $\alpha=0$ der Fehler $2\gamma n\cos\varepsilon$, und wenn noch $\varepsilon=0$ ist, $2\gamma n$; nimmt mit dem Wachsen des Einfallswinkels zu, wird für $\alpha=90^0$ unendlich gross.

Um den Werth $x=\infty$ zu bestimmen, muss man zu der Formel (7) zurückgehen; aus dieser folgt, wenn $\alpha=90^0$ ist,

$$-\sin^2\frac{x}{2}=n\sin A\cos(\beta+A),$$

und wenn noch in (1) statt der Tangente der Sinus gesetzt und in diese Gleichung substituirt, ferner $A$ gegen $\beta$ vernachlässigt wird, so bekommt man:

$$-\sin^2\frac{x}{2}=n\sin\gamma\cos\varepsilon\cos\beta. \qquad (9)$$

Diese Gleichung giebt für $x$ nur dann reelle Werthe, wenn das Glied rechter Hand des Gleichheitszeichens negativ wird, was wieder nur dadurch möglich wird, dass $\varepsilon>90^0$ und $<270^0$ bedeute; es kommt daher auf die Stellung des leuchtenden Punktes an, ob für $\alpha=90^0$ von der belegten Fläche reflektirtes Licht durch die obere Glasfläche herauskommt oder nicht.

Das eben Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern, sei (Taf. II. Fig. 8.) $\varepsilon=180^0$, der Winkel $BAL=\gamma=30''$, der Einfallswinkel $SCF=\alpha=90^0$, $n=\frac{3}{2}$, so ist $\beta=41^0\,48'\,35''4$, $CDL=EDA=48^0\,11'\,53''$, $DEG=\alpha'=41^0\,47'\,37''$ und $GEO=\beta'=88^0\,32'\,16$, der Strahl tritt somit durch die obere Ebene aus dem Glase heraus.

Ist dagegen (Taf. II. Fig. 9.) $\varepsilon=0$, $CAL=30''$, $SCF=\alpha=90^0$, so ist wieder $\beta=41^0\,48'\,35''\,4$, $CDA=48^0\,10'\,54''\,6$, $DEG=\alpha'$ $=41^0\,49'\,35''\,4$, aber $\sin\beta'$ schon grösser als die Einheit; der Strahl erleidet somit bei $E$ eine totale Reflexion.

Aus der Gleichung (8) folgt für $\varepsilon=0$, $\gamma=30''$, $\alpha=60^0$, $n=\frac{3}{2}$, $x=2'\,27''$, und wenn $\varepsilon=30^0$ ist, $\gamma$, $\alpha$, $n$ ihre Werthe beibehalten, so ist $x=1'\,19''\,5$; der Fehler ist also bedeutend.

Will der Mechaniker untersuchen, ob die Ebenen eines Glases einander parallel sind, so bedient er sich hierzu des Sphaerometers, das ist eines Instrumentes, mittelst dessen er den Abstand beider Flächen an jeder Stelle sehr genau bestimmen kann.

Der Geometer kann die besagte Untersuchung beim unbelegten Glase auf folgende Art vornehmen: er legt das Glasstück auf eine nahe horizontale Ebene, oder, was besser ist, auf drei fixe Spitzen, visirt durch ein Fernrohr auf ein an der vorderen Ebene sichtbares Bild eines gut begränzten Objektes und lässt das Glas auf den Spitzen um die ganze Peripherie drehen. Bleibt das Bild an derselben Stelle, so ist das Glas parallel begränzt, sind dagegen die Glasebenen gegen einander unter einem Winkel $\gamma$ geneigt, so wird bei der Drehung des Glases das auf die obere Ebene gefällte Einfallsloth eine nach aufwärts gekehrte Kegelfläche beschreiben, die Achse dieses Kegels steht auf der fixen Ebene senkrecht, der Scheitel liegt in der oberen Ebene und der Winkel am Scheitel ist $=2\gamma$.

Wegen der Bewegung des Einfallslothes wird sich auch die Einfallsebene, somit auch das an der oberen Ebene durch Reflex entstandene Bild ändern, diess letztere daher im Fernrohre eine krumme, in sich zurückkehrende Linie beschreiben.

Die Bahn, welche das Bild durchläuft, wollen wir durch die Fig. 10. auf Taf. II. versinnlichen; die Kugelfläche ist aus dem Scheitel des Kegels beschrieben und schneidet die fixe Ebene in $HR$, die Achse des Kegels in $P$, das Einfallsloth während der Drehung in der Kreislinie $abcdef \ldots . z$ ($a, b, c, \ldots . z$ sind die einzelnen Positionen des Einfallslothes), und endlich den einfallenden Strahl in $S$.

Offenbar sind $Sa$, $Sb$, $Sc$, $Sf, \ldots .$ $Sz$ die Maasse der Einfallswinkel während der Drehung des Glasstückes; sind also $SaA$, $SbB, \ldots .$ $SzZ$ die Schnitte der Einfallsebenen mit der Kugelfläche und ist $Sa=aA$, $Sb=bB$, $Sc=cC$, $Sf=fF, \ldots .$ $Sz=zZ$, so sind $A$, $B$, $C$, $D$, $F, \ldots .$ $Z$ die entsprechenden Punkte, in welchen der reflektirte Strahl die Kugelfläche trifft, also ist $ABCD \ldots . Z$ die vordere Hälfte, $A$ der höchste, $Z$ der niedrigste Punkt der

Bahn, welche das Bild im Fernrohre beschreibt. Der Winkel, unter welchem der höchste und tiefste Punkt vom Mittelpunkte der Kugel erscheint, wird durch den Bogen $AZ$ gemessen, und weil $AZ = SZ - SA = 2Sz - 2Sa = 2az$ und $az = 2y$ ist, so ist $AZ = 4y$, also erscheint der Fehler in der Neigung der Glasflächen viermal vergrössert in der Bewegung des Bildes und kann somit nicht nur leicht erkannt, ja sogar gemessen werden.

Bei einem belegten Glase, bei einem Spiegel also, bleibt das ganze Verfahren bis auf den Umstand dasselbe, dass die vordere unbelegte Ebene des Spiegels fixirt werden muss, was dadurch geschieht, dass man die drei Spitzen nach abwärts gekehrt befestigt und den Spiegel an diese anliegend unterstützt. Das durch Reflex entstandene Bild wird auch hier bei der Drehung des Spiegels dieselbe Bahn beschreiben.

---

## XIV.

# Untersuchung des Fehlers, wenn bei einem Spiegelinstrumente die Spiegel auf dem Limbus nicht senkrecht stehen.

Von

Herrn Professor Dr. *Ignatz Lemoch*

an der Universität zu Lemberg.

---

Der Fehler, welchen eine geneigte Stellung beider Spiegel bei einem Sextanten auf die Genauigkeit der Messung äussert, ist meines Wissens noch in keinem Werke vollständig untersucht zu finden, ich glaube demnach, dass die Mittheilung der nachfolgenden Untersuchung dieses Fehlers allen Freunden des Spiegelsextanten und Jenen, welche Vorträge über praktische Geometrie zu halten haben, willkommen sein könne.

Wir wollen vorerst den Fall, dass bei einem Winkelmesser zwei ebene Glasspiegel vorkommen, annehmen; der Fehler, welcher bei Instrumenten, die nur einen Spiegel haben, wegen der geneigten Stellung desselben entsteht, erscheint dann als ein spezieller Fall des eben behandelten Fehlers.

Es sei (Taf. II. Fig. 11.) $cd$ das Einfallsloth auf dem Spiegel $ab$, $CD$ auf dem Spiegel $AB$, beide Lothe mit dem Punkte $S$, von welchem der Strahl $Sc$ auf den Spiegel $ab$ fällt, in einer Ebene, demnach beide Spiegel auf die Ebene $ScC$ senkrecht. Wird der Einfallswinkel $Scd = \beta$ gesetzt, so kommt der Strahl $Sc$ nach der ersten Reflexion in $C$ an, sobald $Scd = dcC$ ist, und zwar unter dem Einfallswinkel $cCd$, welcher wieder dem Reflexionswinkel $DCR$ gleich ist; der Strahl hat also den Weg $ScCR$ zurück gelegt.

Werden beide Spiegel verlängert, bis sie sich schneiden, und sind $aM$, $AM$ die Schnitte der verlängerten Spiegel mit der Ebene $ScC$, so ist $aMA = \alpha$ ihr Neigungswinkel, der Winkel $cCM$ beträgt $90^0 - (\alpha + \beta)$, somit $cCD = \alpha + \beta$, und wenn $cCR = 2\omega$ gesetzt wird, so ist

$$2\omega = 2(\alpha + \beta). \qquad (1)$$

Nehmen wir nun an, beide Spiegel werden aus der vorausgesetzten vertikalen Stellung gebracht, der Strahl nehme sodann den Weg $ScC'R'$, auch sei $cC'R' = 2\omega'$, so ist wegen der unrichtigen Stellung beider Spiegel der in der Messung des Winkels begangene Fehler

$$2\omega - 2\omega' = x. \qquad (2)$$

Des Folgenden wegen wollen wir noch auf den Umstand aufmerksam machen, dass die Einfallslothe beider Spiegel eine entgegengesetzte Richtung haben, dass der Strahl $cC$ auf den Spiegel $AB$ so auffällt, als käme er von einem Punkte $S_1$ her, der eben so weit hinter dem Spiegel $ab$ liegt, als $S$ vor demselben ist.

Zur Erklärung der Rechnung nehmen wir Taf. II. Fig. 12. zu Hülfe. In dieser Figur ist $adB$ die Ebene, auf welcher vorerst die Spiegel $ab$ und $AB$ senkrecht gestellt angenommen werden; $Cd$ ist das Einfallsloth auf $ab$; $CD$ auf $AB$; $CQ$ die Verlängerung von $CD$, somit $dQ = \alpha$ der Neigungswinkel beider Spiegel; $S$ der Punkt, von welchem der Strahl $SC$ auf $ab$ unter dem Einfallswinkel $Sd = \beta$ auffällt, $S_1C$ der reflektirte Strahl, somit $SS_1 = 2\beta$.

Wird $S_1C$ nach $S_2$ verlängert, so ist $S_2$ der Punkt, von welchem die Strahlen auf den Spiegel $AB$ aufzufallen scheinen, der

Einfallswinkel $S_2D$ ist gleich dem Reflexionswinkel $DR$, somit $S_2R = 2\omega$; ist ferner $CP$ die Verlängerung von $SC$, so ist $PS_2 = SS_1 = 2\beta$, $PD = QS = \beta - \alpha$, daher $S_2D = \alpha + \beta$ und $S_2R = 2\omega = 2(\alpha + \beta)$, also wieder die Gleichung (1).

Kömmt der Spiegel $ab$ aus der angenommenen Stellung, so tritt das Einfallsloth aus der Ebene $SAB$ heraus; ist nun $d'C$ dasselbe nach der Verstellung des Spiegels, so ist, da $S$ seinen Ort nicht ändert, $Sd' = \beta'$ der gegenwärtige Einfallswinkel; denken wir uns durch $SCd'$ eine Ebene $Sd'PS_4$ gelegt und die sämmtlichen Ebenen durch eine Kugelfläche geschnitten, welche aus $C$ mit einem beliebigen Halbmesser beschrieben ist, so liegt der reflektirte Strahl in der letztgenannten Ebene, und, $Sd' = d'S_3$ vorausgesetzt, so ist $CS_3$ die Richtung des reflektirten Strahles und $SS_3 = 2\beta'$.

Für den Spiegel $AB$ ist die Verlängerung des Strahles $S_3C$, nämlich $S_4$, der Punkt, von dem die Strahlen aufzufallen scheinen, und bei der senkrechten Stellung dieses Spiegels $S_4D$ der Einfallswinkel.

Wird jedoch das Einfallsloth $CD$, somit auch der Spiegel $AB$ verstellt, und hat das Einfallsloth sodann die Richtung $CD'$, so ist $S_4D'$ der Einfallswinkel, der reflektirte Strahl liegt in der durch $S_4CD'$ gelegten Ebene, nämlich $S_3D'S_4$, und wenn $S_4D' = D'R'$ vorausgesetzt und mit $\omega'$ bezeichnet wird, so ist $S_4R' = 2\omega'$, daher $S_2R - S_4R'$, also $2\omega - 2\omega' = x$ der gesuchte Unterschied. Diess vorausgesetzt, betrachten wir in dem Dreiecke $Sdd'$ die Seite $dd' = \gamma$, $Sd = \beta$, den Winkel $Sdd' = \varepsilon$ als gegeben; $\gamma$ ist das Maass des Winkels, um wie viel der Spiegel aus der vertikalen Ebene verstellt worden ist, $\varepsilon$ der Neigungswinkel zwischen den Ebenen $dd'C$ und $dCS$; bezeichnen wir den Winkel $dSd'$ mit $m$, so ist dieser und $Sd' = \beta'$ zu bestimmen; man hat

$$\cos\beta' = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\varepsilon, \tag{3}$$

$$\tang m = \frac{\sin\varepsilon\sin\gamma}{\cos\gamma\sin\beta - \cos\beta\sin\gamma\cos\varepsilon}. \tag{4}$$

In dem Dreiecke $PDD'$ ist $DP = \beta - \alpha$, nehmen wir hier wieder $DD' = \delta$, den Winkel $PDD' = \varepsilon'$ als gegeben an, setzen $PD' = v$, den Winkel $DPD' = n$, so ist

$$\cos v = \cos(\beta - \alpha)\cos\delta + \sin(\beta - \alpha)\sin\delta\cos\varepsilon', \tag{5}$$

$$\tang n = \frac{\sin\varepsilon'\sin\delta}{\cos\delta\sin(\beta - \alpha) - \cos(\beta - \alpha)\sin\delta\cos\varepsilon'}. \tag{6}$$

Aus dem Dreiecke $S_4PD'$, wo $PD'=v$, $S_4P=2\beta'$, $S_4PD'=n+m$ bekannt sind, ist $S_4D'=\omega'$ zu bestimmen; man bekommt

$$\cos\omega' = \cos 2\beta' \cos v + \sin 2\beta' \sin v \cos(n+m). \qquad (7)$$

Wollte man noch den gegenwärtigen Neigungswinkel beider Spiegel bestimmen, was wir jedoch bei unserer Aufgabe als Nebensache betrachten, so setze man den Winkel $PS_4D'=s$, so ist

$$\tang s = \frac{\sin(n+m)\sin v}{\cos v \sin 2\beta' - \cos 2\beta' \sin v \cos(n+m)}. \qquad (8)$$

Dann folgt, wenn noch $D'C$ nach $Q'$ verlängert wird, aus dem Dreiecke $S_3d'Q'$, in welchem die Stücke $d'S_3=\beta'$, $S_3Q'=\omega'$, $d'S_3Q'=s$ bekannt sind, für die Seite $d'Q'=\alpha'$ die Gleichung:

$$\cos\alpha' = \cos\beta' \cos\omega' + \sin\beta' \sin\omega' \cos s, \qquad (9)$$

und $\alpha'$ ist der Neigungswinkel beider Spiegel.

Wir wollen hier einige nach diesen Gleichungen gerechnete Beispiele beifügen, wobei $\beta$ stets $20^0$ angenommen worden ist.

| No. | $\varepsilon$ | $\varepsilon'$ | $\alpha$ | $\gamma$ | $\delta$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 85 | 85 | 60 | +10′ | +10′ | +1′ 37″5 |
| 2 | 85 | 85 | 60 | −10′ | −10′ | −1′ 58″ |
| 3 | 85 | 85 | 0 | −10′ | −10′ | −2′ 26″6 |
| 4 | 85 | 85 | 0 | +10′ | −10′ | +5′ 9″ |
| 5 | 85 | 85 | 0 | −10′ | +10′ | −5′ 8″ |
| 6 | 85 | 85 | 20 | −10′ | +10′ | −2′ 5″2 |

Nun wäre $\omega'$ in Gleichung (7) durch die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ auszudrücken, allein der vollständige Ausdruck wird sehr komplizirt; zu unserem Zwecke ist es jedoch hinreichend, die Abhängigkeit des Fehlers von den eben genannten Grössen nur durch einen genäherten Ausdruck ersichtlich zu machen, was allerdings möglich ist, weil $\gamma$ und $\delta$ immer als sehr kleine Bogen vorausgesetzt werden können, und $m$, so auch $n$, in sehr vielen Fällen entweder sehr spitze oder nahe an $180^0$ liegende Winkel sind.

Zur Ableitung der Näherungsformeln setzen wir $\beta-\beta'=u$, so bekommen wir aus (3) nach einer leichten Reduktion, bei welcher $\sin u=u$, $\cos u=1$, $\cos\gamma=1-\frac{\gamma^2}{2}$, $\sin\gamma=\gamma$ gesetzt worden ist, mit hinreichender Schärfe $u=\gamma\cos\varepsilon-\frac{\gamma^2}{2}\cotg\beta$, somit ist

$$\beta' = \beta - \gamma'' \cos\varepsilon + \frac{\gamma''^2 \sin 1''}{2} \operatorname{cotg}\beta. \qquad (10)$$

ie Gleichung (4) übergeht bei dieser Voraussetzung in

$$m = \frac{\gamma'' \sin\varepsilon}{\sin\beta}. \qquad (11)$$

ei den Ausdrücken (5) und (6) muss man jedoch auf den Umand, ob $\alpha$ grösser oder kleiner als $\beta$ ist, Rücksicht nehmen.

Setzen wir $\nu - (\beta - \alpha) = u_1$, wobei unter $(\beta - \alpha)$ stets der potive Unterschied verstanden wird, so bekommen wir aus (5) itweder

$$\nu = (\beta - \alpha) - \delta'' \cos\varepsilon' + \frac{\delta''^2 \sin 1''}{2} \operatorname{cotg}(\beta - \alpha), \qquad (12)$$

ler

$$\nu = (\alpha - \beta) + \delta'' \cos\varepsilon' + \frac{\delta''^2 \sin 1''}{2} \operatorname{cotg}(\beta - \alpha), \qquad (13)$$

e erste dieser Gleichungen, wenn $\beta > \alpha$, die letztere, wenn $\alpha > \beta$ ist.

Aus (6) folgt:

$$n = \frac{\delta'' \sin\varepsilon'}{\sin(\beta - \alpha)}. \qquad (14)$$

iese Gleichung giebt das Resultat jedoch nur so lange mit hinichender Schärfe, als $(\beta - \alpha)$ positiv ist und wenigstens einen Grad trägt; wird z. B. $(\beta - \alpha) = 1^0$, $\delta = 10'$, $\varepsilon = 80^0$ angenommen, folgt aus (6) $n = 56' \, 35''$, aus (14) $n = 56' \, 25''7$; wird dagegen $-\alpha) = 30'$, $\delta = 10'$, $\varepsilon = 80^0$ gesetzt, so giebt die Gleichung (6) $= 19^0 \, 12' \, 37''7$, jene (14) aber $n = 18^0 \, 48' \, 31''3$; in diesem Falle fferiren die Resultate schon um 24 Minuten.

Ist $\alpha > \beta$, so wird in (6) $\operatorname{tang} n$ negativ, dann ist

$$n = 180^0 - \frac{\delta'' \sin\varepsilon'}{\sin(\alpha - \beta)}; \qquad (15)$$

ıdlich ist wegen (1) und (2):

$$\omega' = (\alpha + \beta) - \frac{x}{2}. \qquad (16)$$

Ein Weg, auf welchem man für $x$ einen genäherten Ausdruck halten kann, ist folgender: In dem Falle, als $\beta > \alpha$ ist, sind und $n$ sehr spitze Winkel, man kann somit $\cos(m+n) = +1$ tzen, dann übergeht die Gleichung (7) in $\cos\omega' = \cos(2\beta' - \nu)$, so ist $\omega' = 2\beta' - \nu$; werden in diese Gleichung die Werthe aus 6), (10) und (12) gesetzt, so bekommt man:

(I)

$$x'' = 4\gamma'' \cos\varepsilon - 2\delta'' \cos\varepsilon' - 2\gamma''^2 \sin 1'' \operatorname{cotg}\beta + 2\delta''^2 \sin 1'' \operatorname{cotg}(\beta-\alpha).$$

Ist jedoch $\alpha > \beta$, so ist in Gleichung (15) $n$ nahe an $180^0$, $m$ ein kleiner Winkel, man kann somit $\cos(n+m) = -1$ setzen; dann übergeht die Gleichung (7) in $\cos\omega' = \cos(2\beta' + \nu)$, somit ist $\omega' = 2\beta' + \nu$, und aus diesem Ausdrucke folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (16), (10) und (13) wieder die Gleichung (I).

Für $\beta = \alpha$ wird $x$ in Gleichung (I) unendlich gross, worauf wir später kommen werden.

Will man jedoch auch den Einfluss der Winkel $m$ und $n$ berücksichtigen, so setze man entweder die Werthe aus (10), (11), (12), (14) und (16) oder aus (10), (11), (13), (15) und (16) in (7); bei der Entwickelung der Ausdrücke kann man offenbar wieder alle Glieder vernachlässigen, in welchen die Summe der Exponenten von $\gamma$ und $\delta$ mehr als zwei beträgt, zugleich $\cos\frac{x}{2} = 1$, $\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ setzen, so bekommt man für die Fälle, dass $\beta$ grösser oder kleiner als $\alpha$, folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= 4\gamma'' \cos\varepsilon - 2\delta'' \cos\varepsilon' \\ &+ \frac{4\gamma''\delta'' \sin 1''}{\sin(\alpha+\beta)} \{\cos(\alpha+\beta)\cos\varepsilon\cos\varepsilon' - \cos\beta\sin\varepsilon\sin\varepsilon'\} \\ &- 2\gamma''^2 \sin 1'' \{2\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)\cos^2\varepsilon + \operatorname{cotg}\beta - \frac{\sin^2\varepsilon\sin(\alpha-\beta)\operatorname{cotg}\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\} \\ &- \delta''^2 \sin 1'' \{\cos^2\varepsilon' \operatorname{cotg}(\alpha+\beta) + \operatorname{cotg}(\alpha-\beta) - \frac{\sin^2\varepsilon' \sin 2\beta}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}\} \end{aligned}\right\} . \text{(II)}$$

Wird $\alpha = 0$ gesetzt, so übergeht diese Gleichung in

$$\left.\begin{aligned} x'' &= 4\gamma'' \cos\varepsilon - 2\delta'' \cos\varepsilon' \\ &- \operatorname{cotg}\beta \sin 1'' \{4\gamma''^2 + 2\gamma''^2 \cos\varepsilon + \delta''^2 \sin^2\varepsilon' - 4\gamma''\delta'' \cos(\varepsilon+\varepsilon')\} \end{aligned}\right\} . \text{(III)}$$

Auch die Gleichung (II) wird unbrauchbar, $x$ wird nämlich unendlich gross, sobald $\alpha = \beta$ wird; für diesen Fall bekommen wir aus (5) $\nu = \delta$, aus (6) $n = 180^0 - \varepsilon'$; $\beta'$ und $m$ behalten ihre Werthe; mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\nu$ und $n$ folgt aus (7) nach einer der vorhergehenden analogen Reduktion:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= 4\gamma'' \cos\varepsilon - 2\delta'' \cos\varepsilon' \\ &+ \sin 1'' \{4\gamma''\delta'' \operatorname{cotg} 2\beta \cos\varepsilon\cos\varepsilon' - \frac{2\gamma''\delta'' \sin\varepsilon\sin\varepsilon'}{\sin\beta} - 2\gamma''^2 \operatorname{cotg}\beta \\ &\qquad - 4\gamma''^2 \operatorname{cotg} 2\beta \cos^2\varepsilon - \delta''^2 \operatorname{cotg} 2\beta\} \end{aligned}\right\} . \text{(IV)}$$

Nun wird es erklärlich, warum der Weg, auf welchem wir die Gleichung (I) erhalten haben, nicht auch auf den Fall $\alpha=\beta$ anwendbar ist.

Sind jedoch $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ rechte Winkel, so werden die Ausdrücke viel einfacher, und (II), (III), (IV) übergeht der Ordnung nach in

$$x''=-\frac{\sin 1''}{\sin(\alpha+\beta)}\{4\gamma''\delta''\cos\beta+4\gamma''^2\cos\alpha\cos\beta+\delta''^2\cos(\alpha+\beta)\},\ ^{*)}\quad \text{(V)}$$

$$x''=-\operatorname{cotg}\beta\sin 1''(2\gamma''+\delta'')^2,\quad \text{(VI)}$$

$$x''=-\frac{\sin 1''}{\sin 2\beta}\{4\gamma''\delta''\cos\beta+4\gamma''^2\cos^2\beta+\delta''^2\cos 2\beta\}.\quad \text{(VII)}$$

Diese letzte Gleichung hätten wir auch aus (V) erhalten können. Die Umstaltung dieser Gleichungen für den Fall, als $\gamma$ oder $\delta$ Null, $\varepsilon$ oder $\varepsilon'$ rechte Winkel sind, unterliegt keiner Schwierigkeit. Der Winkel $\beta$ kann nicht Null sein, denn dann würde der Strahl auf den ersten Spiegel senkrecht auffallen und würde in sich selbst zurück, also nicht auf den zweiten Spiegel reflektirt werden; $\beta$ ist überdiess ein konstanter Winkel und beträgt bei den meisten Spiegelsextanten nahe $20^0$; weil ferner $2\omega=2(\alpha+\beta)$ immer kleiner als $180^0$, also $\alpha+\beta<90^0$ sein muss, so ist auch $\alpha$ ein spitzer Winkel; die möglichen Werthe desselben sind von Null bis 60 Grade; in (V) ist also $\cos(\alpha+\beta)$ stets positiv; endlich wollen wir noch erwähnen, dass $\gamma$ und $\delta$ negativ zu nehmen sind, sobald das entsprechende Einfallsloth unterhalb der Limbusebene liegt, und dass die ersten zwei Glieder in den Gleichungen (II) bis (IV) über die folgenden der Art vorherrschend sind, dass die Werthe der übrigen Glieder nahezu unberücksichtigt bleiben können; bei diesem Umstande kann der Fehler sehr nahe als bloss von $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ abhängig betrachtet und die Abhängigkeit nach diesen zwei Gliedern beurtheilt werden. Nimmt man also bei den Gleichungen (I) bis (IV) bloss auf die ersten zwei Glieder Rücksicht, so folgt:

1) dass, so lange $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ gleiche, aber spitze Winkel sind, der Fehler viel grösser ausfällt, wenn $\gamma$ und $\delta$ ungleich bezeichnet sind, und dass $x$ mit $\gamma$ eine gleiche, mit $\delta$ eine entgegengesetzte Bezeichnung erhält;

---

*) Diese Gleichung habe ich auch auf einem andern, aber weitläufigern Wege erhalten, wie in der ersten Auflage meiner „**Praktischen Geometrie**" ersichtlich ist.

2) dass der absolute Werth des Fehlers nahe derselbe bleibt, so lange $\gamma$ und $\delta$ gleich bezeichnet, also beide positiv oder beide negativ sind; diess bestätigen auch die oben gerechneten Beispiele.

Sind jedoch $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ rechte Winkel, so wird der Fehler bedeutend geringer, wie die nachfolgenden Beispiele, wobei wieder $\beta=20^0$ angenommen wurde, zeigen.

| $\alpha$ | $\gamma$ | $\delta$ | $x$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $+10'$ | $+10'$ | $-43''$ |
| 60 | $-10'$ | $+10'$ | $3''$ |
| 0 | 0 | $\pm 10'$ | $-4''8$ |
| 0 | $\pm 10'$ | 0 | $-19''$ |

In diesem Falle, nämlich $\varepsilon=\varepsilon'=90^0$, verursacht die unrichtige Stellung des unbeweglichen Spiegels einen grössern Fehler, als der des beweglichen; ferner haben gleich bezeichnete Werthe von $\gamma$ und $\delta$ einen grössern Fehler zur Folge, als ungleich bezeichnete.

Bei gleichen, aber ungleich bezeichneten Werthen von $\gamma$ und $\delta$ kann in (V) der Ausdruck innerhalb der Klammern auch Null werden, wenn nämlich

$$\cos\alpha=\frac{20\pm\tan\!g\,\beta\sqrt{\tan\!g^2\beta+9}}{25+\mathrm{tg}^2\beta}$$

wird; lässt man $\beta=20^0$ bedeuten, so ist $\alpha=32^0\,54'\,26''$ oder auch $\alpha=41^0\,14'\,5''$.

---

Wir haben nun noch den Fehler zu bestimmen, welcher durch die geneigte Stellung eines einzigen Spiegels entsteht.

Dieser Fehler ist, wie Taf. II. Fig. 12. zeigt,

$$2\beta-2\beta'=x, \tag{17}$$

woraus $\beta'=\beta-\frac{x}{2}$ folgt; wird dieser Werth in die Gleichung (3) substituirt und auf den Umstand Rücksicht genommen, dass $\gamma$ ein kleiner Bogen ist, so bekommt man

$$x''=2\gamma''\cos\varepsilon-\gamma''^2\sin 1''\,\mathrm{cotg}\,\beta. \tag{18}$$

Da in diesem Falle der Spiegel beweglich ist, somit $\beta$ alle möglichen Werthe von 0 bis 90° erhalten kann, so ist die Gleichung (18) für $\beta = 0$, also für senkrecht auffallende Strahlen, nicht brauchbar, $x$ wird nämlich unendlich gross. In diesem Falle ($\beta = 0$) folgt aus (4) $m = 180° - \varepsilon$; wendet man nun auf das Dreieck $Sdd'$ (Taf. II. Fig. 12.) unter der Annahme, dass $\beta$ nicht Null, aber $m$ bekannt ist, eine der Neper'schen Gleichungen an, so bekommt man:

$$\tan\left(\frac{\beta' - \gamma}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon - m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varepsilon + m}{2}\right)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta, \quad \text{aber } \frac{\varepsilon - m}{2} = -(90° - \varepsilon);$$

$$\frac{\varepsilon + m}{2} = 90°; \quad \beta = 0.$$

$\varepsilon$ kann also welchen Werth immer haben, so ist $\tan\left(\frac{\beta' - \gamma}{2}\right) = 0$, also $\beta' = \gamma$, und die Gleichung (17) übergeht sodann in

$$x = -2\gamma. \tag{19}$$

Wird $\varepsilon = 90°$, so bekommen wir aus (18) die folgende Gleichung:

$$x'' = -\gamma''^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} \beta. \tag{20}$$

Dieser Ausdruck wird für $\beta = 90°$ Null, was ganz natürlich ist, denn unter dieser Annahme folgt aus (3) $\beta' = 90°$, und da bei einem Spiegel $\alpha = 0$ ist, so folgt aus (16) $x =$ Null.

Lässt man $\varepsilon = 85°$, $\gamma = 10'$, $\beta = 5°$ bedeuten, so folgt aus (18) $x = 1'\,34''6$; bei denselben Werthen von $\varepsilon$ und $\gamma$, aber $\beta = 80°$, wird $x = 1'\,44''3$. Aus (20) folgt für $\beta = 5°$ und $\gamma = 10'$ $x = -19''9$ und für $\beta = 80°$ bei demselben $\gamma$ $x = -0''3$; aus (19) folgt für $\gamma = 10'$ $x = -20'$. Dieser letzte Fehler ist sehr bedeutend.

# XV.

# Ueber die Theilbarkeit der Zahlen durch Sieben und die Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

Von

Herrn *A. P. Reyer*,

Hauptmann in der k. k. österreichischen Armee zu Triest.

---

## Ueber die Theilbarkeit der Zahlen durch Sieben.

1) Es sei zu untersuchen, ob die Zahl 4051461932 durch 7 theilbar sei oder nicht.

Annahme. Die zur Untersuchung bestimmte Zahl heisst die gegebene Zahl; jede nächst höhere Zahl, welche durch 7 theilbar ist, heisse $M$; jede nächst kleinere Zahl, welche durch 7 theilbar ist, heisse $N$.

Ist demnach die gegebene Zahl $=47$, so ist 49 ihr dazu gehöriges $M$ und 42 ihr dazu gehöriges $N$. Die Zahl 2 ist das Complement von 47 auf 49 oder $M$; die Zahl 5 ist das Supplement von 2 auf 7.

Um zu untersuchen, ob eine gegebene Zahl durch 7 theilbar sei oder nicht, theile man selbe von der Rechten zur Linken in Classen von je 3 Ziffern ab. Die höchste Classe kann natürlicher Weise auch aus weniger als 3 Ziffern bestehen.

Obige Zahl in Classen abgetheilt hat man 4|051|461|932 vor sich.

Bei der Operation denke man sich jede Classe in 2 Abtheilungen getrennt, wovon die eine Abtheilung die Hunderter, die andere Abtheilung die Zehner und Einheiten bilden. Der Deutlichkeit wegen sollen für jetzt die Abtheilungen durch Punkte unterschieden werden und man hat 4|0.51|4.61|9.32 vor sich.

Um die Operation algebraisch durchzuführen, kann man diese Zahl durch $a|b.c|d.e|f.g$ und die verschiedenen Complemente auf $M$ durch $p.q.r$ darstellen.

Um nun zu finden, ob obige Zahl durch 7 theilbar sei, addire man zu:

| | |
|---|---|
| $g$ die zweifache Zahl $f$ und man hat $g+2f$; | 32 die doppelte Zahl 9 und man hat 50; |
| das Complement $p$ von $g+2f$ auf $M$ addire man zu $e+2d$ und man hat $p+e+2d$; | das Complement 6 von 50 auf 56 addire man zu 61+2.4, und man hat 75; |
| das Complement $q$ von $p+e+2d$ auf $M$ addire man zu $c+2b$, und man erhält $q+c+2b$; | das Complement 2 von 75 auf 77 addire man zu 51+2.0 und man erhält 53; |
| das Complement $r$ von $q+c+2b$ auf $M$ addire man endlich zu $a$ u. man erhält den Ausdruck $r+a$. | das Complement 3 von 53 auf 56 addire man endlich zu 4, und man erhält den Ausdruck 3+4. |
| Ist nun die Summe aus $r+a$, d. h. aus dem letzten Complemente und der letzten Classe durch 7 theilbar, so ist auch die ganze Zahl durch 7 theilbar. | Ist nun die Summe aus 3+4, d. h. aus dem letzten Complemente und der letzten Classe durch 7 theilbar, so ist auch die ganze Zahl durch 7 theilbar. |

Diese ganze Operation stellt sich also, wie folgt dar:

| | |
|---|---|
| $a|b.c|d.e|f.g$, | 4\|0.51\|4.61\|9.32, |
| $g+2f$ gibt das Complement $p$, | 32+18 =50 gibt das Complem. 6, |
| $p+e+2d$ „ „ „ $q$, | 6+61+8=75 „ „ „ 2, |
| $q+c+2b$ „ „ „ $r$, | 2+51+0=53 „ „ „ 3, |
| $r+a$ „ „ „ 0, | 3+ 4 = 7 „ „ „ 0, |
| folglich ist obige Zahl durch 7 theilbar. | folglich ist obige Zahl durch 7 theilbar. |

Man sieht, dass die ganze Operation auf der Addition je dreier Zahlen beruht, nämlich auf der Addition des Complementes auf $M$ der vorhergehenden Classe, zu der zweiziffrigen Zahl und der doppelten dritten Ziffer der darauf folgenden Classe.

2) In der Praxis geht diese Operation ungemein schnell vor sich, indem die Uebertragung des Complementes auf $M$ von einer

Classe auf die andere und die Addition der kleinen Zahlen nur das Werk eines Augenblickes ist, weil alle vorkommenden 7 oder die durch 7 theilbaren Zahlen übergangen werden; glaubt man schneller zu Ende zu kommen, so kann man die Neuner auf 2, die Achter auf 1 reduciren, und hat endlich sich wegen Uebertragung des Complementes nur dem Gedächtnisse einzuprägen, dass die Zahlen 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126 durch 7 theilbar sind, indem die höchste Summe, welche durch die Addition dreier Zahlen zum Vorschein kommen kann, $=6+99+18=123$ ist.

Sollte sich zufälliger Weise eine ganze Classe vorfinden, welche mit 0 besetzt ist, so wird nicht das Complement auf $M$, sondern dessen Supplement zu 7 auf die nächste giltige Classe übertragen. Ein Beispiel möge dieses erläutern:

Es sei zu untersuchen, ob die Zahl 37|000|264 durch 7 theilbar sei.

Es ist $64+4=68$; 2 ist das Complement auf 70 oder $M$. Nun sage man nicht, $2+37$ ist 39, sondern $5+37$ ist 42. Dieses geht daraus hervor, weil die Rechnung eigentlich wie folgt gestellt sein sollte: Es ist $64+4=68$; 2 ist das Complement auf 70 oder $M$; $2+0=2$; 5 ist das Complement auf 7 oder $M$; $5+37=42$; folglich ist die angeführte Zahl durch 7 theilbar.

Sollten zwei volle nebeneinanderstehende Classen mit 0 besetzt sein, so wird wieder nur das Complement übertragen, indem zwei ganze Classen, mit 0 besetzt und eingeschoben, die Reste nicht ändern.

3) Wenn eine Zahl nicht durch 7 theilbar ist, so ist bei einer geraden Classen-Anzahl das Complement der letzten Classe auf $M$ der wahre Rest; ist die Classen-Anzahl ungerade, so ist dessen Supplement auf 7 der wahre Rest.

Es mögen folgende zwei Beispiele zur Erläuterung der angeführten Regeln dienen:

Erstes Beispiel. Welchen Rest gibt die Zahl 38|825|102|345, durch 7 getheilt?

$45+6 = 51$ gibt das Complement 5,
$5+2+2 = 9$ „ „ „ 5,
$5+25+16 = 46$ „ „ „ 3,
$3+38 = 41$ „ „ „ 1;

folglich ist 1 der wahre Rest.

**Zweites Beispiel.** Welchen Rest gibt die Zahl 287|516|420, durch 7 getheilt?

20+ 8 =28 gibt das Complement 0,
0+16+10=26 „ „ „ 2,
2+87+ 4=93 „ „ „ 5.

Wäre nun die Classen-Anzahl **gerade**, so würde 5 der wahre Rest sein, da aber die Classen-Anzahl **ungerade** ist, so ist 2 — das Supplement des Restes von 5 auf 7 — der wahre Rest.

4) **Die bisher beschriebenen Operationen auf eine grössere Zahl angewandt, mit Elidirung von Zahlen, Ueberspringung von Klassen und Auffindung des Restes.**

**Beispiel.** Es sei die Zahl

| XIII. | XII. | XI. | X. | IX. | VIII. | VII. | VI. | V. | IV. | III. | II. | I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 531 | 000 | 000 | 027 | 123 | 456 | 000 | 786 | 207 | 322 | 463 | 425 | 301 |

zur Untersuchung gegeben.

| Classe | Rechnung | | |
|---|---|---|---|
| I. | 1+ 6 = 7 gibt 0 | zum Complement, | |
| II. | 5 = 5 „ 2 | | weil 42, als durch 7 theilbar, übergangen wird; |
| III. | 2+ 8 =10 „ 4 | | weil 63, als durch 7 theilbar, übergangen wird; |
| IV. | 4+ 0 = 4 „ 3 | | weil 22+6, durch 7 theilbar, auch übergangen wird; |
| V. | 3+ 4 = 7 „ 0 | | weil 07, als durch 7 theilbar, wieder wegbleibt; |
| VI. | 86 =86 „ 5 | | weil kein Rest blieb und 7 nicht berücksichtigt wird; |
| VII. | . . . . . . | | wird übergangen, dafür aber nicht 5, |
| VIII. | 2+ 8 =10 „ 4 | | sondern das Supplement auf 7, d. h. 2 übertragen, |
| IX. | 4+23+2=29 „ 6 | | und 56 wieder nicht berücksichtigt, |
| X. | 6+27 =33 „ 2 | | weil 0 in der dritten Stelle nichts ändert; |
| XI. XII. | . . . . . | | werden übergangen, und da zwei volle Classen, welche mit 0 besetzt sind und übergangen werden, nichts ändern, so ist |
| XIII. | 2+31+10=43 „ 6 | | da nun die Classen-Anzahl **ungerade** ist, |

nicht 6, sondern dessen Supplement 1 von 6 auf 7 der wahre Rest.

### Arithmetischer Beweis über die Richtigkeit des ganzen Verfahrens.

5) Das Verfahren, welches gezeigt wurde, beruht darauf, dass die zwei Zahlen 98 und 1001 durch 7 theilbar sind. Auf der Theilbarkeit von 98 beruht die Operation jeder einzelnen Classe, auf der Theilbarkeit von 1001 beruht die Uebertragung des Complementes und die Elidirung der Classen bis auf die letzte.

### Beweis über die Richtigkeit des ersten Theiles der Operation.

6) Es ist zu untersuchen, ob die Zahl 623 durch 7 theilbar ist oder nicht.

Wenn man allgemein die höchste Ziffer einer dreiziffrigen Zahl durch $a$ und die nächststehende zweiziffrige Zahl durch $b$ ausdrückt, so stellt $100a+b$ den Werth einer jeden dreiziffrigen Zahl vor.

$100a+b$ ist $=98a+2a+b$; $98a$ ist durch 7 theilbar; wenn nun $2a+b$ auch durch 7 theilbar ist, so muss die ganze Zahl durch 7 theilbar sein. $2a+b$ stellt aber allgemein die Summe aus der ersten zweiziffrigen Zahl und der doppelten dritten Ziffer dar.

Ist nun z. B. $a=6$ und $b=23$, so ist $100a+b=100.6+23$; $98a+2a+b=98.6+2.6+23$; $98a$, folglich $98.6$, ist durch 7 theilbar; ist nun $2a+b$ oder $2.6+23$ durch 7 theilbar, so muss auch die ganze Zahl, d. h. $100a+b=100.6+23$, d. h. 623, durch 7 theilbar sein. Es ist aber im obigen Beispiele $23+6.2=35$ durch 7 theilbar, folglich ist auch wirklich 623 durch 7 theilbar.

Aufgabe. Ist 317 durch 7 theilbar?

Auflösung. $17+3.2=23$. Diese Zahl ist nicht durch 7 theilbar, folglich ist die Zahl 317 auch nicht durch 7 theilbar. Das Complement von 23 auf $M$ ist 5; wäre also diese Zahl um 5 grösser oder um 2 kleiner, so müsste die ganze Zahl durch 7 theilbar sein, und es ist auch 28 wie 21, 322 wie 315, durch 7 theilbar.

**Beweis für die Richtigkeit des zweiten Theiles des Verfahrens.**

7) Da es sich schnell entscheiden lässt, ob eine dreiziffrige Zahl durch 7 theilbar ist oder nicht, und welchen Rest selbe gibt, so ist die Aufgabe gelöst, wenn man ohne Aenderung des möglichen Restes die sämmtlichen Classen auf 0 bringt und die Untersuchung dann nur mit der letzten Classe vorzunehmen hat. Diese Reduction der Classen auf 0 beruht auf der Theilbarkeit der Zahl 1001 durch 7 und auf den zwei Lehrsätzen:

a. Wenn zwei Grössen durch eine dritte Grösse theilbar sind, so ist auch ihre Summe durch jene dritte Grösse theilbar.

b. Wenn irgend eine Zahl durch eine andere Zahl theilbar ist, so ist auch das Vielfache von jener durch diese Zahl theilbar.

Aufgabe. Es ist zu untersuchen, ob die Zahl 352|615|381 durch 7 theilbar sei oder nicht.

Es ist $81+6=87$, folglich ist 4 das Complement auf $M$ oder 91. Wäre nun die Zahl um 4 grösser, so würde man 385 vor sich haben. Da nun 385 durch 7 theilbar ist, so wird hinsichtlich der Theilbarkeit der ganzen obigen Zahl durch 7 nichts geändert, wenn anstatt 385 drei Nullen substituirt würden, oder wenn man die ganze Classe auch wegliesse, und wenn man vor der Hand den Rest unberücksichtigt lässt, den die Zahl gäbe, wenn sie nicht durch 7 theilbar sein sollte. Um nun die Zahl 352|615|381 auf zwei Classen zu reduciren, addire man zu 352|615|381 die Zahl . . . . . . . . . . . 4|004, eine Zahl, welche durch 7 theilbar ist und daher betreffs der Theilbarkeit obiger Zahl nichts ändern kann. Die Summe beider Zahlen ist =352|619|385. Da nun 385 durch 7 theilbar ist, so kann man dafür drei Nullen substituiren, und man hat anstatt 352|615|381 ohne Aenderung betreffs der Theilbarkeit die Zahl 352|619|000 vor sich. Ist aber 352|619 durch 7 theilbar oder nicht theilbar, so wird diese Eigenschaft auch nicht geändert, wenn man die Zahl mit 1000 multiplicirt, oder umgekehrt von 352|619|000 die drei Nullen weglässt, und was daher von 352|619 gilt, muss auch von 352|619|000, von 352|619|385 und von 352|615|381 gelten. Vergleicht man nun die Zahlen 352|619 mit 352|615|381, so hat man dadurch eine Classe elidirt, indem man zur folgenden das Complement von $2a+b$ auf $M$, in unserm Falle von $81+2.3=87$

auf 91=4 zur folgenden Classe addirt hat und die vorhergehende als nicht mehr vorhanden betrachtet.

Wiederholt man nun diese Operation bei der Zahl 352|619, so findet man, dass $19+2.6=31$, daher das Complement auf $M$ wieder 4 ist. Es ist aber

$$\begin{array}{r} 352|619 \text{ und} \\ 4|004 \\ \hline 356|623. \end{array}$$

Die Zahl 623, als durch 7 theilbar, kann wieder wegbleiben, und man hat die Zahl 356 vor sich. Was nun hinsichtlich der Theilbarkeit durch 7 von 352|615|381 gilt, muss daher auch von 356|000|000 oder von 356 gelten. Diese Zahl ist aber nicht durch 7 theilbar, denn $356=56+2.3=62$ ist nicht durch 7 theilbar, sondern gibt das Complement 1 auf $M$ oder 63. Da die Zahl 352|615|381 aus drei Classen besteht, so ist nach 3) nicht das Complement 1 auf $M$, sondern dessen Supplement auf 7, also die Zahl 6, der wahre Rest.

## Arithmetischer Beweis bezüglich der Auffindung der Reste.

8) Wenn man eine Zahl von drei oder weniger beliebigen Ziffern für sich allein betrachtet, z. B. eben die Zahl 356, so findet man, dass nicht das Complement auf $M$, sondern dessen Supplement auf 7 der wahre Rest ist; denn man sieht, dass, wenn das Complement 1 zu 62 addirt würde, die ganze Zahl durch 7 theilbar wäre, d. h. die vorliegende Zahl 356 ist um 6 zu gross. Die Zahl 6 ist aber das Supplement von 1 auf 7, folglich ist bei einer Zahl von nur einer Classe nicht das Complement auf $M$, sondern dessen Supplement auf 7 der wahre Rest. Wenn man irgend einer Zahl 6 Nullen anhängt, so wird man finden, dass diese angehängten 6 Nullen den ursprünglichen Rest nicht ändern (und nur von Nullen kann die Rede sein, weil durch das Verfahren alle Classen bis auf die letzte in lauter Nullen verwandelt werden); 6 folgende Nullen eben so wenig (indem sich nach 6 Divisionen gleicher Ziffern die Reste wiederholen), und was daher $a$ für einen Rest gibt, wenn $a$ eine Classe von irgend 3 oder weniger Ziffern vorstellt, den gleichen Rest muss auch $a$ mit $6n$ Nullen geben. $a$ mit $6n$ Nullen stellt aber allgemein jede Zahl von einer ungeraden Classen-Anzahl dar, und daher gibt jede Zahl von einer ungeraden Classen-Anzahl, welche nicht durch 7 theilbar ist, das Supplement auf 7 des letzten Complementes zum Reste. Dass bei einer Zahl von einer

geraden Classen Anzahl das Complement auf $M$ und nicht dessen Supplement auf 7 der wahre Rest sein muss, ist leicht einzusehen. Irgend eine Zahl durch 7 getheilt kann nur die Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6 geben. Multiplicirt man diese Reste mit 1000, so geben diese Producte durch 7 dividirt die Reste 6, 5, 4, 3, 2, 1. Multiplicirt man nun irgend eine Zahl von ungeraden Classen mit 1000, so wird selbe in eine gerade Classen-Anzahl verwandelt, und muss der Multiplication von 1000 wegen die verkehrten Reste der frühern Zahl geben. Geben also die Zahlen von ungerader Classen-Anzahl das Supplement auf 7 als wahren Rest, so müssen Zahlen von gerader Classen-Anzahl das Complement auf $M$ als wahren Rest geben.

Aufgabe. Welchen Rest gibt die Zahl 293|000|0...., wo 293 schon der letzte Ausdruck einer auf Nullen reducirten Zahl ist?

$93+4=97$ gibt das Complement 1 auf 98. Ist nun die Classen-Anzahl gerade, so ist 1 der wahre Rest; ist die Classen-Anzahl ungerade, so ist das Supplement von 1 auf 7, also 6, der wahre Rest, oder, was das Gleiche ist, der Unterschied aus dem letzten Ausdrucke und $N$. Der letzte Ausdruck ist $93+4=97$. Sein dazu gehöriges $N$ ist 91 und 6 ist die Differenz. Da man in der ganzen Abhandlung alle Subtractionen vermieden hat, so hat man daher vorgezogen, das Supplement auf $M$ anstatt der Differenz aus dem letzten Ausdrucke und $N$ zu suchen.

9) Um Zeit zu ersparen, kann man gleich beim Anschreiben der Zahlen die Eintheilung in Classen von der Linken zur Rechten vornehmen; in diesem Falle muss aber die niedrigste Classe durch 1 oder 2 Nullen zu einer ganzen Classe ergänzt werden, wenn 1 oder 2 Ziffern fehlen sollten.

Die Operation wird wie gewöhnlich vorgenommen, es ist aber zu bemerken, dass der gefundene Rest nicht der wahre ist, indem man die Operation nicht mit der eigentlichen, sondern mit der zehn- und respective hundertfachen ursprünglichen Zahl vorgenommen hat, und der gefundene Rest daher ein falscher ist.

Um nun aus dem berechneten falschen augenblicklich den wahren Rest zu finden, multiplicire man im ersteren Falle den gefundenen falschen Rest mit 2, im letzteren Falle mit 3, und suche das Complement auf $M$, welches der wahre Rest sein wird. Zwei Beispiele mögen das Angeführte erläutern.

Erstes Beispiel. Es sei zu untersuchen, ob die Zahl 51816 durch 7 theilbar sei und welchen Rest sie im Verneinungsfalle gibt.

Diese Zahl, nach der gewöhnlichen Regel untersucht, gibt den Rest 2. Theilt man diese Zahl gleich von der Linken zur Rechten in Classen ab und ergänzt die niedrigste Classe mit 0, so hat man die Zahl 518|160 vor sich. Diese Zahl gibt den falschen Rest 6. Multiplicirt man nun wegen Anhängung einer Null den gefundenen Rest 6 mit 2, so hat man die Zahl 12; das Complement auf $M=14$ ist aber 2, welches wirklich der wahre Rest ist.

Zweites Beispiel. Es sei obige Untersuchung auf die Zahl 6389274 anzuwenden.

Diese Zahl auf die gewöhnliche Art untersucht gibt das Complement 4, folglich wegen ungerader Classen-Anzahl den Rest 3. Theilt man nun die Zahl gleich während des Anschreibens von der Linken zur Rechten in Classen ab und ergänzt im gegebenen Falle die niedrigste Classe durch zwei Nullen, so hat man die Zahl 638|927|400 vor sich. Diese Zahl gibt als letztes Complement die Zahl 1, also wegen ungerader Classen-Anzahl den Rest 6. Dieser falsche Rest muss nun in den wahren verwandelt werden. Es ist aber $6.3=18$, folglich ist 3, das Complement auf $M$, der wahre Rest.

10) Der Grund dieses Verfahrens ist folgender: Die möglichen Reste bei einer Division durch 7 sind 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Setzt man die Division mittelst angehängter Nullen noch weiter fort, so bekömmt man:

bei Anhängung von einer Null die Reste 3, 6, 2, 5, 1, 4,
„ „ „ zwei Nullen „ „ 2, 4, 6, 1, 3, 5,
„ „ „ drei „ „ „ 6, 5, 4, 3, 2, 1,
„ „ „ sechs „ „ „ 1, 2, 3, 4, 5, 6;

wenn man nun die ersten Reste mit 2 und die zweiten Reste mit 3 multiplicirt, so kommen folgende Producte zum Vorschein, und zwar:

bei Anhängung von einer Null die Producte 6, 12, 4, 10, 2, 8,
„ „ „ zwei Nullen „ „ 6, 12, 18, 3, 9, 15.

Sucht man nun allerseits die Complemente auf $M$, so erhält man:

im ersten Falle die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6,
„ zweiten „ „ „ 1, 2, 3, 4, 5, 6,

d. h. die ursprünglichen oder wahren Reste. Die dritte und vierte Reihe dient als Erklärung betreffs der Uebertragung der Comple-

**mente, wenn eine ganze Classe oder zwei neben einander stehende ganze Classen mit 0 besetzt sind.**

**11) Durch die schnelle Methode, um zu wissen, ob eine Zahl durch 7 theilbar sei oder nicht, wurde es möglich gemacht, einige Versuche über die Eigenschaften der Zahl 7 anzustellen, von welchen eine nicht uninteressante die folgende sein dürfte:**

**Jede beliebige Zahl, wenn sie so oft neben einander geschrieben wird, bis die Ziffernanzahl durch 6 theilbar wird, ist durch 7 theilbar; handelt es sich aber um eine Zahl von 6 oder 6*m* Ziffern, so muss die gegebene Zahl 7mal an einander geschrieben werden, um durch 7 theilbar zu sein.**

**Aus dieser Regel folgt nun, dass**

| 1 | Ziffer | 6mal | angeschrieben werden muss, | um durch 7 theilbar zu sein. |
|---|---|---|---|---|
| 2 | Ziffern | 3mal | angeschrieb. werden müssen, | „ „ „ „ „ „ |
| 3 | „ | 2mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |
| 4 | „ | 3mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |
| 5 | „ | 6mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |
| 6 | „ | 7mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |
| 7 | „ | 6mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |
| 8 | „ | 3mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |
| 9 | „ | 2mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |
| 10 | „ | 3mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |
| 65 | „ | 6mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |
| 90 | „ | 7mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |
| 117 | „ | 2mal | „ „ „ | „ „ „ „ „ „ |

**Es ist ganz einerlei, ob sich in irgend einer Stellung Nullen vorfinden oder nicht. Es frägt sich z. B. wie oft die Zahlen 3761, 0468, 0034, 0006 angeschrieben werden müssen, um durch 7 theilbar zu sein. Nach oben angeführter Regel 3mal, weil 12 das kleinstmöglichste Product aus 4, und zugleich durch 6 theilbar ist; demgemäss werden die Zahlen**

**376137613761, ferner 46804680468, ferner 3400340034,**

**ferner 600060006**

**durch 7 theilbar sein.**

12) Die Richtigkeit dieser Regel beruht theils auf den Lehrsätzen sub 7), theils auf 10), und vor Allem darauf, weil 1001 durch 7 theilbar ist.

Erstes Beispiel. Die Zahl 345, zweimal angeschrieben, also 345345, muss durch 7 theilbar sein. 345345 ist $=300300+40040+5005$; da nun 1001 durch 7 theilbar ist, so muss auch 5005, 4004, 3003 und ihre Vielfachen, also 300300 und 40040, durch 7 theilbar sein. Sind aber mehrere Zahlen durch 7 theilbar, so ist auch ihre Summe und im gegebenen Falle 345345 durch 7 theilbar.

Zweites Beispiel. Die Zahl 34, dreimal angeschrieben, also 343434, muss durch 7 theilbar sein. Die Zahl 343434 ist $=34+3400+340000$. Die Zahl 34 gibt den Rest $a$, die Zahl 3400 muss den Rest $100a$ und die Zahl 340000 den Rest $10000a$ geben. Die Zahl 343434 gibt also den Rest $10101a$. Ist aber der Rest $10101a$ durch 5 theilbar, so ist die ganze Zahl durch 7 theilbar; nun ist aber 10101 durch 7 theilbar, folglich muss auch der Rest $10101a$ und daher die Zahl 343434, oder überhaupt *ababab* *) durch 7 theilbar sein, wenn für $a$ und $b$ zwei beliebige Ziffern substituirt werden.

Dieser Beweis findet auch auf's erste Beispiel seine Anwendung, denn 345345 ist $=345+345000$. Die Zahl 345, durch 7 getheilt, gibt den Rest $b$, die Zahl 345000 muss den Rest $1000b$ geben, folglich gibt die Zahl $345+345000$ den Rest $1001b$. Da nun der Rest $1001b$ durch 7 theilbar ist, so muss auch die ganze Zahl 345345 oder allgemein *abcabc* durch 7 theilbar sein.

Andere Beispiele. Eine Ziffer 6mal angeschrieben muss durch 7 theilbar sein, weil man in den Ausdrücken *ababab* oder *abcabc* nur irgend eine bestimmte Ziffer substituiren kann, oder man zerlegt den Ausdruck *aaaaaa* in $a00a00+a00a0+a00a$, welcher Ausdruck ebenfalls durch 7 theilbar ist.

Neun Ziffern zweimal angeschrieben lassen sich allgemein durch *abcdefghiabcdefghi* vorstellen. Diese Zahl lässt sich wieder so zerlegen, dass je 2 homogene Zahlen durch $m00000000m$ vorgestellt werden können. Die Zahl $m00000000m$ gibt gleiche

---

*) Der wahre algebraische Ausdruck ist $100000a+10000b+1000a+100b+10a+b$, also ein wirklicher Ausdruck, wohingegen *ababab* nur ein Product vorstellt; der Kürze wegen hat man sich aber diese Freiheit erlaubt.

Reste wie *m00m*, denn zwei eingeschobene, mit 0 besetzte Classen ändern die Reste nicht. Dieses Verfahren, analog dem ersten Beispiele, durchgeführt, zeigt, dass obige Zahl wirklich durch 7 theilbar ist.

13) Zum Schlusse soll noch einiger kleiner Spielereien mit der Zahl 7 gedacht werden. Es gäbe z. B. Jemand die Aufgabe, augenblicklich 6 Ziffern anzuschreiben, welche durch 7 theilbar sein müssen. Da 2 Ziffern, dreimal angeschrieben, durch 7 theilbar sind, so darf man nur zwei Ziffern anschreiben und diesen zwei Ziffern Summen und Unterschiede aus der gegebenen Zahl und $7a$ vorsetzen, und man hat eine Zahl, die durch 7 theilbar sein muss. Ist die gegebene Zahl z. B. 46, so schreibe man $46-7a$, 46 und $46+7b$ an einander und die Zahl wird durch 7 theilbar sein. Gilt in diesem Falle $a=2$ und $b=3$, so hat man die Zahl 324667 vor sich, welche durch 7 theilbar ist. Oder: es sei eine Zahl, z. B. 36297, gegeben; man verlangt, dass diese Zahl in eine durch 7 theilbare verwandelt werden soll, aber mit dem Bedinge, dass die vorhöchste, dass die höchste Ziffer geändert, oder wieder dass keine geändert, sondern eine Ziffer vorgesetzt werden soll, u. s. w. — Da $97+4=101$, daher 4 das Complement; $4+36=40$, daher die Zahl 2 das letzte Complement ist, so darf man im ersten Falle nur die 6 in 8, im zweiten Falle die 3 in 6 verwandeln, im dritten Falle aber die Zahl 1 vorsetzen, und man hat 3 Zahlen, welche der Aufgabe entsprechen, denn es ist sowohl 38297, als auch 66297, als auch 136297 durch 7 theilbar.

14) Es giebt noch verschiedene Arten, um die Theilbarkeit der Zahlen durch 7 zu bestimmen. Die gewöhnlichen wurden als bekannt übergangen und der andern aufgefundenen Methoden wurde auch nicht erwähnt, da sie doch nicht schneller, als die eben dargestellte, zum Ziele führen. Nur mit einer dieser Methoden wurde eine Ausnahme gemacht, weil selbe auch ziemlich flink von statten geht und auf der Eintheilung in Classen von je zwei Ziffern beruht. Da die verschiedenen Beweise auf ähnliche Art hergestellt werden können, so hat man, der Kürze wegen, nur das Verfahren allein angegeben.

Aufgabe. Es ist zu untersuchen, ob die Zahl 2386831209 durch 7 theilbar sei oder nicht.

Um zu finden, ob die angeführte Zahl durch 7 theilbar sei oder nicht, theile man sie in Classen von je 2 Ziffern ab und man hat 23|86|83|12|09.

So wie bei der erstern Methode, suche man zur ersten Classe

das Complement auf *M* und addire dieses Complement 10fach genommen zu der zweiten Classe hinzu. Man suche wieder das Complement auf *M* und addire die zehnfache Zahl zu der dritten Classe, und setze dieses Verfahren fort, bis die letzte Classe durch das 10fache Complement der vorhergehenden Classe ergänzt ist. Ist nun die letzte ergänzte Classe durch 7 theilbar, so ist die ganze Zahl durch 7 theilbar.

Diese Operation auf obige Zahl angewendet stellt sich also, wie folgt, dar:

das Complement von 09 auf *M* ist 5,
5.10+12= 62; das Compl. „ „ „ 1,
1.10+83= 93; „ „ „ „ „ 5,
5.10+86=136; „ „ „ „ „ 4,
4.10+23= 63; „ „ „ „ „ 0;

folglich ist die ganze Zahl durch 7 theilbar. Dieses Verfahren lässt sich abkürzen und muss auch abgekürzt werden, um die hohen Zahlen zu vermeiden, denn wenn das Complement =6 ist und zufälligerweise zu 99 zu addiren wäre, so käme die Summe 159 zum Vorscheine, und bei so hohen Zahlen benöthigte man fast wieder der Reihentafel, um zu wissen, dass 2 das Complement auf *M*, d. h. auf 161, ist.

Abgekürzt kann aber dieses Verfahren auf zweierlei Arten werden, wobei stets das zweckdienlichere angewandt werden muss.

Erstens addire man gleich das einfache Complement zu den Zehnern der folgenden Classe; oder

Zweitens werfe man aus dem zehnfachen Complemente gleich alle Siebner weg und addire den Rest ganz einfach zur folgenden Classe, wenn die Summe aus dem einfachen Complemente und den Zehnern der folgenden Classe in eine 2ziffrige Zahl übergeht. Dieses Verfahren, auf obige Zahl angewandt, gibt folgende Operation:

das Complement von 09 auf *M* ist =5,
5+1(2) ist =62 und „ „ „ 62 „ „ „ =1,
1+8(3) „ =93 „ „ „ „ 93 „ „ „ =5,
5+8(6) „ =136. Um nun zu verhindern, dass eine dreiziffrige Zahl zum Vorscheine kömmt, so sage man nicht, 5+8(6) ist 136, sondern man werfe aus der Zahl 50 alle Siebner weg und man sage:

1+86 ist =87 und das Complement auf $M$ ist =4,

4+2(3) ist =63;

folglich ist die ganze Zahl durch 7 theilbar.

15) Die Auffindung des Restes, für den Fall als die Zahl nicht durch 7 theilbar ist, stösst auch auf keine Schwierigkeiten, ist aber doch weniger einfach, als nach der ersten Methode. Es handelt sich dabei vor Allem, ob die Classen-Anzahl durch 3 theilbar ist oder nicht.

Wenn $n$ eine durch 3 theilbare Classen-Anzahl vorstellt, so muss jede in Classen eingetheilte Zahl aus $n$, $n+1$ oder $n-1$ Classen bestehen. Besteht nun die Zahl aus $n$ Classen, so findet man den wahren Rest, wenn man das Complement der letzten Classe auf $M$ mit 4 multiplicirt. Das Complement neuerdings auf $M$ gesucht gibt den wahren Rest. Besteht die Zahl aus

$n+1$ Classen, so findet man den wahren Rest, wenn man das Complement der letzten Classe auf $M$ zu 7 ergänzt. Diese Ergänzung ist der wahre Rest. Besteht endlich die Zahl aus

$n-1$ Classen, so findet man den wahren Rest, wenn man das Complement der letzten Classe auf $M$ mit 2 multiplicirt. Das Complement neuerdings auf $M$ gesucht gibt den wahren Rest.

Da $n$ die Zahl 3 oder ihre Vielfachen vorstellt, so ist

$$n=3, 6, 9, 12, 15, 18 \text{ u. s. w.}$$
$$n+1=4, 7, 10, 13, 16, 19 \text{ u. s. w.}$$
$$n-1=2, 5, 8, 11, 14, 17 \text{ u. s. w.}$$

Die Reste aus Zahlen von dieser Classen-Anzahl sind je nach Umständen aus obigen drei Regeln zu entnehmen.

Folgende Beispiele sollen als Erläuterung des Gesagten dienen.

Beispiele. Es ist zu untersuchen, ob die Zahlen 52936, 123956789, 3825748 durch 7 theilbar seien oder nicht, und wenn sie es nicht sind, welche Reste sie geben.

a. Die Zahl 5|29|36 besteht aus 3 Classen und entspricht daher der für $n$ aufgestellten Regel.

Die Zahl 36 auf $M$ ergänzt gibt das Complement 6,

6+2(9) ist =89 und 2 ist „ „ auf $M$,

20+5 „ =25 „ 3 „ „ „ „ $M$.

Nach der ersten Regel wird das Complement 3 mit 4 multiplicirt und neuerdings von 12 das Complement auf $M$ gesucht, welches $=2$ ist, und der Rest ist gefunden.

b. Untersucht man die Zahl 13|82|67|48, so sieht man, dass selbe vier Classen hat, und daher wird der Rest nach der zweiten Regel bestimmt.

Die Zahl 48 gibt das Complement 1 auf $M$.

$10+67$ oder $1+6(7)$ ist $=77$ und 0 ist das Complement auf $M$.
$0+82$ „ $=82$ „ 2 „ „ „ „ „
$20+13$ „ $=33$ „ 2 „ „ „ „ „

Dieses Complement 2 auf $M$ ergänzt gibt 5, welches der wahre Rest ist.

c. Untersucht man die Zahl 1|23|95|67|89, so findet man, dass sie fünf Classen hat und daher wird der Rest nach der dritten Regel bestimmt.

Die Zahl 89 gibt das Complement 2 auf $M$.

$2+6(7)$ ist $=87$ und 4 ist das Complement auf $M$.
$5+95$ „ $=100$ „ 5 „ „ „ „ „ (durch Wegwerfung der Siebner)
$5+2(3)$ „ $=73$ „ 4 „ „ „ „ „
$40+1$ „ $=41$ „ 1 „ „ „ „ „

Wird nun nach der dritten Regel dieses Complement mit 2 multiplicirt, so erhält man 2. Dieses Product auf $M$ ergänzt gibt das Complement 5 und man hat den Rest dieser, ebenfalls nicht durch 7 theilbaren Zahl gefunden.

Will man eine gegebene Zahl, die untersucht werden soll, ob sie durch 7 theilbar sei oder nicht, von der Linken zur Rechten eintheilen, so kann es geschehen, nur muss dann in diesem Falle die letzte Classe rechter Hand durch eine Null ergänzt werden, wenn eine Ziffer fehlen sollte. Man verfährt bei der Untersuchung nach der Regel, und gibt die Zahl einen Rest, so suche man aus diesem falschen Reste den richtigen, und zwar nach der unter 9) angeführten Regel.

---

## Ueber eine Eigenschaft der Zahl 3.

16) Der Ausdruck $\frac{a}{2^m . 5^n}$ ist, wie bekannt, die Form für alle

Brüche, welche sich genau in einen zehntheiligen Bruch verwandeln lassen, und die Anzahl Ziffern des zehntheiligen Bruches wird $= m$ oder $n$ sein, jenachdem der Exponent $m$ oder $n$ der grössere ist.

Wäre die Zahl $\frac{a}{2^m . 5^n . 3^p}$ in einen zehntheiligen Bruch zu verwandeln, so wird derselbe aus zwei Theilen bestehen: erstens aus jenen Ziffern, welche sich nicht wiederholen und von den Exponenten $m$ oder $n$ abhängen, zweitens aus jenen Ziffern, welche sich wiederholen, daher eine Ziffernreihe bilden und vom Exponenten $p$ abhängen. Wenn nun bekannt ist, aus wie viel Ziffern $\frac{a}{3^p}$ bestehen muss, ehe sich die Reihe wiederholt, wenn $\frac{a}{3^p}$ in einen zehntheiligen Bruch verwandelt wird, so ist auch bekannt, aus wie viel Ziffern die Zahl $\frac{a}{2^m . 5^n . 3^p}$, in einen zehntheiligen Bruch verwandelt, zu bestehen hat, nämlich aus $m$ oder $n$ unwiederholbaren Ziffern und aus einer Ziffernreihe, welche die Entwickelung von $\frac{a}{3^p}$ gibt.

Die Regel, nach welcher die Ziffernreihe von $\frac{a}{3^p}$ gefunden wird, ist sehr einfach, nämlich:

Wenn die Zahl $\frac{a}{3^p}$ in einen zehntheiligen Bruch zu verwandeln ist, so wird die Ziffernreihe aus $3^{p-2}$ Ziffern bestehen.

Beispiel. Wäre $p=6$, so ist $\frac{a}{3^p}=\frac{a}{729}$. (Zähler und Nenner dürfen natürlicher Weise kein gemeinschaftliches Maass haben, und es ist nur von ächten Brüchen die Rede). Die Zahl $\frac{a}{729}$ muss nach der angeführten Regel eine Ziffernreihe von $3^{p-2}=3^{6-2}=3^4=81$ Ziffern haben. Es hat demgemäss

$\frac{a}{3^5}$ eine Ziffernreihe von $3^{5-2}=3^3 =27$ Ziffern.

$\frac{a}{3^4}$ „ „ „ $3^{4-2}=3^2 =9$ „

$\frac{a}{3^3}$ „ „ „ $3^{3-2}=3^1 =3$ „

$\frac{a}{3^2}$ „ „ „ $3^{2-2}=3^0 =1$ „

$\frac{a}{3^1}$ „ „ „ $3^{1-2}=3^{-1}=\frac{1}{3}$, also auch von einer Ziffer.

Man sieht aus dieser abnehmenden geometrischen Reihe, dass sowohl die Zahl $\frac{a}{3}$, als auch $\frac{a}{9}$, in einen zehntheiligen Bruch verwandelt, eine Ziffernreihe von nur einer Ziffer haben muss, und dass daher der Ausdruck $\frac{a}{2^m.5^n.3^1 \text{ (oder } 3^2)}$ die Formel für alle ächten Brüche ist, welche, in einen zehntheiligen Bruch verwandelt, mit einer Ziffernreihe von nur einer Ziffer sich endigen.

Aufgabe. Aus wie viel Ziffern wird der Bruch $\frac{5}{144}$ bestehen, wenn er in einen zehntheiligen Bruch verwandelt wird, wie viele unwiederholbare wird er haben und aus wie viel Ziffern wird die Ziffernreihe bestehen, desgleichen der Bruch $\frac{17}{12960}$?

Auflösung 1) $\frac{5}{144} = \frac{5}{2^4.5^0.3^2}$. Wegen des Exponenten 4 wird der Bruch 4 unwiederholbare, und wegen $3^2$ wird der Bruch noch eine wiederholbare Ziffer haben. Es wird also $\frac{5}{144}$ = sein $0,\underline{a}bcd\underline{e}$, wobei $\underline{e}$ die Ziffernreihe bilden wird. Es ist aber auch wirklich $\frac{5}{144} = 0,0347|2\ldots.$

Auflösung 2) $\frac{17}{12960} = \frac{17}{2^5.5^1.3^4}$. Wegen des Exponenten 5 wird der zehntheilige Bruch aus 5 unwiederholbaren, und wegen des Exponenten 4 aus 9 wiederholbaren Ziffern bestehen. Es wird also sein $\frac{17}{12960} = 0,abcde|fghiklmnp\ldots.$ Es ist aber $\frac{17}{12960}$ auch wirklich 0,00131|172839506|172839506 u. s. w.

17) Der Beweis, dass $\frac{a}{3^p}$ einen zehntheiligen Bruch von $3^{p-2}$ wiederholbaren Ziffern gibt, ist leicht herzustellen.

Dass $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, in einen zehntheiligen Bruch verwandelt, eine Ziffernreihe von nur einer Ziffer gibt, bedarf keines Beweises.

Verwandelt man $\frac{a}{9}$ in einen zehntheiligen Bruch, so ist es bekannt, dass $\frac{a}{9} = 0,aaa\ldots.$ ist. Substituirt man also für $a$ die Werthe 1, 2, 5 u. s. w., so ist $\frac{1}{9} = 0,111\ldots$; $\frac{2}{9} = 0.222\ldots$; $\frac{5}{9} = 0.555\ldots.$ u. s. w.

Da $\frac{a}{3^2} = 0{,}aaa\ldots$ ist, so ist auch $\frac{a}{3^2 . 3} = \frac{0{,}aaa\ldots}{3}$. Nimmt man nun für $a$ irgend einen Werth an, also z. B. 4, so ist $\frac{a}{3^3} = \frac{4}{3^3} = \frac{0{,}444}{3} = 0{,}148\ldots$ Man möge aber anstatt 4 was immer für einen Werth substituiren, so muss die neue Ziffernreihe aus drei Ziffern bestehen, weil je 3 gleiche Ziffern stets durch 3 theilbar sind. Da man sich im Bruche $\frac{0{,}aaa\ldots}{3}$ so viele $a$ oder gleiche Ziffern denken kann, als man will, und 3 gleiche Ziffern durch 3 dividirt eine Ziffernreihe von 3 Ziffern bilden, so ist allgemein $\frac{0{,}aaa\ldots}{3} = 0{,}bcdbcd\ldots$ u. s. w. Dividirt man die neue Gleichung $\frac{a}{3^3} = \frac{0{,}aaa}{3} = 0{,}bcdbcdbcd\ldots$ mit 3, so hat man $\frac{a}{3^4} = \frac{0{,}aaa\ldots}{3.3} = \frac{0{,}bcdbcdbcd\ldots}{3}$. Substituirt man für $bcd$ drei beliebige, nicht durch 3 theilbare Zahlen, z. B. 148, so hat man $\frac{0{,}148148148\ldots}{3}$ vor sich. Diese 3mal 3 Ziffern müssen wieder durch 3 theilbar sein und es müssen für jede Reihe von 3 Ziffern 3 Combinationen herauskommen, was eine Ziffernreihe von 9 Ziffern gibt, und es kann daher $\frac{a}{3^3 . 3} = \frac{a}{3^4} = \frac{0{,}bcdbcdbcd\ldots}{3}$ durch $0{,}fghiklmnp$ vorgestellt werden. Es ist aber auch wirklich $\frac{a}{3^4} = \frac{0{,}148148148\ldots}{3} = 0{,}049382716\ldots$, wobei für $a$ der Werth 4 angenommen worden ist.

Verfolgt man diese Untersuchung weiter, so findet man, dass 3 mal 9 Ziffern wieder einen neuen Ziffern-Cyclus von 27 und sofort endlich von 81, 243, 729 Ziffern geben müssen, und dass daher der Bruch $\frac{a}{3^p}$, wenn er in einen zehntheiligen Bruch verwandelt wird, stets aus einer Ziffernreihe von $3^{p-2}$ Ziffern besteht.

18) Es wäre nicht uninteressant, die Eigenschaften der andern Primzahlen in dieser Hinsicht zu untersuchen. Gelänge es nur, dafür eine allgemeine oder nur wenige Regeln aufzustellen, so liesse sich aus dem Nenner eines jeden Bruches $\frac{a}{b}$ schon entnehmen, aus wie viel Ziffern sein zehntheiliger Bruch, oder vielmehr aus wie viel unwiederholbaren und wie viel wiederholbaren Ziffern derselbe bestehen müsste. Der praktische Nutzen wäre freilich nicht viel mehr als 0, immerhin wäre aber die Lehre

von den Eigenschaften der Zahlen um eine Kleinigkeit bereichert. Ob es sich aber mit einer allgemeinen oder mit wenigen Regeln überhaupt abmachen liesse, ist eine andere Frage, denn bei der Untersuchung von nur wenigen Zahlen findet man schon die verschiedenartigsten Resultate. Meistentheils besteht die Ziffernreihe aus $b-1$ Ziffern, wenn $b$ der Nenner des ächten Bruches ist, häufig auch aus $\frac{b-1}{2}$ Ziffern, und öfters besteht die Ziffernreihe aus noch weniger Ziffern. Man hat $\frac{a}{b}$ in Decimalen verwandelt und nach und nach in $b$ alle Primzahlen von 7 bis 150 substituirt, so dass man 32 Verwandlungen vor sich hat. Es ist nicht gelungen, daraus eine allgemeine Regel zu abstrahiren, wohl aber scheint es sich zu bestätigen, dass, wenn $\frac{a}{b}$ in einen zehntheiligen Bruch verwandelt wird (es versteht sich, dass $b$ eine Primzahl ist), der neue Bruch nur aus $b-1$ Ziffern bestehen könne, oder aus einem Factor von $b-1$, welche gefundene Ziffernreihe sich dann stets wiederholt.

Würde z. B. Jemand $\frac{a}{997}$ in einen zehntheiligen Bruch zu verwandeln haben, und es läge ihm daran, die ganze Ziffernreihe zu haben, so wäre zu untersuchen, welche Factoren in 996 enthalten sind. Man wird die Factoren 498, 332, 249, 166, 83, 12, 6, 4, 3, 2 finden. Fände man nun, dass z. B. $\frac{a}{997}$ nach 15 Ziffern die Ziffernreihe erschöpft hätte, so weiss man gleich, dass ein Fehler untergelaufen sein müsse, denn $\frac{a}{997}$ könnte wohl allenfalls eine Ziffernreihe von 12 Ziffern haben, weil 12 ein Factor von 996 ist; wenn aber die Ziffernreihe mit der 12ten Ziffer nicht beendigt ist, so kann dieses erst wieder bei der 83sten Ziffer stattfinden u. s. w. bis zur 498sten Ziffer. Ist auch dann die Ziffernreihe nicht zu Ende, so ist es ein Beweis, dass $\frac{a}{997}$ aus einer Ziffernreihe von $b-1$, also von 996 Ziffern bestehen müsse. Dass im gegebenen Falle die Ziffernreihe nicht aus 2 Ziffern bestehen könne, ist klar, weil $b$ aus 3 Ziffern besteht, aber auch aus 3 Ziffern kann die Reihe nicht bestehen, weil $\frac{1}{999}=0{,}001001\ldots$ ist, folglich wären nur 4, 6, 12 oder mehr Ziffern möglich. Da 12 noch eine kleine Zahl ist, kann man die Division leicht bis zur 13ten Ziffer fortsetzen und dann die weitere Division aufgeben, weil man schon die Division bis zur 83sten Ziffer fortsetzen

müsste und dann wahrscheinlich noch nicht die Ziffernreihe zu Ende wäre.

Um Liebhabern der Rechnenkunst allenfallsige weitere Nachforschungen zu erleichtern, ist am Fusse dieser Abhandlung die Anzahl der Ziffern angegeben, aus welchen die Ziffernreihe besteht, wenn man $\frac{a}{b}$ in einen zehntheiligen Bruch verwandelt und dabei in $b$ die Primzahlen von 7 bis 150 substituirt werden.

19) Wenn man eine Regel für alle Primzahlen wüsste, so würde aus jedem Nenner irgend eines Bruches zu entnehmen sein, aus wie viel Ziffern die Ziffernreihe bestehen müsste; denn von den Exponenten der Zahlen $2^m, 5^n$ würden die unwiederholbaren Zahlen abhängen und von den andern Wurzeln und Exponenten die wiederholbaren. Um Regeln für Producte aus Primzahlen oder für Potenzen derselben aufzustellen, müsste man langwierige Proben machen, jedoch wahrscheinlich dürfte sein, dass $\frac{a}{b^m}$ eine Ziffernreihe von $(b-1)b^{m-1}$ Ziffern hat; besteht aber die Ziffernreihe aus einem Factor von $b-1$, also aus $F$ Ziffern, so dürfte $\frac{a}{b^m}$ eine Reihe von $F \times F^{m-1}$ Ziffern haben. $\frac{a}{b.c}$, wo $b$ und $c$ Primzahlen sind, müsste $(b-1)(c-1)$ oder nach Umständen $F \times G$ Ziffern haben, z. B. $\frac{1}{1517} = \frac{1}{41.37}$ hätte demnach eine Ziffernreihe von 15 Ziffern, weil $\frac{1}{41}$ eine Ziffernreihe von 5 und $\frac{1}{37}$ von 3 Ziffern hat.

Sind Potenzen von 3 im Factor, oder die Zahl 11, so gestaltet es sich wieder anders, man sieht aber, dass die Auffindung dieser Regeln eben keiner besondern Schwierigkeit unterworfen wäre, würde man nur über die Hauptregel in Ordnung sein. Da aber überhaupt diese ganze Theorie ohne irgend einen praktischen Nutzen ist, so verlohnt es sich ohnedies nicht der Mühe, darüber weitere Nachforschungen zu machen *).

*) Allgemeine Untersuchungen über diese Gegenstände enthalten bekanntlich u. A. die Disquisitiones arithmeticae von Gauss. Sectio VI. p. 540. und andere Schriften; auch in dem Artikel Decimalbruch im mathematischen Wörterbuche von Klügel findet sich Manches. Dessenungeachtet habe ich auch die im letzten Theile des obigen mir eingesandten Aufsatzes enthaltenen Bemerkungen mit abdrucken lassen. G.

20) Tabelle über die Ziffernreihe, wenn $\frac{a}{b}$ in einen zehntheiligen Bruch zu verwandeln ist und in $b$ die Werthe der Primzahlen von 7 bis 150 substituirt werden.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{7}$ | hat | eine | Ziffernreihe | von | 6 | $\frac{a}{71}$ | hat | eine | Ziffernreihe | von | 35 |
| 11 | „ | „ | „ | „ | 2 | 73 | „ | „ | „ | „ | 8 |
| 13 | „ | „ | „ | „ | 6 | 79 | „ | „ | „ | „ | 13 |
| 17 | „ | „ | „ | „ | 16 | 83 | „ | „ | „ | „ | 41 |
| 19 | „ | „ | „ | „ | 18 | 89 | „ | „ | „ | „ | 44 |
| 23 | „ | „ | „ | „ | 22 | 97 | „ | „ | „ | „ | 96 |
| 29 | „ | „ | „ | „ | 28 | 101 | „ | „ | „ | „ | 4 |
| 31 | „ | „ | „ | „ | 15 | 103 | „ | „ | „ | „ | 34 |
| 37 | „ | „ | „ | „ | 3 | 107 | „ | „ | „ | „ | 53 |
| 41 | „ | „ | „ | „ | 5 | 109 | „ | „ | „ | „ | 108 |
| 43 | „ | „ | „ | „ | 21 | 113 | „ | „ | „ | „ | 112 |
| 47 | „ | „ | „ | „ | 46 | 127 | „ | „ | „ | „ | 42 |
| 53 | „ | „ | „ | „ | 13 | 131 | „ | „ | „ | „ | 130 |
| 59 | „ | „ | „ | „ | 58 | 137 | „ | „ | „ | „ | 8 |
| 61 | „ | „ | „ | „ | 60 | 139 | „ | „ | „ | „ | 46 |
| 67 | „ | „ | „ | „ | 33 | 149 | „ | „ | „ | „ | 148 |

$\frac{a}{7^2}$ „ „ „ „ 42 $=6.7=\frac{a}{7}\times 7$ Ziffern.

$\frac{a}{11^2}$ „ „ „ „ 22 $=2.11=\frac{a}{11}\times 11$ Ziffern.

$\frac{1}{297}=\frac{1}{11.27}=\frac{1}{11.3^3}=0.003392|2424$

$\frac{1}{21}$; $\frac{1}{63}$; $\frac{1}{189}$ haben nur 6 Decim.

$\frac{37}{567}=\frac{37}{7.3^4}=0.\dot{1}78130511463844797$

# XVI.

## Das sphärische Dreieck, mit seinem Sehnendreiecke verglichen, mit besonderer Rücksicht auf Geodäsie. Neuer merkwürdiger Lehrsatz.

Von
dem Herausgeber.

---

Bei der Berechnung topographischer Dreiecksnetze bedient man sich jetzt wohl ziemlich allgemein des berühmten Legendre'schen Theorems, welches bekanntlich die Berechnung des sphärischen Dreiecks mit Seiten, die gegen den Halbmesser der Kugel, auf welcher es liegt, sehr klein sind, auf die Berechnung eines ebenen Dreiecks mit denselben Seiten zurückführt, mit einer Annäherung, bei welcher erst Grössen, die in Bezug auf die Seiten des Dreiecks von einer, die vierte übersteigenden Ordnung sind, vernachlässigt werden. Ausser dieser Methode der Berechnung topographischer Dreiecksnetze giebt es aber bekanntlich noch eine andere, welche insbesondere dadurch eine gewisse Berühmtheit erlangt hat, weil sie bei der Berechnung der grossen französischen Gradmessung in der Base du système métrique von Delambre in Anwendung gebracht worden ist. Diese Methode setzt an die Stelle der Berechnung der sphärischen Dreiecke die Berechnung ihrer ebenen Sehnen- oder Chorden Dreiecke, welche durch die Sehnen der Seiten der sphärischen Dreiecke gebildet werden, und beschäftigt sich also eigentlich mit der Berechnung der Oberfläche eines in die Erde beschriebenen Polyeders mit dreiseitigen Gränzflächen. Ob diese keineswegs unelegante Methode gegenwärtig bei der Berechnung topographischer Netze noch in einigen Ländern in Anwendung gebracht wird, ist mir unbekannt; darf ich indess aus einigen Aeusserungen, die ich in einer Recension des Handbuchs der höheren und niederen Messkunde von Barfuss in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins. 1854. Juni. Nr. 11. und 12., welche

Herrn Riedl von Leuenstern in Wien zum Verfasser hat, finde, einen wenn auch nur unsichern Schluss ziehen, so scheint man in Oesterreich, welches durch die Grossartigkeit und Genauigkeit seiner geodätischen Operationen sich immer so sehr ausgezeichnet hat, die Delambre'sche Methode, und vielleicht nicht mit Unrecht, noch nicht ganz bei Seite gelegt zu haben. Die von Delambre selbst angewandte Berechnungsmethode*) und seine betreffenden Formeln scheinen mir Manches zu wünschen übrig zu lassen und setzen den Gebrauch besonderer Tafeln voraus; andere neuere Arbeiten, die vielleicht diese Methode einer besonderen Untersuchung unterzogen haben, sind mir unbekannt geblieben. Meine eigenen Untersuchungen über dieselbe, welche mich zugleich zu einem neuen, wie ich glaube, sehr bemerkenswerthen Lehrsatze, der dem berühmten Legendre'schen Theoreme ganz analog ist, und neben demselben wohl eine Stelle verdienen dürfte, geführt haben, will ich mir im Folgenden mitzutheilen erlauben, weil ich glaube, dass dieselben sowohl in allgemein wissenschaftlicher Beziehung, als auch namentlich für die Staaten, wo die Delambre'sche Methode vielleicht noch angewandt wird, nicht ohne Interesse sein, und, wie ich wünsche, dieser Methode vielleicht wieder eine erhöhete Aufmerksamkeit zuwenden werden.

Die Seiten und respectiven Gegenwinkel des sphärischen Dreiecks bezeichne ich wie gewöhnlich durch $a, b, c$ und $A, B, C$; die Seiten und Winkel des entsprechenden Sehnen- oder Chorden-Dreiecks sollen durch $a_1$, $b_1$, $c_1$ und $A_1$, $B_1$, $C_1$ bezeichnet werden; alle diese Grössen sollen der Einfachheit wegen im Folgenden in Theilen des der Einheit gleichen Halbmessers der Kugel, auf welcher das sphärische Dreieck liegt, ausgedrückt angenommen werden.

Nach den bekannten Fundamental-Gleichungen der sphärischen und der ebenen Trigonometrie haben wir die folgenden Formeln:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A},$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B};$$

*) M. s. z. B. Géodésie, ou Traité de la figure de la terre, par Francoeur. Bruxelles. 1838. p. 142.

ferner:

$$a_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}a,\quad b_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}b,\quad c_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}c$$

und

$$\cos A_1 = \frac{b_1^2 + c_1^2 - a_1^2}{2b_1c_1},$$

$$\cos B_1 = \frac{c_1^2 + a_1^2 - b_1^2}{2c_1a_1},$$

$$\cos C_1 = \frac{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}{2a_1b_1}.$$

Mittelst dieser Formel können die Winkel $A_1$, $B_1$, $C_1$ des Sehnen- oder Chorden-Dreiecks aus den Winkeln $A$, $B$, $C$ des entsprechenden sphärischen Dreiecks berechnet werden.

Es ist aber auch:

$$\cos A_1 = \frac{\sin\tfrac{1}{2}b^2 + \sin\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}a^2}{2\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c},$$

$$\cos B_1 = \frac{\sin\tfrac{1}{2}c^2 + \sin\tfrac{1}{2}a^2 - \sin\tfrac{1}{2}b^2}{2\sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}a},$$

$$\cos C_1 = \frac{\sin\tfrac{1}{2}a^2 + \sin\tfrac{1}{2}b^2 - \sin\tfrac{1}{2}c^2}{2\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b};$$

also, weil

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{1-\cos a}{2},\quad \sin\tfrac{1}{2}b^2 = \frac{1-\cos b}{2},\quad \sin\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{1-\cos c}{2}$$

ist:

$$\cos A_1 = \frac{1-(\cos b + \cos c - \cos a)}{4\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c},$$

$$\cos B_1 = \frac{1-(\cos c + \cos a - \cos b)}{4\sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}a},$$

$$\cos C_1 = \frac{1-(\cos a + \cos b - \cos c)}{4\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b}.$$

Setzen wir

$$\tfrac{1}{2}(A + B + C) = S,$$

so ist bekanntlich:

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = -\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}b^2 = -\frac{\cos S\cos(S-B)}{\sin C\sin A},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}c^2 = -\frac{\cos S\cos(S-C)}{\sin A\sin B};$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}b^2+\sin\tfrac{1}{2}c^2-\sin\tfrac{1}{2}a^2$$

$$=-\cos S\frac{\sin B\cos(S-B)+\sin C\cos(S-C)-\sin A\cos(S-A)}{\sin A\sin B\sin C}$$

und

$$\sin\tfrac{1}{2}b^2\sin\tfrac{1}{2}c^2=\frac{\cos S^2}{\sin A^2}\cdot\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C},$$

folglich, weil bekanntlich immer

$$\pi<A+B+C<3\pi,$$

also

$$\tfrac{1}{2}\pi<S<\tfrac{3}{2}\pi,$$

und daher $\cos S$ stets negativ ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c=-\frac{\cos S}{\sin A}\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}};$$

folglich nach dem Obigen:

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}b^2+\sin\tfrac{1}{2}c^2-\sin\tfrac{1}{2}a^2}{\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\sin B\cos(S-B)+\sin C\cos(S-C)-\sin A\cos(S-A)}{\sqrt{\sin B\sin C\cos(S-B)\cos(S-C)}},$$

also:

$$\cos A_1=\frac{\sin B\cos(S-B)+\sin C\cos(S-C)-\sin A\cos(S-A)}{2\sqrt{\sin B\sin C\cos(S-B)\cos(S-C)}}.$$

Auf diese Weise haben wir also jetzt zur unmittelbaren Berechnung der Winkel $A_1, B_1, C_1$ des Sehnen- oder Chorden-Dreiecks aus den Winkeln $A, B, C$ des entsprechenden sphärischen Dreiecks die folgenden Formeln:

$$\cos A_1=\frac{\sin B\cos(S-B)+\sin C\cos(S-C)-\sin A\cos(S-A)}{2\sqrt{\sin B\sin C\cos(S-B)\cos(S-C)}},$$

$$\cos B_1=\frac{\sin C\cos(S-C)+\sin A\cos(S-A)-\sin B\cos(S-B)}{2\sqrt{\sin C\sin A\cos(S-C)\cos(S-A)}},$$

$$\cos C_1=\frac{\sin A\cos(S-A)+\sin B\cos(S-B)-\sin C\cos(S-C)}{2\sqrt{\sin A\sin B\cos(S-A)\cos(S-B)}};$$

aus denen sich auch die folgende bemerkenswerthe Relation:

$$2\cos A_1\sqrt{\sin B\sin C\cos(S-B)\cos(S-C)}$$
$$+2\cos B_1\sqrt{\sin C\sin A\cos(S-C)\cos(S-A)}$$
$$+2\cos C_1\sqrt{\sin A\sin B\cos(S-A)\cos(S-C)}$$
$$=\sin A\cos(S-A)+\sin B\cos(S-B)+\sin C\cos(S-C)$$

oder

$$\frac{\cos A_1}{\sqrt{\sin A\cos(S-A)}}+\frac{\cos B_1}{\sqrt{\sin B\cos(S-B)}}+\frac{\cos C_1}{\sqrt{\sin C\cos(S-C)}}$$
$$=\frac{\sin A\cos(S-A)+\sin B\cos(S-B)+\sin C\cos(S-C)}{2\sqrt{\sin A\sin B\sin C\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}$$

ergiebt.

So elegant die obigen Formeln zur Berechnung der Winkel $A_1$, $B_1$, $C_1$ aus den Winkeln $A$, $B$, $C$ auch sind, so sind dieselben doch für den praktischen Gebrauch viel zu weitläufig, indem bei diesem Gegenstande überhaupt Alles auf die Entwickelung zweckmässiger, eine möglichst einfache numerische Rechnung gestattender Formeln ankommt, wozu wir daher jetzt übergehen wollen.

Wenn wir zu dem Ende den Excess des sphärischen Dreiecks $ABC$, den man durch die unmittelbare Messung seiner drei Winkel $A$, $B$, $C$ kennen lernt, durch $E$ bezeichnen, so ist bekanntlich

$$A+B+C=\pi+E,$$

also

$$S=\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}E,$$
$$S-A=\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}E-A=\tfrac{1}{2}\pi-(A-\tfrac{1}{2}E),$$
$$S-B=\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}E-B=\tfrac{1}{2}\pi-(B-\tfrac{1}{2}E),$$
$$S-C=\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}E-C=\tfrac{1}{2}\pi-(C-\tfrac{1}{2}E);$$

folglich

$$\cos S=-\sin\tfrac{1}{2}E,\quad \cos(S-A)=\sin(A-\tfrac{1}{2}E);$$

und daher nach dem Obigen:

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2=\frac{\sin\frac{1}{2}E\sin(A-\frac{1}{2}E)}{\sin B\sin C},\quad \text{also}\quad \sin\tfrac{1}{2}E=\frac{\sin B\sin C}{\sin(A-\frac{1}{2}E)}\sin\tfrac{1}{2}a^2;$$

woraus man sieht, dass der Excess in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks eine Grösse der zweiten Ordnung ist, was

man bei allen folgenden Entwickelungen stets wohl vor Augen zu behalten hat.

Nach dem Obigen ist nun:

$$\cos(S-A)=\cos\tfrac{1}{2}E\sin A-\sin\tfrac{1}{2}E\cos A,$$

$$\cos(S-B)=\cos\tfrac{1}{2}E\sin B-\sin\tfrac{1}{2}E\cos B,$$

$$\cos(S-C)=\cos\tfrac{1}{2}E\sin C-\sin\tfrac{1}{2}E\cos C;$$

also, erst mit Vernachlässigung von Grössen, die in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind:

$$\cos(S-A)=\sin A-\tfrac{1}{2}E\cos A,$$

$$\cos(S-B)=\sin B-\tfrac{1}{2}E\cos B,$$

$$\cos(S-C)=\sin C-\tfrac{1}{2}E\cos C;$$

folglich:

$$\sin B\cos(S-B)+\sin C\cos(S-C)-\sin A\cos(S-A)$$

$$=\sin B^2+\sin C^2-\sin A^2-\tfrac{1}{2}E(\sin B\cos B+\sin C\cos C-\sin A\cos A),$$

oder, weil

$$\sin A^2=\frac{1-\cos 2A}{2},\quad \sin B^2=\frac{1-\cos 2B}{2},\quad \sin C^2=\frac{1-\cos 2C}{2};$$

$$\sin A\cos A=\tfrac{1}{2}\sin 2A,\quad \sin B\cos B=\tfrac{1}{2}\sin 2B,\quad \sin C\cos C=\tfrac{1}{2}\sin 2C$$

ist, auch:

$$\sin B\cos(S-B)+\sin C\cos(S-C)-\sin A\cos(S-A)$$

$$=\frac{1-(\cos 2B+\cos 2C-\cos 2A)}{2}-\tfrac{1}{4}E(\sin 2B+\sin 2C-\sin 2A).$$

Ferner ist mit demselben Grade der Genauigkeit nach dem Obigen:

$$\cos(S-B)\cos(S-C)=\sin B\sin C-\tfrac{1}{2}E\sin(B+C)$$

$$=\sin B\sin C\left\{1-\tfrac{1}{2}E\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\right\},$$

folglich:

$$\sin B\sin C\cos(S-B)\cos(S-C)=\sin B^2\sin C^2\left\{1-\tfrac{1}{2}E\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\right\},$$

also nach dem binomischen Lehrsatze, immer mit demselben Grade der Genauigkeit, wie vorher:

$$\{\sin B \sin C \cos(S-B)\cos(S-C)\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\sin B^{-1}\sin C^{-1}\left\{1+\tfrac{1}{4}E\,\frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C}\right\}$$

Folglich ist nach dem Obigen, immer erst mit Vernachlässigung von Grössen oder Gliedern, die in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind:

$$2\cos A_1=\frac{\sin B^2+\sin C^2-\sin A^2}{\sin B \sin C}\left\{1+\tfrac{1}{4}E\,\frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C}\right\}$$

$$-\tfrac{1}{2}E\,\frac{\sin B\cos B+\sin C\cos C-\sin A\cos A}{\sin B\sin C}$$

oder

$$2\cos A_1=\frac{\sin B^2+\sin C^2-\sin A^2}{\sin B\sin C}$$

$$+\tfrac{1}{4}E\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\dfrac{\sin B^2+\sin C^2-\sin A^2}{\sin B\sin C}\\[2ex] \qquad -2\,\dfrac{\sin B\cos B+\sin C\cos C-\sin A\cos A}{\sin B\sin C}\end{array}\right\}.$$

Nun ist aber

$$A=\pi+E-(B+C),$$

also

$$\sin A=-\sin\{E-(B+C)\}=\cos E\sin(B+C)-\sin E\cos(B+C),$$

$$\cos A=-\cos\{E-(B+C)\}=-\cos E\cos(B+C)-\sin E\sin(B+C);$$

folglich, erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind:

$$\sin A=\ \ \sin(B+C)-E\cos(B+C),$$

$$\cos A=-\cos(B+C)-E\sin(B+C);$$

also, mit demselben Grade der Genauigkeit:

$$\sin A^2=\sin(B+C)^2-2E\sin(B+C)\cos(B+C),$$

und, mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der zweiten Ordnung sind:

$$\sin A^2=\sin(B+C)^2,$$

$$\sin A\cos A=-\sin(B+C)\cos(B+C).$$

Folglich ist, mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind:

$$\sin B^2+\sin C^2-\sin A^2$$
$$=\sin B^2+\sin C^2-\sin(B+C)^2+2E\sin(B+C)\cos(B+C),$$

oder, wie man leicht findet:

$$\sin B^2+\sin C^2-\sin A^2$$
$$=-2\sin B\sin C\cos(B+C)+2E\sin(B+C)\cos(B+C),$$

also:

$$\frac{\sin B^2+\sin C^2-\sin A^2}{\sin B\sin C}=-2\cos(B+C)+2E\frac{\sin(B+C)\cos(B+C)}{\sin B\sin C}.$$

Ferner ist, mit Vernachlässigung von Grössen, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der zweiten Ordnung sind:

$$\frac{\sin B^2+\sin C^2-\sin A^2}{\sin B\sin C}=-2\cos(B+C)$$

und

$$\sin B\cos B+\sin C\cos C-\sin A\cos A$$
$$=\sin B\cos B+\sin C\cos C+\sin(B+C)\cos(B+C)$$
$$=\sin B\cos B+\sin C\cos C$$
$$+(\sin B\cos C+\cos B\sin C)(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$$
$$=\sin B\cos B+\sin C\cos C+\sin B\cos B\cos C^2$$
$$+\sin C\cos C\cos B^2-\sin B\cos B\sin C^2-\sin C\cos C\sin B^2$$
$$=\sin B\cos B(1+\cos C^2-\sin C^2)+\sin C\cos C(1+\cos B^2-\sin B^2)$$
$$=2\cos B\cos C(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$$
$$=2\cos B\cos C\sin(B+C).$$

Also ist mit demselben Grade der Genauigkeit:

$$\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{\sin B^2+\sin C^2-\sin A^2}{\sin B\sin C}-2\frac{\sin B\cos B+\sin C\cos C-\sin A\cos A}{\sin B\sin C}$$
$$=-2\frac{\sin(B+C)\cos(B+C)}{\sin B\sin C}-4\frac{\cos B\cos C\sin(B+C)}{\sin B\sin C}$$
$$=-2\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\{\cos(B+C)+2\cos B\cos C\}$$
$$=\quad 2\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}(\sin B\sin C-3\cos B\cos C).$$

Erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind, ist also nach dem Obigen:

$$2\cos A_1 = -2\cos(B+C) + 2E\frac{\sin(B+C)\cos(B+C)}{\sin B\sin C}$$

$$+\tfrac{1}{2}E\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}(\sin B\sin C - 3\cos B\cos C),$$

folglich:

$$\cos A_1 = -\cos(B+C)$$

$$+E\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\{\cos(B+C) + \tfrac{1}{4}\sin B\sin C - \tfrac{3}{4}\cos B\cos C\},$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$\cos A_1 = -\cos(B+C) - \tfrac{1}{4}E\sin(B+C)(3-\cot B\cot C).$$

Setzen wir nun

$$A_1 = A + xE,$$

so ist, weil

$$A = \pi + E - (B+C)$$

ist:

$$A_1 = \pi + (1+x)E - (B+C),$$

also

$$\cos A_1 = -\cos\{(1+x)E - (B+C)\}$$

$$= -\cos(1+x)E.\cos(B+C) - \sin(1+x)E.\sin(B+C),$$

und folglich, erst mit Vernachlässigung von Grössen, die in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind:

$$\cos A_1 = -\cos(B+C) - (1+x)E\sin(B+C),$$

also nach dem Obigen:

$$-\cos(B+C) - (1+x)E\sin(B+C)$$

$$= -\cos(B+C) - \tfrac{1}{4}E\sin(B+C)(3-\cot B\cot C),$$

woraus sich

$$x = -\frac{1+\cot B\cot C}{4}$$

ergiebt; und setzen wir nun überhaupt:

$$A_1 = A + xE, \quad B_1 = B + yE, \quad C_1 = C + zE;$$

so ist:

$$x = -\frac{1+\cot B\cot C}{4}, \quad y = -\frac{1+\cot C\cot A}{4}, \quad z = -\frac{1+\cot A\cot B}{4};$$

oder auch:

$$x = -\frac{\cos(B-C)}{4\sin B\sin C}, \quad y = -\frac{\cos(C-A)}{4\sin C\sin A}, \quad z = -\frac{\cos(A-B)}{4\sin A\sin B}.$$

Hiernach ist:

$$x+y+z = -\tfrac{3}{4} - \frac{\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A}{4};$$

aber

$$\cot A\cot B + \cot C\cot A = \cot A\,\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C},$$

und nach dem Obigen, erst mit Vernachlässigung von Gliedern der vierten Ordnung:

$$\cos A = -\cos(B+C) - E\sin(B+C),$$

$$\sin A = \quad \sin(B+C) - E\cos(B+C);$$

also:

$$\begin{aligned}
\cot A &= -\{\cos(B+C)+E\sin(B+C)\}\{\sin(B+C)-E\cos(B+C)\}^{-1}\\
&= -\{\cot(B+C)+E\}\{1-E\cot(B+C)\}^{-1}\\
&= -\{\cot(B+C)+E\}\{1+E\cot(B+C)\}\\
&= -\cot(B+C) - E\{1+\cot(B+C)^2\}\\
&= -\cot(B+C) - E\operatorname{cosec}(B+C)^2,
\end{aligned}$$

folglich nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
\cot A\cot B + \cot C\cot A &= -\frac{\cos(B+C)}{\sin B\sin C} - \frac{E}{\sin B\sin C\sin(B+C)}\\
&= -\cot B\cot C + 1 - \frac{E}{\sin B\sin C\sin(B+C)},
\end{aligned}$$

also

$$\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1 - \frac{E}{\sin B\sin C\sin(B+C)}.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$x+y+z=-1+\frac{E}{4\sin B\sin C\sin(B+C)},$$

erst mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind; und weil nun

$$A_1+B_1+C_1=A+B+C+(x+y+z)E$$

ist, so ist

$$A_1+B_1+C_1=A+B+C-\{1-\frac{E}{4\sin B\sin C\sin(B+C)}\}E$$

$$=\pi+E-\{1-\frac{E}{4\sin B\sin C\sin(B+C)}\}E,$$

folglich

$$A_1+B_1+C_1=\pi+\frac{E^2}{4\sin B\sin C\sin(B+C)},$$

also, erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind:

$$A_1+B_1+C_1=\pi.$$

Weil nun in dem Sehnen- oder Chorden-Dreiecke

$$a_1:b_1=\sin A_1:\sin B_1$$

ist, so ist

$$\frac{b_1}{a_1}=\sin A_1{}^{-1}\sin B_1.$$

Erst mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind, ist aber nach dem Vorhergehenden

$$A_1=A+xE,\quad B_1=B+yE;$$

also:

$$\sin A_1=\sin A+xE\cos A=\sin A\,(1+xE\cot A),$$

$$\sin B_1=\sin B+yE\cos B=\sin B(1+yE\cot B);$$

folglich

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{\sin B}{\sin A}(1+xE\cot A)^{-1}(1+yE\cot B)$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}(1-xE\cot A)(1+yE\cot B)$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}(1-xE\cot A+yE\cot B).$$

Nach dem Obigen ist aber:

$$x\cot A-y\cot B=-\frac{1+\cot B\cot C}{4}\cot A+\frac{1+\cot C\cot A}{4}\cot B$$

$$=-\frac{\cot A-\cot B}{4}=\frac{\sin(A-B)}{4\sin A\sin B},$$

folglich:

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{\sin B}{\sin A}(1+\frac{\cot A-\cot B}{4}E)$$

oder

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{\sin B}{\sin A}\{1-\frac{\sin(A-B)}{4\sin A\sin B}E\}.$$

Nun ist

$$\frac{\sin(B-\frac{1}{4}E)}{\sin(A-\frac{1}{4}E)}=\frac{\sin B\cos\frac{1}{4}E-\cos B\sin\frac{1}{4}E}{\sin A\cos\frac{1}{4}E-\cos A\sin\frac{1}{4}E}$$

$$=\frac{\sin B-\frac{1}{4}E\cos B}{\sin A-\frac{1}{4}E\cos A}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{1-\frac{1}{4}E\cot B}{1-\frac{1}{4}E\cot A}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}(1-\tfrac{1}{4}E\cot A)^{-1}(1-\tfrac{1}{4}E\cot B)$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}(1+\tfrac{1}{4}E\cot A)(1-\tfrac{1}{4}E\cot B)$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}(1+\frac{\cot A-\cot B}{4}E),$$

folglich

$$1+\frac{\cot A-\cot B}{4}E=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{\sin(B-\frac{1}{4}E)}{\sin(A-\frac{1}{4}E)},$$

wobei immer erst Grössen oder Glieder vernachlässigt worden sind, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind. Also ist nach dem Obigen mit demselben Grade der Genauigkeit:

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{\sin(B-\frac{1}{4}E)}{\sin(A-\frac{1}{4}E)},$$

und erst mit Vernachlässigung von Grössen oder Gliedern, deren Ordnung in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks die vierte übersteigt *), ist folglich:

$$b_1 = a_1 \frac{\sin(B - \frac{1}{4}E)}{\sin(A - \frac{1}{4}E)}.$$

Ueberhaupt ist also, erst mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von einer die vierte übersteigenden Ordnung sind:

$$a_1 = b_1 \frac{\sin(A - \frac{1}{4}E)}{\sin(B - \frac{1}{4}E)} = c_1 \frac{\sin(A - \frac{1}{4}E)}{\sin(C - \frac{1}{4}E)},$$

$$b_1 = c_1 \frac{\sin(B - \frac{1}{4}E)}{\sin(C - \frac{1}{4}E)} = a_1 \frac{\sin(B - \frac{1}{4}E)}{\sin(A - \frac{1}{4}E)},$$

$$c_1 = a_1 \frac{\sin(C - \frac{1}{4}E)}{\sin(A - \frac{1}{4}E)} = b_1 \frac{\sin(C - \frac{1}{4}E)}{\sin(B - \frac{1}{4}E)};$$

und es ergiebt sich nun hieraus der folgende merkwürdige Satz, der nach meiner Meinung wohl dem Legendre'schen Theorem an die Seite gesetzt zu werden verdienen möchte:

Die Winkel eines sphärischen Dreiecks, dessen Seiten gegen den Halbmesser der Kugel, auf welcher es liegt, sehr klein sind, werden auf die Winkel des entsprechenden Sehnen- oder Chorden-Dreiecks reducirt, wenn man von jedem Winkel des sphärischen Dreiecks den vierten Theil seines sphärischen Excesses abzieht; und berechnet man dann nach den gewöhnlichen Regeln der ebenen Trigonometrie die Seiten des Sehnen-Dreiecks, indem man eine Seite desselben als bekannt annimmt, so werden dabei erst Glieder vernachlässigt, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von einer die vierte übersteigenden Ordnung sind.

Schon weil der Bruch $\frac{1}{4}$ kleiner als der bei dem Legendre'schen Theorem zur Anwendung kommende Bruch $\frac{1}{3}$ ist, scheint mir die Genauigkeit des obigen Satzes etwas grösser zu sein, als die von dem Legendre'schen Satze gewährte Genauigkeit, was ich der Kürze wegen hier jetzt nicht weiter erörtern will, sondern zur Vergleichung nur auf die Formeln in dem Aufsatze Thl. XXIII. Nr. III. S. 111. hin-

*) Da die Seiten beider Dreiecke, des sphärischen und des Sehnendreiecks, offenbar von gleicher Ordnung, die letzteren übrigens noch kleiner als die ersteren sind.

weise. Bei dem Legendre'schen Satze wird der ganze Excess des sphärischen Dreiecks auf seine drei Winkel gleich vertheilt, so dass jeder Winkel um den dritten Theil des Excesses vermindert wird; bei meinem obigen Satze werden nur $\frac{3}{4}$ des Excesses des sphärischen Dreiecks auf seine drei Winkel gleich vertheilt, so dass jeder Winkel um den dritten Theil dieses Theils des ganzen Excesses vermindert wird.

Man muss wohl festhalten, dass im Obigen bloss die Formeln

$$b_1=a_1\frac{\sin(B-\frac{1}{4}E)}{\sin(A-\frac{1}{4}E)},\quad c_1=a_1\frac{\sin(C-\frac{1}{4}E)}{\sin(A-\frac{1}{4}E)}$$

bis auf Grössen der vierten Ordnung festgestellt worden sind, weshalb es also auch keineswegs befremden kann, dass im Dreiecke $A_1B_1C_1$ die Summe der Winkel nicht ganz genau 180° oder $\pi$ ist, sondern dass dabei auch eine dem im Obigen immer festgehaltenen Grade der Genauigkeit entsprechende Vernachlässigung eintritt, wie oben gezeigt worden ist. Deshalb darf der obige Satz auch nicht ganz so ausgedrückt werden, wie das Legendre'sche Theorem, sondern muss auf den ihm oben gegebenen Ausdruck gebracht werden.

Aus der Sehne $s$ findet man bekanntlich den Bogen Arc $s$ in einem mit dem Halbmesser $r$ beschriebenen Kreise auf folgende Art. Weil

$$\sin\frac{\text{Arc}\,s}{2r}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{r}$$

ist, so ist nach einer bekannten cyclometrischen Reihe:

$$\frac{\text{Arc}\,s}{2r}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{r}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{s^3}{r^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{s^5}{r^5}+\ldots,$$

also:

$$\text{Arc}\,s=s+\frac{s^3}{24r^2}+\frac{3s^5}{640r^4}+\ldots,$$

oder der Ueberschuss des Bogens über die Sehne ist:

$$\text{Arc}\,s-s=\frac{s^3}{24r^2}+\frac{3s^5}{640r^4}+\ldots,$$

wobei man sich in den meisten Fällen mit der durch die Näherungsformel

$$\text{Arc}\,s-s=\frac{s^3}{24r^2}$$

gewährten Genauigkeit wird begnügen können.

# XVII.

# Ueber Convergenz und Stetigkeit der Potenzreihen.

Von

Herrn Dr. *F. Arndt,*

Privatdocenten an der Universität zu Berlin.

---

Diese Abhandlung ist dazu bestimmt, die Theorie der Stetigkeit der Potenzreihen zu ihrem Ende zu führen, was durch meine bisherigen, im 20. Theile dieser Zeitschrift publicirten Untersuchungen noch nicht geleistet worden ist. Ich bezeichne diese Reihen mit

$$(R) \ldots\ldots a, \; a_1 x, \; a_2 x^2, \ldots\ldots a_n x^n, \ldots\ldots,$$

wo die Coefficienten der Potenzen von $x$ von dieser Variabeln unabhängig sind. Die Grundlage unserer Betrachtungen bildet folgendes

Theorem.

Wenn die Potenzreihe $(R)$ für den besonderen Werth $\delta$ von $x$ convergent ist, so convergirt sie auch für jedes $x$, dessen numerischer Werth unter dem numerischen Werthe von $\delta$ liegt, und die Convergenz wird sogar noch stattfinden, wenn man nach Substitution des neuen Werthes von $x$ allen Gliedern der Reihe das positive Zeichen giebt.

Bezeichnet man nämlich mit $i$ eine Grösse, deren numerischer Werth $(j)$ unter der Einheit liegt, so kann der neue Werth von $x$ durch $\delta i$ ausgedrückt werden, und die in Bezug auf Convergenz zu prüfende Reihe ist $A$, $A_1(j\Delta)$, $A_2(j\Delta)^2, \ldots\ldots$, wo $A_n$, $\Delta$ die nu-

merischen Werthe von $a_n$, $\delta$ bedeuten. Betrachtet man nun diese Reihe als eine nach Potenzen von $j$ fortschreitende, so erhellt ihre Convergenz augenblicklich. Denn da die Reihe ($R$) nach der Voraussetzung für $x=\delta$ convergent ist, so verschwindet ihr allgemeines Glied $a_n\delta^n$ mit $n=\infty$, folglich auch der Coefficient von $j^n$, es werden mithin alle Glieder der unendlichen Reihe $A$, $A_1\Delta$, $A_2\Delta^2$,.... eine endliche positive Grösse $C$ nicht übersteigen; nun ist $C$, $Cj$, $Cj^2$,.... eine convergente Reihe, da $j$ kleiner als die Einheit, folglich auch $A$, $A_1(j\Delta)$, $A_2(j\Delta)^2$,...., und um so mehr $a$, $a_1(i\delta)$, $a_2(i\delta)^2$,....

Aus diesem Theoreme fliessen sogleich folgende Sätze:

1. Man darf in der für $x=\delta$ convergenten Reihe ($R$), nachdem für $x$ ein Werth gesetzt worden, der numerisch unter dem numerischen Werthe von $\delta$ liegt, die Vorzeichen der Glieder beliebig ändern, ohne dass die Convergenz aufhört.

2. Wenn eine Potenzreihe für einen besonderen Werth von $x$ divergent ist, so divergirt sie auch für jeden numerisch grössern Werth von $x$, wie auch immer die Zeichen der Coefficienten beschaffen sind.

3. Wenn die Reihe ($R$) für $x=\delta$ convergirt, so wird auch noch die Reihe der numerischen Werthe ihrer Glieder convergent sein, wenn nur die Reihe ($R$) selbst noch für einen Werth von $x$ convergirt, dessen numerischer Werth den von $\delta$ übersteigt.

Hiernach sind in Bezug auf die Convergenz einer Potenzreihe nur folgende Fälle möglich:

4. Die Reihe kann für den einzigen Werth $x=0$ convergent sein, z. B. $x$, $1.2x^2$, $1.2.3x^3$,....

5. Sie kann für alle $x$ zwischen 0 und $+\infty$ convergent sein. Hieraus allein folgt, dass die Convergenz auch für alle $x$ zwischen 0 und $-\infty$ statt hat; ferner, dass die Reihe immer convergent bleibt von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$, wenn man statt der Coefficienten ihre numerischen Werthe setzt. Reihen dieser Art sind die $e^x$, $\sin x$, $\cos x$.

6. Findet weder der eine, noch der andere Fall statt, so lassen sich für $x$ eine untere und eine obere Grenze $-l$ und $+l$ angeben, so dass für alle $x$ zwischen diesen Grenzen Convergenz, für alle $x$ ausserhalb derselben Divergenz stattfindet, und dies gilt immer noch, wenn man für die Coefficienten der Reihe ihre numerischen Werthe substituirt. Reihen dieser Art sind die für $\log(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$.

7. Ist der numerische Werth von $\gamma$ grösser als $l$, so ist es unmöglich, dass der numerische Werth von $a_n\gamma^n$ unter einer endlichen positiven Grösse $C$ bleibe, wenn $n$ in's Unendliche wächst. Es sei nämlich $(\gamma)$ der absolute Werth von $\gamma$, und $i$ so gewählt, dass $\frac{l}{(\gamma)} < i < 1$. Bliebe nun $a_n\gamma^n$ numerisch unter $C$, so würde $a$, $a_1\gamma i$, $a_2\gamma^2 i^2$,.... eine convergente Reihe sein; dies ist aber unmöglich, da der numerische Werth von $\gamma i$ über $l$ liegt und die Reihe $(R)$ für alle $x$ ausserhalb der Grenzen $-l$ und $+l$ nach der Voraussetzung divergent ist.

Es mag hier bemerkt werden, dass in diesem Falle das allgemeine Glied $a_n\gamma^n$ nicht unendlich gross zu werden braucht mit $n$ zugleich. Es könnte z. B. dasselbe für eine gewisse Reihe von Werthen der Zahl immerwährend wachsen, für eine andere Reihe von Werthen sogar unendlich klein werden.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir folgendes

### Theorem.

Die Summe jeder Potenzreihe $(R)$ ist in dem Intervall ihrer Convergenz überall eine stetige Funktion von $x$.

Ich bemerke zuvörderst, dass es genügt, die positiven Werthe von $x$ in Betracht zu ziehen. Die Grenzen der Convergenz bezeichne ich, wie oben, mit $-l$, $+l$, wo $l > 0$, übrigens auch $= \infty$ sein kann. Die Summe der Reihe $(R)$ erhält also für jeden Werth von $x \geqq 0$ und $< l$ einen bestimmten Werth. Den Werth von $x$ bezeichne ich mit $\delta$, und setze

$$a + a_1\delta + a_2\delta^2 + a_3\delta^3 + \text{ in inf. } = f(\delta).$$

Die Zunahme $i$ von $\delta$ kann positiv oder negativ sein; im ersten Falle muss man $i$ so klein genommen denken, dass $\delta + i < l$, unter welcher Voraussetzung die Reihe convergent bleibt, wenn man $\delta + i$ statt $\delta$ setzt. Betrachten wir nun zuerst $i$ als positiv und setzen

$$a + a_1(\delta+i) + a_2(\delta+i)^2 + a_3(\delta+i)^3 + \text{ in inf. } = f(\delta+i).$$

Es ist zu zeigen, dass die Differenz

$$f(\delta+i) - f(\delta) = a_1((\delta+i)-\delta) + a_2((\delta+i)^2-\delta^2) + a_3((\delta+i)^3-\delta^3) + \text{ in inf.}$$

mit $i$ zugleich unendlich klein wird.

Nach dem Vorhergehenden bleiben die Reihen für $f(\delta)$, $f(\delta+i)$ noch convergent, wenn man statt der Coefficienten ihre numerischen Werthe setzt. Bezeichnen wir also den numerischen Werth von $a_n$ mit $A_n$, so ist $A_1((\delta+i)-\delta)$, $A_2((\delta+i)^2-\delta^2)$,.... ebenfalls eine convergente Reihe, deren Summe wir mit $D$ bezeichnen wollen. Der numerische Werth von $f(\delta+i)-f(\delta)$ ist offenbar $< D$, wir haben also nur nachzuweisen, dass $D$ mit $i$ unendlich klein wird. Zu dem Ende theilen wir die Reihe für $D$ in zwei Theile:

$$t = A_1((\delta+i)-\delta) + \dots + A_{n-1}((\delta+i)^{n-1}-\delta^{n-1}),$$

$$r = A_n((\delta+i)^n-\delta^n) + A_{n+1}((\delta+i)^{n+1}-\delta^{n+1}) + \text{ in inf.},$$

und bezeichnen mit $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Grösse. Wegen der Convergenz der Reihe für $D$ wird für jedes $i < l-\delta$ der Rest $r$ mit $n=\infty$ verschwinden, man wird also, nachdem für $i$ ein bestimmter Werth ($< l-\delta$) gesetzt worden, die Zahl $n$ so gross nehmen können, dass die Bedingung $r < \frac{1}{2}\varepsilon$ erfüllt ist. Dieselbe wird auch niemals aufgehoben werden, wenn man $i$ stetig abnehmen lässt, da die Glieder von $r$, wie man sieht, mit $i$ zugleich sämmtlich abnehmen. Man kann also, nachdem ein angemessener Werth von $n$ gewählt worden, $i$ noch weiter abnehmen lassen und so klein machen, dass $t$ ebenfalls $< \frac{1}{2}\varepsilon$ wird, ohne dass die erste Bedingung $r < \frac{1}{2}\varepsilon$ dadurch aufgehoben wird. Hieraus folgt aber $t+r$ oder $D < \varepsilon$, w. z. b. w. — Ganz ähnlich wird der Beweis für ein negatives $i$ geführt.

Es ist aber der Fall noch übrig, wo die gegebene Reihe auch noch für den Grenzwerth $x=l$ convergent ist. Dass unser Lehrsatz auch in diesem Falle noch richtig bleibt, werden wir durch neue Principien zeigen, denn die vorhergehenden Schlüsse würden ihre Kraft verlieren, wenn es sich nicht gerade ereignete, dass die Reihe der numerischen Werthe der Glieder noch für $x=l$ convergent bliebe. In diesem Falle ist z. B. die Reihe $x$, $-\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{3}x^3$, $-\frac{1}{4}x^4$,.... für $x=1$. Uebrigens erstreckt sich die Gültigkeit der folgenden Betrachtungen allgemeiner über alle $x < l$.

Es sei $i$ positiv und unter der Einheit; $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$,.... eine unendliche Folge von Grössen, deren Werthe von $i$ unabhängig sind, auch soll $\varphi_n$ mit $n=\infty$ verschwinden. Die Summe der convergenten Reihe $\varphi(1-i)$, $\varphi_1 i(1-i)$,.... $\varphi_n i^n(1-i)$,.... ($S$) wird sich der Null nähern, wenn $i$ gegen die Einheit convergirt. — Um diese Behauptung zu erweisen, theilen wir $S$ in zwei Theile:

$$t = \varphi(1-i) + \varphi_1 i(1-i) + \dots + \varphi_{n-1} i^{n-1}(1-i),$$

$$r = \varphi_n i^n(1-i) + \varphi_{n+1} i^{n+1}(1-i) + \text{ in inf.},$$

und bezeichnen mit $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Grösse. Auch sei $n$ so gross genommen, dass jedes Glied der unendlichen Folge $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots.$ numerisch kleiner als $\frac{1}{2}\varepsilon$; alsdann ist der numerische Werth von $r$ kleiner als $\frac{1}{2}\varepsilon i^n(1-i)(1+i+i^2\ldots.) < \frac{1}{2}\varepsilon . i^n$, also um so mehr $< \frac{1}{2}\varepsilon$. Hierauf nehme man $i$ der Einheit so nahe, dass auch $t$ numerisch $< \frac{1}{2}\varepsilon^n$, alsdann ist aber der numerische Werth von $S < \varepsilon$, w. z. b. w. *)

Allgemeiner ist folgendes

### Theorem.

Es sei $i$ positiv und unter der Einheit; $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ eine unendliche Folge von Gliedern, deren Werthe von $i$ **unabhängig** sind, auch soll $\Phi_n$ sich der Grenze $L$ nähern, wenn $n$ unendlich gross wird. Die Summe der convergenten Reihe $\Phi(1-i)$, $\Phi_1 i(1-i)$, $\Phi_2 i^2(1-i), \ldots.$ wird gegen die Grenze $L$ convergiren, wenn $i$ sich der Einheit nähert.

Der Beweis für diesen Satz lässt sich auf den vorhergehenden zurückführen. Setzt man nämlich

$$\Phi(1-i) + \Phi_1 i(1-i) + \Phi_2 i^2(1-i) + \ldots. = S,$$

$$L(1-i) + Li(1-i) + Li^2(1-i) + \ldots. = L;$$

so findet auf die Reihe

$$(L-\Phi)(1-i) + (L-\Phi_1) i(1-i) + (L-\Phi_2) i^2(1-i) + \ldots. = L-S$$

der vorhergehende Satz Anwendung.

Kehren wir nun zur Potenzreihe ($R$) zurück und setzen

$$a + a_1\delta + a_2\delta^2 + \ldots. = s, \quad a + a_1(\delta i) + a_2(\delta i)^2 + \ldots. = s_i,$$

wo $\delta > 0$ und $\overline{\overline{<}}\, l$, $i$ ein positiver ächter Bruch. Es ist zu zeigen, dass $s_i$ sich der Grenze $s$ nähert, wenn $1-i$ unendlich klein wird.

Um dies nachzuweisen, bezeichnen wir die Summe der $n+1$ ersten Glieder von $s$ mit $s^{(n)}$, so dass also $s^{(n)} - s^{(n-1)} = a_n\delta^n$ und

*) Offenbar verlieren die Schlüsse ihre Kraft, wenn die Coefficienten $\varphi$ von $i$ abhängig sind. Der Satz ist dann auch nicht immer richtig. So convergirt z. B. die Summe $1-i+i^2(1-i)+i^4(1-i)+i^6(1-i)$ + in inf. gegen die Grenze $\frac{1}{2}$, wenn $i$ sich der Einheit nähert.

$$s_{i,n} = a + a_1(\delta i) \ldots + a_n(\delta i)^n = s^0 + (s' - s^0)i \ldots + (s^{(n)} - s^{(n-1)})i^n$$
$$= s^0(1-i) + s'i(1-i) + \ldots + s^{(n-1)}i^{n-1}(1-i) + s^{(n)}i^n.$$

Lässt man in dieser Gleichung $n$ unendlich werden, so entsteht die folgende:

$$s_i = s^0(1-i) + s'i(1-i) + s''i^2(1-i) + \text{ in inf.}$$

Hier bilden nun die Coefficienten $s^0, s', s''\ldots$ eine unendliche Folge, deren Glieder von $i$ unabhängig sind, auch convergirt $s^{(n)}$ gegen die Grenze $s$, wenn $n$ unendlich gross wird. Nach dem vorhergehenden Theoreme nähert sich also $s_i$ der Grenze $r$, wenn $i$ sich der Einheit nähert, w. z. b. w. — Hiermit ist nun die Stetigkeit der Potenzreihen für alle Fälle erwiesen.

Wir schliessen hieran die Betrachtung der Reihen, welche durch Differenziation einer Potenzreihe nach der Variabeln $x$ entstehen, nämlich

$$(r) \ldots a_1,\ 2a_2x,\ 3a_3x^2, \ldots\ na_nx^{n-1} \ldots$$

### Theorem.

Für die beiden Reihen $(R)$, $(r)$ sind die Grenzen der Convergenz die nämlichen. Nur für die Grenzen selbst braucht nicht gleichzeitig Convergenz oder Divergenz statt zu finden.

Um dies zu erweisen, betrachten wir zuerst einen Werth $\beta$ von $x$, der zwischen $-l$ und $+l$ liegt ($-l$ und $+l$ sind, wie immer, die Grenzen der Convergenz für die Reihe $(R)$). Es ist also nachzuweisen, dass die Reihe $(r)$ für $x=\beta$ convergirt. Es seien $(\beta)$, $A_n$ die numerischen Werthe von $\beta$, $a_n$, und $\gamma$ so gewählt, dass $\gamma > (\beta)$ und $< l$. Nach den obigen Principien ist die Reihe $A$, $A_1\gamma$, $A_2\gamma^2\ldots$ convergent. Nun wird das Verhältniss $\dfrac{\left(\frac{\gamma}{(\beta)}\right)^n}{n+1}$ mit $n$ unendlich gross, wie leicht zu zeigen, folglich für hinreichend grosse $n$ die Potenz $\left(\frac{\gamma}{(\beta)}\right)^n$ fortwährend $> n+1$, d. h. $(n+1)(\beta)^n < \gamma^n$, folglich $A_1$, $2A_2(\beta), \ldots\ (n+1)A_n(\beta)^n \ldots$ eine convergente Reihe, also auch $a_1$, $2a_2\beta$, $3a_3\beta^2, \ldots$, w. z. b. w. — Es liege ferner $\beta$ ausserhalb der Grenzen $-l$, $+l$. Die Reihe $(r)$ wird dann für $x=\beta$ divergent sein. Denn man nehme $\gamma > l$

und $<(\beta)$. Wäre nun die Reihe (r) für $x=\beta$ convergent, so wäre $A_1$, $2A_2\gamma$, $3A_3\gamma^2$..... ebenfalls eine convergente Reihe, also auch $A$, $A_1\gamma$, $2A_2\gamma^2$,...., und um so mehr $a$, $a_1\gamma$, $a_2\gamma^2$,.... Dies ist aber wegen $\gamma > l$ unmöglich.

Wenn man also eine Potenzreihe wiederholt differenziirt nach der Variabeln $x$, so werden für alle diese Reihen die Grenzen der Convergenz immer die nämlichen sein, und die Reihen stetige Funktionen von $x$ in dem Intervall $(-l, +l)$. Nur für die Grenzen selbst wird der Charakter der Reihen in Bezug auf Convergenz in der Regel ein verschiedener sein.

## Theorem.

Wenn die Gleichung $f(x)=a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$ von $x=-l$ bis $x=+l$ gilt (excl. oder incl.), so gilt die Gleichung $f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots$ genau zwischen denselben Grenzen, übrigens auch noch für $x=+l$ oder $x=-l$, wenn die Reihe rechts für einen dieser Grenzwerthe noch convergent ist.

Bezeichnen wir nämlich die Summe $a_1+2a_2x+3a_3x^2+$ in inf. mit $\varphi(x)$, und mit $\lambda$, $x$ zwei Werthe von $x$ zwischen $-l$ und $+l$, so ist bekanntlich, da alle Glieder von $\varphi(x)$ und $\varphi(x)$ selbst stetige Funktionen von $x$ sind:

$$\int_\lambda^x \varphi(x)\partial x = \int_\lambda^x a_1\partial x + \int_\lambda^x 2a_2x\partial x + \int_\lambda^x 3a_3x^2\partial x + \text{ in inf.}$$

$$= a_1(x-\lambda)+a_2(x^2-\lambda^2)+a_3(x^3-\lambda^3)+\dots,$$

$$\int_\lambda^x \varphi(x)\partial x = f(x)-f(\lambda).$$

Die Differenziation dieser Gleichungen nach $x$ gibt $\varphi(x)=f'(x)$, w. z. b. w.

Die Wichtigkeit dieses Satzes bei Summationen leuchtet ein.

Es wird noch bemerkt, dass eine Potenzreihe einen ganz verschiedenartigen Charakter erhalten kann, wenn man die Glieder gruppenweise vereinigt, wodurch eine Reihe entsteht, deren Glieder nicht mehr die Form $a_nx^n$ haben.

Nimmt man in der Reihe ($R$) für $x$ einen complexen Werth

$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, während die Coefficienten reell bleiben, so kann man nach den Grenzen der Convergenz der reellen Reihen

$$a,\quad a_1\varrho\cos\varphi,\quad a_2\varrho^2\cos2\varphi,\quad a_3\varrho^3\cos3\varphi,\ldots.$$
$$a_1\varrho\sin\varphi,\quad a_2\varrho^2\sin2\varphi,\quad a_3\varrho^3\sin3\varphi,\ldots.$$

fragen, wenn die Grenzen der Convergenz $(-l, +l)$ für die Reihe $a$, $a_1\varrho$, $a_2\varrho^2$, $a_3\varrho^3\ldots.$ bekannt sind. In dieser Beziehung lässt sich behaupten, dass jede der genannten Reihen von $x=-l$ bis $x=+l$ convergent ist. Es convergirt nämlich die Reihe $A$, $A_1\varrho$, $A_2\varrho^2,\ldots.$, wenn $\varrho<l$ ist, also auch $A$, $A_1\varrho\cos\varphi$, $A_2\varrho^2\cos2\varphi,\ldots.$, folglich um so mehr $a$, $a_1\varrho\cos\varphi$, $a_2\varrho^2\cos2\varphi,\ldots.$; und ebenso $a_1\varrho\sin\varphi$, $a_2\varrho^2\sin\varphi,\ldots.$ Die Reihe $(R)$ ist also immer convergent, wenn der Modulus von $x$ unter $l$ liegt, und zwar für jedes $\varphi$. Dass sie aber divergent sei, wenn der Modulus von $x$ über $l$ liegt, kann nicht behauptet werden. Z. B.: Die Grenzen der Convergenz für die Reihe $1$, $x$, $2x^2$, $\frac{1}{2}x^3$, $4x^4$, $\frac{1}{4}x^5$, $8x^6\ldots.$ sind $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $+\frac{1}{2}\sqrt{2}$, aber die Grenzen der Convergenz der Reihe $x\sin\varphi$, $2x^2\sin2\varphi$, $\frac{1}{2}x^3\sin3\varphi$, $4x^4\sin4\varphi,\ldots.$ für $\varphi=\frac{\pi}{2}$ sind weiter, nämlich $-\sqrt{2}$ und $+\sqrt{2}$, wie leicht erhellt *). — Allgemeine Theorien hierüber lassen sich erst dann aufstellen, wenn man über die Art des Wachsthums der Coefficienten $a$, $a_1$, $a_2,\ldots.$ bestimmte Annahmen macht.

*) Dies hat darin seinen Grund, dass man für einen gegebenen Winkel $\varphi$, auch wenn er zu $\pi$ in einem irrationalen Verhältnisse steht, immer eine unendliche Reihe von Werthen der Zahl $n$ angeben kann, dass $\sin n\varphi$ beliebig klein wird.

# XVIII.

# Ueber die Schätzung des mittleren Fehlers directer Beobachtungen.

(Vierter Nachtrag zur Ausgleichungsrechnung.) *)

Von

Herrn Professor *Gerling*

in Marburg.

---

Die Ableitung der Formel für den mittleren Fehler in §. 16. meiner Ausgleichungsrechnung hat bei dem mündlichen Vortrage immer genügt. Im Laufe der Zeit aber habe ich mich überzeugt, dass für Leser hier doch einige Unklarheit übrig bleiben kann, weil nicht scharf genug herausgehoben ist, weshalb eine einzige fingirte Beobachtung erforderlich und genügend ist, um das Bedürfniss einer, unsere Kräfte übersteigenden äusseren Hülfe, da wo unser Rechnen nicht mehr hinreicht, möglichst zu erfüllen.

Demnach sei es mir erlaubt, zumal auch S. 39. der (angezeigte) Druckfehler störend einwirken kann, die ganze betreffende Stelle von S. 38. Z. 12 v. o. bis S. 39. Z. 10 v. u. in einer neuen Redaction hier zu geben.

Ich würde demnach jetzt schreiben:

„Die genaue Bestimmung dieses $m$ erforderte also eigentlich, dass wir das wahre $O$ kennten. — Dazu fehlt uns offenbar nur eine entscheidende Beobachtung, welche nicht nur fehlerfrei wäre (was allerdings möglich ist, weil sich unsere Fehler zufällig aufheben können), sondern welche auch als fehlerfrei von uns

---

*) Die früheren Nachträge siehe in Theil VI. S. 141. und 375.

erkannt werden könnte. — Dieses Erkennen einer zufällig fehlerfreien Beobachtung, welches dann auch alles frühere und spätere Beobachten überflüssig und somit aller Ausgleichung ein Ende machte, ist aber für unsere menschlichen Kräfte eben so unmöglich, als die Kenntniss der einzigen, nothwendig fehlerfreien Beobachtungsgrösse $O$ selbst, welche die unerreichbare Gränze aller unserer Beobachtungen bildet. — Deshalb müssen wir darauf verzichten, das $m$ genau zu berechnen und uns vielmehr mit einer möglichst angenäherten Schätzung begnügen."

„Hierzu benutzen wir die bekannte Erfahrung, dass gewöhnlich unter jeder grösseren Reihe, ja oft schon unter einer geringen Anzahl von beobachteten $o$, sich das aus ihnen berechnete $M$ selbst, zuweilen sogar öfters, zu finden pflegt. Kommt nun dieser Fall vor, so schreiben wir jedem beobachteten $M$, eben so wohl wie den übrigen $o$, den mittleren Fehler $m$ zu. Umgekehrt werden wir also auch, wenn wir uns zu den vorliegenden $o$ noch die uns fehlende eine, über den wahren Werth von $O$ entscheidende Beobachtung hinzudenken, die Abweichung derselben von dem berechneten Mittel $= m$ setzen dürfen. — Das Hinzudenken dieser Beobachtung hat also die Folge, dass sich unser vorher als Minimum berechnetes $[vv]$ in die Summe $[vv] + mm$ verwandelt. — Demnach halten wir uns für unsere Schätzung berechtigt, diese Summe nunmehr auch als die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Wahrheit zu betrachten, zu deren Kenntniss nur jene Beobachtung fehlte, und dieselbe auf unsere vorhandenen $o$ zu gleichen Theilen zu vertheilen, also zu setzen: $z_0 mm = [vv] + mm$, d. h.

$$\text{n. 7.} \qquad m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_0 - 1}}.$$

„Ehe wir weiter gehen, wird es nützlich sein, noch Einiges anzumerken.

„Vorerst müssen wir dem Irrthume vorbeugen, als sei ein Widerspruch zwischen dieser letzten Gleichung und n. 5. — Dies kann höchstens nur auf den ersten Blick so scheinen, indem man etwa glaubte, wenn man $W = O$ setze, so müsse man nicht nur $[uu] = z_0 mm$, sondern auch $W - M = m$ setzen. Diese letzte Substitution ist aber offenbar ganz unzulässig, indem nach dem Vorhergehenden $O - M$ nur dann $= m$ gesetzt werden kann, wenn man sich eine von beiden Grössen als beobachtet denkt, statt dass sich n. 5. nur auf das nach n. 1. berechnete $M$ und eine bekannte oder angenommene Zahl $W$ bezieht." — Was aber u. s. w.

Ich benutze diese Gelegenheit, um noch die **Berichtigungen** nachzutragen, welche bei dem Verzeichnisse hinter dem Inhalte übersehen und nach und nach aufgefunden sind.

S. 46. Z. 2 v. o. statt $\frac{r}{\sqrt{z_0-1}}$ lies $\frac{r}{\sqrt{z_0}}$.

S. 61. Z. 7 v. u. hätte noch angemerkt werden sollen, dass das nicht accentuirte $s$ hier offenbar eine andere Bedeutung hat als S. 37.

S. 84. Z. 7 v. u. statt $7m$ lies $7m_1$.

S. 95. Z. 13 v. u. statt $m_1$ und $m_2$ lies $m_2$ und $m_3$.

S. 107. Z. 6 v. u. statt $o_1$ lies $o$.

S. 109. sind in vier verschiedenen Zeilen bei den partiellen Differentialquotienten die sonst gewöhnlichen Parenthesen vergessen.

S. 118. Z. 8 v. o. statt $2E_2+4E_2$ lies $2E_1+4E_2$.

S. 142. Z. 9 v. o. statt $0{,}12687n$ lies $0{,}12387n$.

S. 152. Z. 8 v. u. statt „die" lies „den."

S. 153. Z. 15 v. o. ist zuzufügen: „wo $s$ die mittlere Abweichung der Gewichtseinheit bezeichnet."

S. 173. Z. 4 v. o. statt „dann solche" lies: „dann aus den $w$ die $v$, um solche."

S. 184. Z. 4 v. o. hinter „schliessen" ist zuzufügen: „und keine anderweite Bedingung für sie zu erfüllen bleibt."

S. 187. Z. 10 v. o. statt „Winkelmessungen" lies: „Winkelmessungen auf verschiedenen Standpunkten."

S. 201. Z. 16 v. u. statt $mm$ lies $m$.

S. 202. Z. 11 v. o. ist hinter „zum Voraus" zuzufügen: „bloss in Beziehung auf die Winkel."

S. 202. Z. 12 v. o. ist hinter „Polygon" einzuschalten: „in dieser Hinsicht allein."

S. 217. Z. 2 v. u. statt $p=2_2$ lies $p_2=2$.

S. 238. Z. 13 v. o. sind die Worte „am Ende" zu streichen.

S. 240. Z. 13 v. o. statt 46′ lies 36′.

S. 264. Z. 6 v. u. statt $\log\frac{2.1}{3}$ lies $\log\sin\frac{2.3}{1}$.

S. 268. Z. 3 v. o. statt $\frac{n.n-1}{1.2}$ lies $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

S. 282. Z. 9 v. u. statt „7 kein" lies „7, Fig. 18 kein."

S. 304. Z. 11 v. o. ist hinter „wir" einzuschalten: „vorausgesetzt, dass nur die Richtungen (ausnahmsweise) benutzt werden sollten."

S. 325. Z. 8 v. o. statt „Messungen" lies: „Winkelmessungen."

S. 334. Z. 14 v. o. ist zuzufügen: „so dass die Coordinaten durch Zusammensetzung gefunden werden können."

S. 336. Z. 3 v. o. statt $dr_n))$ lies $dr_n)$.

S. 336. Z. 3 v. u. statt „Seiten-Polygon" lies: „eine Seiten-Polygon."

S. 343. Z. 8 v. o. statt „diesen .... Ordinaten" lies: „dieser .... Ordinate."

S. 349. Z. 19 v. o. statt 9,01789 lies 0,01789.

S. 349. Z. 19 v. u. statt $6{,}36530n$ lies $0{,}36530n$.

S. 351. Z. 14 v. o. statt $r^3$ lies $r_3$.

S. 352. Z. 1 v. u. statt $A^1$ lies $A_1$.

S. 391. Z. 8 v. o. statt $k_1 = +0{,}3$ lies $k_3 = +0{,}3$.

S. 391. Z. 9 v. o. statt 4,621 lies 4,641.

S. 391. Z. 10 v. o. statt 2,581 lies 2,591.

S. 392. Z. 5 v. o. statt 3) lies c).

S. 402. Z. 15 v. o. statt $k,$ lies $k_1$.

Endlich ist Fig. 25. die Linie 9.3 zu tilgen und dafür 8.4 auszuziehen.

# XIX.

## Uebungsaufgaben für Schüler.

---

### Problemata et theoremata.

Auctore Dre. Christiano Fr. Lindman, Lectore Strengn.

1. Invenire summam $n$ terminorum seriei

$$1+3+7+15+31+\ldots.$$

2. Demonstrare formulam

$$\mathop{S}_{p=1}^{p=n} p_r = (n+1)_r, \qquad (r = \text{num. integro.})$$

3. Locum invenire ejusmodi punctorum, ut tangentes inde ad Parabolam Apollonianam datam ductae angulum $=\alpha$ comprehendant. Quaenam linea est locus quaesitus, quando est $\alpha=\frac{\pi}{2}$?

4. Demonstrare formulam

$$\mathop{S}_{p=1}^{p=n}(-1)^p n_p \frac{p^r}{n+p+1} = (-1)^r \frac{(n+1)^r(\Gamma(n+1))^2}{\Gamma 2(n+1)}, \quad r \leqq n.$$

5. Triangulorum omnium, quae ejusdem sint perimetri et in eodem circulo descripta sint, maximum et minimum invenire.

---

### Von dem Herausgeber.

1. Bezeichnet man, wenn in Taf. III. Fig. 1. $ABCD$ ein beliebiges Viereck ist, dessen Diagonalen $AC$ und $BD$ sind, den Flächeninhalt des Dreiecks $ABE$ durch $\Delta$, so ist

$$ABCD = \Delta \cdot \frac{AC.BD}{AE.BE}.$$

2. Bezeichnet man, wenn in Taf. III. Fig. 2. $ABCDE$ ein beliebiges Fünfeck ist, den Flächeninhalt des Dreiecks $AFG$ durch $\Delta$, so ist

$$ABCDE = \Delta . \left\{ \frac{AC.BF}{AF.FG} + \frac{AD.EG}{AG.FG} + \frac{AC.AD}{AF.AG} \right\}.$$

3. Bezeichnet man, wenn in Taf. III. Fig. 3. $ABCDEF$ ein beliebiges Sechseck ist, den Flächeninhalt des Dreiecks $GHJ$ durch $\Delta$, so ist

$$ABCDEF = \Delta . \left\{ \begin{array}{l} \frac{GA.GB + GD.GE}{GH.GJ} \\ + \frac{HC.HD + HA.HF}{HJ.GH} \\ + \frac{JB.JC + JF.JE}{GJ.HJ} - 2 \end{array} \right\}.$$

4. Wenn in Taf. III. Fig. 4. $ABCDEF$ ein beliebiges Sechseck ist und der Flächeninhalt des Dreiecks $GHJ$ durch $\Delta$ bezeichnet wird, so ist

$$ABCDEF = \Delta . \left\{ 1 - \frac{GA.GB}{GH.GJ} - \frac{HE.HF}{HJ.GH} - \frac{JC.JD}{GJ.HJ} \right\}.$$

# XX.

# Miscellen.

Von dem Herausgeber.

## I.

Jeder kennt die einfache Methode, durch welche sich mittelst einer Construction in der Ebene aus den drei Seiten einer dreiseitigen körperlichen Ecke oder eines sphärischen Dreiecks dessen Winkel finden lassen. Dieser Construction kann man sich auch bedienen, die Grundformel der sphärischen Trigonometrie zu entwickeln, was zu einer zweckmässigen Uebungsaufgabe für Schüler benutzt werden kann, eben so wie die Entwickelung anderer Formeln der sphärischen Trigonometrie aus den betreffenden Constructionen in der Ebene.

Die Construction der Winkel aus den Seiten, welche ich hier als Beispiel solcher Ableitungen wähle, wird durch Taf. III. Fig. 5. dargestellt, welche bekannt genug ist und einer weiteren Erläuterung nicht bedarf. Man setze $OC'=1$, so ist

$$OA'=\cos b,\quad OB'=\cos a.$$

Denkt man sich $OO'=u$ gezogen, setzt $O'A'=x$, $O'B'=y$ und bezeichnet die Winkel $O'OA'$ und $O'OB'$ respective durch $\varphi$ und $\psi$, so ist

$$x=u\sin\varphi,\quad y=u\sin\psi.$$

Ferner ist

$$\cos b=u\cos\varphi,\quad \cos a=u\cos\psi.$$

Also ist

$$\frac{\cos a}{\cos b}=\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}=\frac{\cos(c-\varphi)}{\cos\varphi}=\cos c+\sin c\tang\varphi,$$

woraus

$$\tang\varphi = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b \sin c}$$

folgt. Nun ist nach dem Obigen

$$\frac{x}{\cos b} = \tang\varphi, \quad x = \cos b \tang\varphi;$$

also

$$x = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin c}.$$

Weil aber

$$O'A' = x = A'C'.\cos A = OC'.\sin b \cos A = \sin b \cos A$$

ist, so ist

$$\sin b \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin c},$$

also

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

welches die bekannte Grundformel der sphärischen Trigonometrie ist.

---

## II.

### Aufgabe.

Durch einen zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, dass diese Linie und die beiden von ihr auf den Schenkeln des gegebenen Winkels von dessen Spitze aus abgeschnittenen Stücke als Seiten ein Dreieck von gegebenem Flächeninhalte einschliessen.

### Auflösung.

Der gegebene Winkel sei $BAC = \alpha$ (Taf. III. Fig. 6.), der gegebene Punkt zwischen seinen Schenkeln sei $D$, und der Flächeninhalt des von der durch $D$ zu ziehenden Linie abzuschneidenden Dreiecks werde durch $\Delta$ bezeichnet. Weil der Punkt $D$ gegeben ist, so werden, wenn man durch $D$ die Parallele $DG$ mit $AC$ zieht, die Linien $AG = a$ und $DG = b$ gegeben sein. Ist nun $EF$ die durch $D$ zu ziehende Linie, so setze man $AE = x$, $AF = y$; dann hat man zur Bestimmung von $x$ und $y$ offenbar die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}xy\sin\alpha=\varDelta$$

und die Proportion

$$x-a:b=x:y.$$

Also ist

$$x-a:b=x:\frac{2\varDelta}{x\sin\alpha},$$

woraus man sogleich die Gleichung

$$x^2-\frac{2\varDelta}{b\sin\alpha}x=-\frac{2a\varDelta}{b\sin\alpha},$$

und hieraus ferner

$$x=\frac{\varDelta\pm\sqrt{\varDelta(\varDelta-2ab\sin\alpha)}}{b\sin\alpha}$$

erhält. Weil nun nach dem Obigen

$$y=\frac{2\varDelta}{x\sin\alpha}$$

ist, so ist

$$y=\frac{2b\varDelta}{\varDelta\pm\sqrt{\varDelta(\varDelta-2ab\sin\alpha)}},$$

und, wenn man im Zähler und Nenner dieses Bruchs mit

$$\varDelta\mp\sqrt{\varDelta(\varDelta-2ab\sin\alpha)}$$

multiplicirt:

$$y=\frac{\varDelta\mp\sqrt{\varDelta(\varDelta-2ab\sin\alpha)}}{a\sin\alpha}.$$

Zur Bestimmung von $x$ und $y$ hat man also die folgenden Formeln, in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen:

$$x=\frac{\varDelta\pm\sqrt{\varDelta(\varDelta-2ab\sin\alpha)}}{b\sin\alpha},$$

$$y=\frac{\varDelta\mp\sqrt{\varDelta(\varDelta-2ab\sin\alpha)}}{a\sin\alpha}.$$

Zieht man in der Figur noch die Linie $AD$ und bezeichnet den Flächeninhalt des Dreiecks $ADG$ durch $\varDelta'$, so ist

$$\varDelta'=\tfrac{1}{2}ab\sin\alpha,\quad\text{also}\quad 2ab\sin\alpha=4\varDelta';$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$x=\frac{\Delta\pm\sqrt{\Delta(\Delta-4\Delta')}}{b\sin\alpha},$$

$$y=\frac{\Delta\mp\sqrt{\Delta(\Delta-4\Delta')}}{a\sin\alpha};$$

oder, weil

$$b\sin\alpha=\frac{2\Delta'}{a},\quad a\sin\alpha=\frac{2\Delta'}{b}$$

ist:

$$\frac{x}{a}=\frac{\Delta\pm\sqrt{\Delta(\Delta-4\Delta')}}{2\Delta'},$$

$$\frac{y}{b}=\frac{\Delta\mp\sqrt{\Delta(\Delta-4\Delta')}}{2\Delta'};$$

also auch:

$$\frac{x}{a}=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\Delta}{\Delta'}\pm\sqrt{\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)^2-4\frac{\Delta}{\Delta'}}\right\},$$

$$\frac{y}{b}=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\Delta}{\Delta'}\mp\sqrt{\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)^2-4\frac{\Delta}{\Delta'}}\right\};$$

woraus sich die Gleichungen

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{\Delta}{\Delta'},\quad \frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}=\frac{\Delta}{\Delta'}$$

ergeben.

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{\Delta}{\Delta'}=\mu \text{ und } \frac{x}{a}=u,\quad \frac{y}{b}=v;$$

so sind vorstehenden Gleichungen:

$$u+v=\mu,\quad uv=\mu.$$

Also ist

$$(u-v)^2=(u+v)^2-4uv=\mu(\mu-4);$$

folglich:

$$u+v=\mu,$$

$$u-v=\pm\sqrt{\mu(\mu-4)};$$

und hieraus:

$$u=\frac{\mu\pm\sqrt{\mu(\mu-4)}}{2},$$

$$v=\frac{\mu\mp\sqrt{\mu(\mu-4)}}{2}.$$

Bezeichnet man die mittlere Proportionalzahl zwischen $\mu$ und $\mu-4$ durch $\lambda$ und setzt also

$$\lambda=\sqrt{\mu(\mu-4)},$$

so ist

$$u=\frac{\mu\pm\lambda}{2},\quad v=\frac{\mu\mp\lambda}{2};$$

also

$$x=\frac{\mu\pm\lambda}{2}a,\quad y=\frac{\mu\mp\lambda}{2}b.$$

Wir haben daher die folgenden einfachen Formeln zur Auflösung unserer Aufgabe:

$$\mu=\frac{\Delta}{\Delta'},\quad \lambda=\sqrt{\mu(\mu-4)};$$

$$x=\frac{\mu\pm\lambda}{2}a,\quad y=\frac{\mu\mp\lambda}{2}b.$$

Soll die Auflösung möglich sein, so darf $\mu$ nicht kleiner als 4 sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist immer $\lambda<\mu$, weil offenbar

$$\sqrt{\mu(\mu-4)}=\mu\sqrt{1-\frac{4}{\mu}}<\mu$$

ist. Also kann weder $x$, noch $y$ negativ werden.

Diese Auflösung der vorstehenden, zur Uebung für Schüler jedenfalls sehr zweckmässigen, an sich übrigens sehr einfachen und leichten Aufgabe empfiehlt sich vielleicht einigermassen durch die verschiedenen, dabei in Anwendung gebrachten Relationen und Transformationen. Man kann die Aufgabe auch zweckmässig so abändern, dass man den gegebenen Punkt $D$ ausserhalb des gegebenen Winkels $BAC$ liegend annimmt, welche Aufgabe noch mehr als die vorhergehende zu zweckmässigen Uebungen der Schüler Veranlassung geben kann. Für den kundigen und geschickten Lehrer werden diese Andeutungen hinreichen.

## III.

### Ueber das Winkelkreuz.

Wenn der Geometer die Grösse des Winkels $\alpha$ seines Winkelkreuzes genau kennt und, um die Grösse einer unzugänglichen Entfernung $MN$ (Taf. III. Fig. 7.) zu bestimmen, auf dem Terrain drei Punkte $A$, $B$, $C$ von solcher Lage ausgewählt hat, dass, wenn in jedem derselben das Winkelkreuz aufgestellt wird, dessen Visirlinien verlängert durch die Punkte $M$ und $N$ gehen; so braucht er, um die Entfernung $MN$ berechnen zu können, bloss die drei Seiten $AB$, $BC$, $CA$ des Dreiecks $ABC$, dessen Spitzen die drei Punkte $A$, $B$, $C$ sind, mit der Kette zu messen.

Denn es ist klar, dass die fünf Punkte $A$, $B$, $C$, $M$, $N$ in dem um das Dreieck $ABC$ beschriebenen Kreise liegen müssen. Bezeichnen wir nun den Halbmesser dieses Kreises durch $R$ und den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ durch $\Delta$, so ist nach einer sehr bekannten Formel

$$R = \frac{AB.BC.CA}{4\Delta}.$$

Nun überzeugt man sich aber, wenn man nur eins der Dreiecke $MAN$, $MBN$, $MCN$ in's Auge fasst, auf der Stelle von der Richtigkeit des folgenden Ausdrucks:

$$MN = 2R \sin\alpha.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$MN = \frac{AB.BC.CA}{2\Delta} \sin\alpha$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$S = \frac{AB + BC + CA}{2},$$

so ist bekanntlich:

$$\Delta = \sqrt{S(S-AB)(S-BC)(S-CA)},$$

und folglich:

$$MN = \frac{AB.BC.CA}{2\sqrt{S(S-AB)(S-BC)(S-CA)}} \sin\alpha.$$

Ist der Winkel des Winkelkreuzes ein rechter Winkel, wie gewöhnlich, so ist $\alpha = 90^0$, also $\sin\alpha = 1$, folglich:

$$MN=\frac{AB.BC.CA}{2\sqrt{S(S-AB)(S-BC)(S-CA)}}.$$

Ist der Winkel des Winkelkreuzes ein halber rechter Winkel, also $\alpha=45^0$, so ist $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, also:

$$MN=\frac{AB.BC.CA}{2\sqrt{2S(S-AB)(S-BC)(S-CA)}}.$$

Zur Kenntniss des constanten Winkels seines Winkelkreuzes wird der Geometer am Besten dadurch gelangen, dass er auf recht ebenem Terrain, wo aber die Linie $MN$ zugänglich ist und selbst mit der Kette genau gemessen werden kann, eine Operation, wie die vorher beschriebene, ausführt, wobei $AB$, $BC$, $CA$ natürlich auch mit aller nur möglichen Genauigkeit gemessen werden, und dann den Winkel $\alpha$ mittelst der Formel

$$\sin\alpha=\frac{2.MN.\sqrt{S(S-AB)(S-BC)(S-CA)}}{AB.BC.CA}$$

berechnet. Ist der Winkel $\alpha$ einmal auf diese Weise genau bestimmt, so kann er dann fernerhin bei allen solchen Operationen, wie die obige, benutzt werden, wenn man nur dafür Sorge trägt, dass das Winkelkreuz keine Aenderung erleidet.

---

## IV.

### Ueber eine Eigenschaft des Kreises.

Die folgenden einfachen Betrachtungen haben mich neulich zu einem, eine Eigenschaft des Kreises aussprechenden Satze geführt, welchen ich für neu halte, da ich mich, wenigstens jetzt nicht, erinnere, ihn schon irgendwo gefunden zu haben. Ich theile diese Kleinigkeit, so wie ich sie zufällig gefunden, hier mit, weil sie vielleicht zu einer zweckmässigen Uebung für Schüler Gelegenheit geben kann, ohne derselben sonst einen Werth beizulegen.

Wir wollen zuerst die Curve zu bestimmen suchen, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten seien $p$, $q$ und $p_1$, $q_1$ die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte, und $\mu$ sei der Exponent des gegebenen Verhältnisses. Sind nun $x$, $y$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes der gesuchten Curve, so sind bekanntlich

$$(x-p)^2+(y-q)^2 \text{ und } (x-p_1)^2+(y-q_1)^2$$

die Quadrate der Entfernungen des Punktes $(xy)$ von den beiden gegebenen Punkten $(pq)$ und $(p_1q_1)$, und die Bedingung der Aufgabe führt nun unmittelbar zu der folgenden Gleichung:

$$(x-p_1)^2+(y-q_1)^2=\mu^2\{(x-p)^2+(y-q)^2\},$$

oder, wie man nach leichter Entwickelung findet, zu der Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r}(1-\mu^2)(x^2+y^2)-2(p_1-\mu^2p)x-2(q_1-\mu^2q)y \\ +(p_1{}^2-\mu^2p^2)+(q_1{}^2-\mu^2q^2)\end{array}\right\}=0,$$

oder zu der Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r}x^2-2\dfrac{p_1-\mu^2p}{1-\mu^2}x \\ +y^2-2\dfrac{q_1-\mu^2q}{1-\mu^2}y\end{array}\right\}=-\frac{(p_1{}^2-\mu^2p^2)+(q_1{}^2-\mu^2q^2)}{1-\mu^2}.$$

Addirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Grösse

$$\left(\frac{p_1-\mu^2p}{1-\mu^2}\right)^2+\left(\frac{q_1-\mu^2q}{1-\mu^2}\right)^2,$$

so wird dieselbe, wie man leicht findet:

$$\left(x-\frac{p_1-\mu^2p}{1-\mu^2}\right)^2+\left(y-\frac{q_1-\mu^2q}{1-\mu^2}\right)^2=\frac{\mu^2\{(p-p_1)^2+(q-q_1)^2\}}{(1-\mu^2)^2}.$$

Hieraus sieht man, dass die gesuchte Curve ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt durch die Coordinaten

$$\frac{p_1-\mu^2p}{1-\mu^2},\quad \frac{q_1-\mu^2q}{1-\mu^2}$$

bestimmt wird, und dessen Halbmesser der absolute Werth der Grösse

$$\frac{\mu\sqrt{(p-p_1)^2+(q-q_1)^2}}{1-\mu^2}$$

ist, wo $\sqrt{(p-p_1)^2+(q-q_1)^2}$ bekanntlich die Entfernung der beiden gegebenen Punkte $(pq)$ und $(p_1q_1)$ von einander ist.

Die vorhergehende Betrachtung gewissermassen umkehrend, wollen wir nun annehmen, dass ein Kreis gegeben sei, dessen Gleichung für ein rechtwinkliges Coordinatensystem

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ist, und wollen für diesen Kreis zwei Punkte $(pq)$ und $(p_1q_1)$ so zu bestimmen suchen, dass die Entfernungen eines jeden Punktes des Kreises von diesen beiden Punkten in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, dessen Exponent $\mu$ sein mag, so dass man nämlich die Entfernung eines jeden Punktes des Kreises von dem Punkte $(p_1q_1)$ erhält, wenn man die Entfernung dieses Punktes des Kreises von dem Punkte $(pq)$ mit $\mu$ multiplicirt. Mit Rücksicht auf die vorhergehenden Betrachtungen erhält man zur Bestimmung der Coordinaten $p$, $q$ und $p_1$, $q_1$ der beiden gesuchten Punkte unmittelbar die drei Gleichungen:

$$\frac{p_1-\mu^2 p}{1-\mu^2}=a,\quad \frac{q_1-\mu^2 q}{1-\mu^2}=b,\quad \frac{\mu^2\{(p-p_1)^2+(q-q_1)^2\}}{(1-\mu^2)^2}=r^2;$$

und sieht hieraus zugleich, dass die vorgelegte Aufgabe eine unbestimmte ist. Aus den beiden ersten Gleichungen folgt nun:

$$p_1=(1-\mu^2)a+\mu^2 p,\quad q_1=(1-\mu^2)b+\mu^2 q;$$

also

$$p-p_1=(1-\mu^2)(p-a),\quad q-q_1=(1-\mu^2)(q-b);$$

welches, in die dritte der drei obigen Gleichungen, aus welcher $p$, $q$; $p_1$, $q_1$ bestimmt werden müssen, gesetzt, zu der Gleichung

$$(p-a)^2+(q-b)^2=\left(\frac{r}{\mu}\right)^2$$

führt, woraus man sieht, dass der geometrische Ort des Punktes $(pq)$ ein dem gegebenen Kreise concentrischer Kreis von dem Halbmesser $\frac{r}{\mu}$ ist.

Nach dem Obigen ist ferner

$$p_1-a=\mu^2(p-a),\quad q_1-b=\mu^2(q-b);$$

also

$$(p_1-a)^2+(q_1-b)^2=\mu^4\{(p-a)^2+(q-b)^2\},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$(p_1-a)^2+(q_1-b)^2=\mu^4\left(\frac{r}{\mu}\right)^2=(\mu r)^2,$$

woraus man sieht, dass der geometrische Ort des Punktes $(p_1q_1)$ ein dem gegebenen Kreise concentrischer Kreis von dem Halbmesser $\mu r$ ist.

Aus den beiden Gleichungen

$$p_1-a=\mu^2(p-a),\quad q_1-b=\mu^2(q-b)$$

folgt ferner

$$\frac{p_1-a}{q_1-b}=\frac{p-a}{q-b} \text{ oder } \frac{p-a}{p_1-a}=\frac{q-b}{q_1-b},$$

woraus man sieht, dass die Punkte $(pq)$ und $(p_1q_1)$ mit dem Mittelpunkte $(ab)$ des gegebenen Kreises jederzeit in einer geraden Linie liegen.

Nehmen wir, was hier jedenfalls verstattet ist, der Einfachheit wegen, den Mittelpunkt des gegebenen Kreises als Anfang der Coordinaten an, so ist in den obigen Formeln $a=0$, $b=0$ zu setzen, wodurch man

$$p_1=\mu^2 p,\quad q_1=\mu^2 q$$

erhält, und hieraus sieht, dass sowohl $p$ und $p_1$, als auch $q$ und $q_1$ stets gleiche Vorzeichen haben.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich nun der folgende Satz vom Kreise:

In Taf. III. Fig. 8. sei um den Mittelpunkt $C$ mit dem beliebigen Halbmesser $CA$ ein Kreis beschrieben. Nun beschreibe man, wenn $\mu$ eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl bezeichnet, mit den Halbmessern $CB=\frac{1}{\mu}.CA$ und $CB_1=\mu.CA$ zwei dem ersten Kreise concentrische Kreise, und ziehe von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte $C$ der drei Kreise eine gerade Linie aus, welche die beiden letzten Kreise in den Punkten $M$ und $M_1$ schneidet; dann haben diese beiden Punkte die Eigenschaft, dass **für jeden ganz beliebigen Punkt** $P$ in dem ersten mit dem Halbmesser $CA$ beschriebenen Kreise

$$PM_1=\mu.PM$$

ist.

Was hier analytisch gefunden ist, mag nun auch synthetisch bewiesen werden. Dies und alle weiteren Betrachtungen überlasse ich dem Leser.

---

**Schreiben des Hrn. Director Strehlke in Danzig an den Herausgeber.**

**I.**

Ich hoffe, dass es Ihnen nicht uninteressant sein wird, wenn ich hier unten in Bezug auf das zweite Heft des 24. Theiles Ihres

Archivs S. 114. eine Stelle aus der Halley'schen Ausgabe des Apollonius hersetze nebst Copie der Figuren. Die Propositio LIX. pag. 44. Conicorum Lib. V. lautet daselbst: *)

## Propositio LIX.

Si vero sectio fuerit Hyperbola vel Ellipsis ut $AB$, Axe $B\Delta$ et centro $\Gamma$; ac detur punctum quoddam $E$ extra sectionem, nec in Axe, neque in Axe producto; à quo demittatur ad Axem $B\Delta$ normalis $EZ$. Imprimis autem non cadat super Centrum. Dico quod possumus ducere per punctum $E$ rectam, e quâ portio abscissa inter Curvam $AB$ et Axem $B\Delta$ sit Minima.

Fiat $\Gamma H$ ad $HZ$ sicut diameter transversa àd latus rectum, et ducatur ad angulos rectos normalis $HM$. Fiat etiam $E\Theta$ ad $\Theta Z$ in eadem ratione diametri transversae ad latus rectum, et agatur recta $K\Lambda$ per punctum $\Theta$ ipsi $Z\Delta$ parallela; et per punctum datum $E$ describatur (per $4^{am}$ secundi) Hyperbola. Asymptotis $MK$, $K\Lambda$; quae quidem occurret sectioni $AB$. Sit autem Hyperbola illa $E\Lambda\Xi$ conveniens sectioni $AB$ in puncto $\Lambda$; et jungatur $E\Lambda$ producaturque utrinque ad $M$, $\Lambda$; occurrat autem Axi ad $\Delta$. Dico rectam $\Lambda\Delta$ Minimam esse. Demittatur normalis $\Lambda N$.

Quoniam vero recta $ME$ (per $8^{vam}$ secundi) aequalis est ipsi $\Lambda\Lambda$; erit quoque $K\Theta$ ipsi $O\Lambda$, ac proinde $OK$ ipsi $\Theta\Lambda$ aequalis, cui etiam aequalis est $NH$. Est autem $Z\Delta$ ad $\Theta\Lambda$ sive $NH$, ut $ZE$ ad $E\Theta$; hoc est ut $Z\Gamma$ ad $\Gamma H$: quare alternando $Z\Delta$ est ad $Z\Gamma$ sicut $NH$ ad $H\Gamma$. Ac componendo in Hyperbola, vel dividendo in Ellipsi erit $\Delta\Gamma$ ad $\Gamma N$ sicut $Z\Gamma$ ad $\Gamma H$; quare per conversionem rationis in Ellipsi, vel dividendo in Hyperbola, $\Gamma N$ erit ad $N\Delta$, sicut $\Gamma H$ ad $HZ$, hoc est, ut diameter transversa ad latus rectum. Verum $\Lambda N$ normalis est in Axem $B\Delta$, adeoque (per $9^{am}$ et $10^{am}$ hujus) $\Lambda\Delta$ Minima est. Pari modo demonstrabitur, si cadat normalis $ZE$ ad alteram partem verticis $B$.

Bezeichnet man $\Gamma Z$ mit $\alpha$, $\Gamma H$ mit $\alpha'$, $EZ$ mit $\beta$, $Z\Theta$ mit $\beta'$, setzt für diameter transversa $2a$, für latus rectum oder den Parameter $2m$, so hat man nach der obigen Construction des Apollonius:

$$\alpha' : \alpha' - \alpha = a : m, \qquad \beta' + \beta : \beta' = a : m;$$

$$\alpha' : \alpha = a : a - \frac{b^2}{a} \qquad \beta : \beta' = a - \frac{b^2}{a} : \frac{b^2}{a}$$

$$= a^2 : c^2; \qquad = c^2 : b^2;$$

$$\alpha' = \frac{a^2}{c^2} \cdot \alpha. \qquad \beta' = \frac{b^2}{c^2} \cdot \beta.$$

---

*) Man sehe Taf. III. Fig. 9. G.

Da bei der gleichseitigen Hyperbel die Rechtecke aus den senkrechten Abständen zweier Punkte der Hyperbel von den Asymptoten derselben einander gleich sind, so hat man für einen beliebigen Punkt dieser Hyperbel, dessen Coordinaten in Bezug auf die Asymptoten $X$ und $Y$ sind:

$$X.Y = \Gamma H.Z\Theta = \frac{a^2.b^2}{c^4}.\alpha.\beta.$$

Dieselbe Gleichung, die hier aus der Construction des Apollonius gefolgert ist, erhält man auch aus der bekannten Gleichung der Normale, die aus einem Punkte, dessen Coordinaten $\alpha$ und $\beta$ sind, an die Ellipse gezogen werden soll.

Die Gleichung der Normale ist bekanntlich:

$$xyc^2 = a^2\alpha y - b^2\beta x$$

oder

$$xy = \frac{a^2\alpha}{c^2}.y - \frac{b^2\beta}{c^2}.x = Ay - Bx. \quad (1)$$

Setzt man nun $y = Y - B$, $x = A - X$, so findet man leicht nach Aufhebung der gleichen Producte auf beiden Seiten der Gleichung (1):

$$Y.X = A.B = \frac{a^2b^2.\alpha\beta}{c^4}.$$

Ich habe das Vorige seinem wesentlichen Inhalte nach bereits in einem Programm im Jahre 1840 bekannt gemacht, wo auch gezeigt ist, dass die metrischen Relationen, an welche Apollonius die Lage des gegebenen Punktes knüpft, über die Anzahl der von ihm an den Kegelschnitt möglichen Normalen darauf hinauskommen, ob der gegebene Punkt auf der Evolute liege oder in dem von der Evolute und den beiden Hauptaxen abgeschlossenen Raume, oder ausserhalb dieses Raumes; aber ich finde diese Angabe schon S. 17. in der Geschichte der Geometrie von Chasles (übersetzt von Sohncke, Halle 1839) und S. 18. die Worte: „Apollonius nimmt eine Hyperbel, deren Elemente er bestimmt, zu Hülfe, um die Fusspunkte der Normalen zu construiren, welche von einem gegebenen Punkte auf den vorgelegten Kegelschnitt gefällt werden.“ Eigentlich ist der in Klügel's Wörterbuch Thl. III. S. 692. enthaltene Ausdruck für $A$ nichts anderes als die Gleichung der Evolute der Hyperbel, wenn man darin die gleichen Factoren weglässt und statt des zweiten $c^2$ unter dem Quadratwurzelzeichen $c^{\frac{4}{3}}$ schreibt, aber es ist wenigstens nicht ausdrücklich erwähnt. — (Ich bitte auch die Aufsätze im Archiv. Thl. VI. Nr. XX. und Thl. XXIV. Nr. XXIV. zu vergleichen. G.)

# XXI.

# Formeln zur Bestimmung des Maximums und Minimums durch Interpolation.

Von

Herrn Doctor *W. Lehmann*

zu Potsdam.

---

## §. 1.

Wenn die Functionen, welche zu den nach einer arithmetischen Reihe erster Ordnung fortschreitenden Argumenten gehören, eine Zeit lang wachsen und dann abnehmen, oder umgekehrt, so fällt die grösste oder kleinste der discreten Functionen nicht immer mit dem bei stetig fortschreitenden Argumenten stattfindenden Maximum oder Minimum zusammen, sondern dasselbe befindet sich oft in dem nächstvorhergehenden oder nächstfolgenden Intervall. Man kann aber, wenn die Intervalle nicht zu klein sind, sowohl das Argument, bei welchem das Maximum oder Minimum stattfindet, als auch dieses Maximum oder Minimum selbst durch ziemlich schnell convergirende Reihen berechnen, welche nach den successiven Differenzen der Functionen und den Potenzen und Producten dieser Differenzen fortschreiten.

## §. 2.

Diese Differenzen sind im Allgemeinen desto kleiner, von einer je höheren Ordnung sie sind; bei hinlänglich kleinen Intervallen kann man sagen, dass von da an, wo die Differenzen höherer Ordnung sich scheinbar vergrössern, diese Vergrösserung nur von den (wegen der Abkürzung der Decimalbrüche) unvermeidlichen Fehlern

der Functionen herrührt; in diesem Falle sagt man, die in horizontaler Linie liegenden Differenzen bilden eine semi-convergente Reihe und es lässt sich in jedem Fall leicht bestimmen, ob die Intervalle klein genug angenommen sind, um die Differenzen von da an, wo sie wachsen, bei der Interpolation ganz vernachlässigen zu können; (im verneinenden Falle wäre überhaupt keine zuverlässige Interpolation möglich, und man müsste, um eine solche ausführen zu können, die Intervalle verkleinern).

$$\begin{array}{ccccc}
P & & & & \\
 & \Delta P & & & \\
Q & & \Delta^2 Q & & \\
 & \Delta Q & & \Delta^3 Q & \\
R & & \Delta^2 R & & \Delta^4 R \\
 & \Delta R & & \Delta^3 R & \\
S & & \Delta^2 S & & \\
 & \Delta S & & & \\
T & & & &
\end{array}$$

Die Functionen $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ in obigem Schema mögen nämlich zu Argumenten gehören, welche nach arithmetischer Reihe erster Ordnung fortschreiten, und welche wir mit Arg. $P$, Arg. $Q$, Arg. $R$, Arg. $S$, Arg. $T$, bezeichnen wollen; die zwischenliegenden ersten Differenzen seien $\Delta P$, $\Delta Q$, $\Delta R$, $\Delta S$, die dazwischenliegenden zweiten Differenzen aber $\Delta^2 Q$, $\Delta^2 R$, $\Delta^2 S$, die dazwischenliegenden dritten Differenzen $\Delta^3 Q$ und $\Delta^3 R$, und die dazwischenliegende vierte Differenz $\Delta^4 R$; bei der unbestimmten Erweiterung dieses Schemas mögen $\Delta Q$, $\Delta^3 Q$, $\Delta^5 Q \ldots.$ in einerlei horizontaler Linie mit dem von $Q$ bis $R$ reichenden Intervall, $\Delta^2 R$, $\Delta^4 R$, $\Delta^6 R \ldots.$ in einerlei horizontaler Linie mit $R$, dagegen $\Delta R$, $\Delta^3 R$, $\Delta^5 R \ldots.$ in einerlei horizontaler Linie mit dem von $R$ bis $S$ reichenden Intervall liegen. Bezeichnen wir nun das zwischen Arg. $Q$ und Arg. $R$ liegende Argument, für welches die Function durch Interpolation bestimmt werden soll, mit Arg. $R - t$ (Arg. $R$ − Arg. $Q$), so ist die zu diesem Argument gehörige Function (zufolge der in Encke's Jahrbuch für 1830. Seite 279 hergeleiteten Formel III*) =

$$R - t\Delta Q + \frac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2 R - \frac{t(t-1)(t+1)}{1.2.3}\Delta^3 Q + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{1.2.3.4}\Delta^4 R$$

$$-\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)}{1.2.3.4.5}\Delta^5 Q + \ldots.$$

Bezeichnet man aber das zwischen Arg. $R$ und Arg. $S$ liegende Argument, für welches interpolirt werden soll, mit Arg. $R + t$ (Arg. $S$ − Arg. $R$), so ist die zu diesem Argument gehörige Function (zufolge der a. a. O. hergeleiteten Formel IV*) =

$$R+t\Delta R+\frac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2R+\frac{t(t-1)(t+1)}{1.2.3}\Delta^3R+\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{1.2.3.4}\Delta^4R$$
$$+\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)}{1.2.3.4.5}\Delta^5R+\ldots.$$

Man kann man aber beide Fälle in Einen vereinigen, wenn man im ersteren Fall $t$ negativ setzt, und wenn man die discreten Functionen als solche betrachtet, welche nach einer arithmetischen Reihe unendlicher Ordnung fortschreiten; dadurch erhält man die zu dem Argument Arg. $R+t$(Arg. $S$ — Arg. $R$) (wo $t$ innerhalb der Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt) gehörige Function $=$

$$R+t\Delta Q+\frac{t(t+1)}{1.2}\Delta^2R+\frac{t(t+1)(t-1)}{1.2.3}\Delta^3Q+\frac{t(t+1)(t-1)(t+2)}{1.2.3.4}\Delta^4R$$
$$+\frac{t(t+1)(t-1)(t+2)(t-2)}{1.2.3.4.5}\Delta^5Q+\ldots.=R+t\Delta R+\frac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2R$$
$$+\frac{t(t-1)(t+1)}{1.2.3}\Delta^3R+\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{1.2.3.4}\Delta^4R$$
$$+\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)}{1.2.3.4.5}\Delta^5R+\ldots.$$

Da diese beiden Ausdrücke bei einer arithmetischen Reihe unendlicher Ordnung einerlei Werth geben müssen, so kann man zwischen ihnen das arithmetische Mittel nehmen, und also, indem man

$$\Delta'=\frac{\Delta Q+\Delta R}{2},\quad \Delta''=\Delta^2R,\quad \Delta'''=\frac{\Delta^3Q+\Delta^3R}{2},\quad \Delta^{IV}=\Delta^4R,\ldots.,$$

$$A'=t,\ A''=t^2,\ A'''=t(t^2-1^2),\ A^{IV}=t^2(t^2-1^2),$$
$$A^{V}=t(t^2-1^2)(t^2-2^2),\ A^{VI}=t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2),$$
$$A^{VII}=t(t^2-1^2)(t^2-2^2)(t^2-3^2),\ A^{VIII}=t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)(t^2-3^2),\ldots.$$

macht, die zu dem Argument Arg. $R+t$(Arg. $S$ — Arg. $R$) gehörige Function $=$

$$R+A'\Delta'+\frac{A''}{1.2}\Delta''+\frac{A'''}{1.2.3}\Delta'''+\ldots. \qquad (1)$$

setzen. Nun findet man $\frac{\partial A^{(2n-1)}}{\partial t}$ dadurch, dass man den 1sten, 2ten, 3ten .... Factor der Formel

$$A^{(2n-1)}=t(t^2-1^2)(t^2-2^2)(t^2-3^2)\ldots.(t^2-(n-1)^2) \qquad (2)$$

differentiirt, und die dadurch gefundenen Differentiale, nachdem man

16*

jedes derselben mit den nicht differentiirten Factoren der Formel (2) multiplicirt hat, addirt. Dividiren wir den dadurch sich ergebenden Ausdruck für $\frac{\partial A^{(2n-1)}}{\partial t}$ durch den aus der Gleichung (2) sich ergebenden Ausdruck für $4A^{(2n-1)}t$, und subtrahiren wir den Quotienten von $\frac{1}{4t^2}$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{4t^2}-\frac{\partial A^{(2n-1)}}{4A^{(2n-1)}t\partial t}=\frac{2}{2^2-4t^2}+\frac{2}{4^2-4t^2}+\frac{2}{6^2-4t^2}+\dots+\frac{2}{(2n-2)^2-4t^2}.$$

Multiplicirt man jede Seite dieser Gleichung mit $4t^2$, so entsteht:

$$\left.\begin{aligned}1-\frac{\partial \lg.\sqrt{A^{(2n-1)^2}}\,{}^{*)}}{\partial \lg.\sqrt{t^2}}=\frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}+\frac{2}{\left(\frac{2}{t}\right)^2-1}+\frac{2}{\left(\frac{3}{t}\right)^2-1}\\+\dots+\frac{2}{\left(\frac{n-1}{t}\right)^2-1}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Da nun der absolute Werth von $t$ nicht $>\frac{1}{2}$ angenommen wird, so ist $\left(\frac{1}{t}\right)^2$ nicht $<4$, also wohl $\left(\frac{2}{t}\right)^2$ als $\left(\frac{3}{t}\right)^2,\dots>4$; also besteht die rechte Seite der Gleichung (3) aus lauter positiven Gliedern. Hieraus folgt, dass

$$1-\frac{\partial \lg.\sqrt{A^{(2n-1)^2}}}{\partial \lg.\sqrt{t^2}}$$

positiv und desto grösser ist, je grösser der absolute Werth von $t$. Lässt man also den absoluten Werth von $t$ von 0 bis $\frac{1}{2}$ wachsen, so wächst

$$1-\frac{\partial \lg.\sqrt{A^{(2n-1)^2}}}{\partial \lg.\sqrt{t^2}}$$

ohne Schwankung von 0 bis

$$\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{4^2-1}+\frac{2}{6^2-1}+\dots+\frac{2}{(2n-2)^2-1}.\quad(4)$$

Nun lässt sich leicht beweisen, dass die Grösse $(4)=\frac{2n-2}{2n-1}$ ist. Gesetzt, dieser Satz sei für irgend einen Werth von $n$ richtig,

---

*) Diese Schreibart war hier unvermeidlich, weil Logarithmen nicht zu negativen Grössen gehören dürfen; $\sqrt{A^{(2n-1)^2}}$ bedeutet den **absoluten** Werth von $A^{(2n-1)}$, so wie $\sqrt{t^2}$ den absoluten Werth von $t$.

so beweisen wir, dass er auch für das um 1 grössere $n$ richtig sei. Ist

$$\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{4^2-1}+\frac{2}{6^2-1}+\ldots+\frac{2}{(2n-2)^2-1}=\frac{2n-2}{2n-1},$$

so ist

$$\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{4^2-1}+\frac{2}{6^2-1}+\ldots+\frac{2}{(2n)^2-1}=\frac{2n-2}{2n-1}+\frac{2}{(2n)^2-1}$$

$$=\frac{2}{2n-1}\left(n-1+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{2}{2n-1}\cdot\frac{2n^2-n}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}.$$

Nun aber ist jener Satz für $n=1$ und $n=2$ richtig; folglich ist er auch für jedes grössere $n$ richtig. Folglich ändert sich, während $\sqrt{t^2}$ von 0 bis $\frac{1}{2}$ wächst, $\frac{\partial \lg.\sqrt{A^{(2n-1)2}}}{\partial \lg.\sqrt{t^2}}$ ohne Schwankung von 1 bis $1-\frac{2n-2}{2n-1}$, d. i. von 1 bis $\frac{1}{2n-1}$, ist also stets positiv, also absolut genommen $A^{(2n-1)}$ desto grösser, je grösser $t$. Auf ähnliche Art erhalten wir

$$2-\frac{\partial \lg.\sqrt{A^{(2n)2}}}{\partial \lg.\sqrt{t^2}}=\frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}+\frac{2}{\left(\frac{2}{t}\right)^2-1}+\frac{2}{\left(\frac{3}{t}\right)^2-1}+\ldots+\frac{2}{\left(\frac{n-1}{t}\right)^2-1};$$

also ändert sich, während $\sqrt{t^2}$ von 0 bis $\frac{1}{2}$ wächst, $\frac{\partial \lg.\sqrt{A^{(2n)2}}}{\partial \lg.\sqrt{t^2}}$ ohne Schwankung von 2 bis $2-\frac{2n-2}{2n-1}$, d. i. von 2 bis $\frac{2n}{2n-1}$, ist also ebenfalls stets positiv, also absolut genommen $A^{(2n)}$ desto grösser, je grösser $t$. Folglich ist, absolut genommen, jeder der Coefficienten $A', A'', A''', \ldots$ desto grösser, je grösser $t$, also am grössten, wenn $t=\pm\frac{1}{2}$. Folglich ist der absolut grösste Einfluss von $\Delta', \Delta'', \Delta''', \ldots$ auf die Interpolation resp. $=$

$$\tfrac{1}{2}\Delta',\ \frac{1}{2.4}\Delta'',\ \frac{2^2-1}{2.4.6}\Delta''',\ \frac{2^2-1}{2.4.6.8}\Delta^{IV},\ \frac{(2^2-1)(4^2-1)}{2.4.6.8.10}\Delta^{V},$$

$$\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{2.4.6.8.10.12}\Delta^{VI},\ \frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{2.4.6.8.10.12.14}\Delta^{VII},$$

$$\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{2.4.6.8.10.12.14.16}\Delta^{VIII},\ \text{u. s. w.},$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}\Delta',\ \frac{1}{2.4}\Delta'',\ \frac{1.3}{2.4.6}\Delta''',\ \frac{1.3}{2.4.6.8}\Delta^{IV},\ \frac{1.3.3.5}{2.4.6.8.10}\Delta^{V},$$

$$\frac{1.3.3.5}{2.4.6.8.10.12}\Delta^{VI},\ \frac{1.3.3.5.5.7}{2.4.6.8.10.12.14}\Delta^{VII},$$

$$\frac{1.3.3.5.5.7}{2.4.6.8.10.12.14.16}\Delta^{VIII},\ldots.,$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}\Delta',\ \tfrac{1}{8}\Delta'',\ \frac{1.1}{2.8}\Delta''',\ \frac{1.1}{8.16}\Delta^{IV},\ \frac{1.1.3}{2.8.16}\Delta^{V},\ \frac{1.1.3}{8.16.24}\Delta^{VI},$$

$$\frac{1.1.3.5}{2.8.16.24}\Delta^{VII},\ \frac{1.1.3.5}{8.16.24.32}\Delta^{VIII},\ldots.,$$

also der grösste Einfluss von $\Delta^{(2n-1)}=\frac{1.1.3.5\ldots.(2n-3)}{2.8.16.24\ldots.(8n-8)}\Delta^{(2n-1)}$,

und der grösste Einfluss von $\Delta^{(2n)}=\frac{1.1.3.5\ldots.(2n-3)}{8.16.24\ldots.(8n)}\Delta^{(2n)}$.

Folglich können die $2n-1$sten Differenzen vernachlässigt werden, wenn keine derselben grösser ist als das $\frac{2.8.16.24\ldots.(8n-8)}{1.1.3.5\ldots.(2n-3)}$ fache derjenige Grösse $m$, welche in der Bestimmung der zum Argument Arg. $R+t$(Arg. $S-$Arg. $R$) gehörigen Function vernachlässigt wird, und die $2n$ten Differenzen können vernachlässigt werden, wenn keine derselben $>\frac{8.16.24\ldots.(8n)}{1.1.3.5\ldots.(2n-3)}m$. Ist aber keine der $2n-1$sten Differenzen $>\frac{2.8.16.24\ldots.(8n-8)}{1.1.3.5\ldots.(2n-3)}m$, so ist keine der $2n$ten Differenzen $>\frac{4.8.16.24\ldots.(8n-8)}{1.1.3.5\ldots.(2n-3)}m$, also jede der $2n$ten Differenzen kleiner als $\frac{8.16.24\ldots.(8n)}{1.1.3.5\ldots.(2n-3)}m$, keine der $2n+1$sten Differenzen aber grösser als $\frac{8.8.16.24\ldots.(8n-8)}{1.1.3.5\ldots.(2n-3)}m$, also jede der $2n+1$sten Differenzen $<\frac{2.8.16.24\ldots.(8n)}{1.1.3.5\ldots.(2n-1)}m$; und da man diese Schlüsse auf alle folgenden Differenzreihen fortsetzen kann, so können bei der Interpolation die $2n-1$ste **und alle folgenden** Differenzreihen vernachlässigt werden. Und ist keine der $2n$ten Differenzen $>\frac{8.16.24\ldots.(8n)}{1.1.3.5\ldots.(2n-3)}m$, so ist keine der $2n+2$ten Differenzen grösser als $\frac{4.8.16.24\ldots.8n}{1.1.3.5\ldots.(2n-3)}m$, also jede der $2n+2$ten Differenzen kleiner als $\frac{8.16.24\ldots.(8n+8)}{1.1.3.5\ldots.(2n-1)}m$; und da man diese Schlüsse auch auf die $2n+4$te, $2n+6$te, $2n+8$te .... Differenzreihe fortsetzen kann, so hat man nur noch

die $2n+1$ste, $2n+3$te, $2n+5$te.... Differenzreihe zu untersuchen, bis man auf eine Differenzreihe von ungerader Ordnung kommt, welche die vorher nachgewiesene, zur Vernachlässigung dieser und aller folgenden Differenzreihen erforderliche Eigenschaft hat. Es giebt jedoch noch eine Bedingung, welche eine Differenzreihe von gerader Ordnung zu erfüllen hat, um sammt allen folgenden Differenzreihen vernachlässigt werden zu können, und welche ich in meiner Schrift „über die sehr grossen und totalen Sonnenverfinsterungen auf der Erde überhaupt" (als Supplement zum 19ten Bande der Schumacher'schen astronomischen Nachrichten gedruckt) Seite 3. und 4. nachgewiesen habe. Danach ist das Maximum der $2n$ten Differenz, anstatt $\frac{8.16.24....(8n)}{1.1.3.5....(2n-3)}m$, $=\frac{8.16.24....(8n)}{1.3.5....(2n-1)}m$ zu setzen; dies stimmt mit der obigen Beweisführung; denn wenn keine der $2n$ten Differenzen $>\frac{8.16.24....(8n)}{1.3.5....(2n-1)}m$ ist, so ist keine der $2n+1$sten Differenzen $>\frac{2.8.16.24....(8n)}{1.1.3.5....(2n-1)}m$, und folglich können ausser der $2n$ten auch die $2n+1$ste und alle folgenden Differenzreihen vernachlässigt werden. Wir können also überhaupt folgende Bedingungen aufstellen: Wenn keine der $2n-1$sten Differenzen $>2.\frac{8.16.24....(8n-8)}{1.3.5....(2n-3)}m$ ist, so können die $2n-1$ste, $2n$te, $2n+1$ste .... Differenzreihe vernachlässigt werden; und wenn keine der $2n$ten Differenzen $>\frac{8.16.24....(8n)}{1.3.5....(2n-1)}m$ ist, so können die $2n$te, $2n+1$ste, $2n+2$te .... Differenzreihe vernachlässigt werden. Die specielle Anwendung dieses Satzes auf die einzelnen Differenzreihen giebt folgendes: Ist keine der ersten Differenzen $>2m$, so können alle Differenzreihen vernachlässigt werden; die zum Argument Arg. $R+t$(Arg. $S-$Arg. $R$) gehörige Function kann derjenigen Function $R$ gleich gesetzt werden, deren Argument dem Argument Arg. $R+t$(Arg. $S-$Arg. $R$) zunächst liegt und also $t$ innerhalb der Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ einschliesst. Ist keine der 2ten Differenzen $>8m$, so können die 2te, 3te, 4te.... Differenzreihe vernachlässigt werden; man kann einfach interpoliren. In diesen beiden Fällen findet man das Maximum oder Minimum ohne Interpolation; es befindet sich unter den gegebenen discreten Functionen. Ist keine der 3ten Differenzen $>16m$, so kann man bei der Interpolation sich auf die 1sten und 2ten Differenzen beschränken. Ist keine der 4ten Differenzen $>\frac{128}{3}m$, so kann man sich auf die 1sten, 2ten und 3ten Differenzen be-

schränken. Ist keine der 5ten Differenzen $> \frac{256}{3} m$, so kann man sich auf die 1sten bis 4ten Differenzen beschränken. Ist keine der 6ten Differenzen $> \frac{1024}{5} m$, so kann man sich auf die 1sten bis 5ten Differenzen beschränken. Ist keine der 7ten Differenzen $> \frac{2048}{5} m$, so kann man sich auf die 6 ersten Differenzreihen beschränken. Ist keine der 8ten Differenzen $> \frac{32768}{35} m$, so kann man sich auf die 7 ersten Differenzreihen beschränken. Ist keine der 9ten Differenzen $> \frac{65536}{35} m$, so kann man sich auf die 8 ersten Differenzreihen beschränken. Ist keine der 10ten Differenzen $> \frac{262144}{63} m$, so kann man sich auf die 9 ersten Differenzreihen beschränken. Ist keine der 11ten Differenzen $> \frac{524288}{63} m$, so kann man sich auf die 10 ersten Differenzreihen beschränken, u. s. w. Diese Brüche

$$2 = 2$$

$$8 = 8$$

$$16 = 16$$

$$\frac{128}{3} = 42,666\ldots.$$

$$\frac{256}{3} = 85,333\ldots.$$

$$\frac{1024}{5} = 204,8$$

$$\frac{2048}{5} = 409,6$$

$$\frac{32768}{35} = 936,2285714285714\ldots.$$

$$\frac{65536}{35} = 1872,4571428571428\ldots.$$

$$\frac{262144}{63} = 4161,015873015873\ldots.$$

$$\frac{524288}{63} = 8322,031746031746\ldots.$$

u. s. w. geben die successiven Quotienten:

$$\frac{8}{2} = 4 = 2 + \frac{2}{1}$$

$$\frac{16}{8} = 2$$

$$\frac{\frac{128}{3}}{16} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{256}{3}}{\frac{128}{3}} = 2$$

$$\frac{\frac{1024}{5}}{\frac{256}{3}} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

$$\frac{\frac{2048}{5}}{\frac{1024}{5}} = 2$$

$$\frac{\frac{32768}{35}}{\frac{2048}{5}} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$$

$$\frac{\frac{65536}{35}}{\frac{32768}{35}} = 2$$

$$\frac{\frac{262144}{63}}{\frac{65536}{35}} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$$

$$\frac{\frac{524288}{63}}{\frac{262144}{63}} = 2$$

u. s. w.

## §. 3.

Eine Ausnahme von der im Anfang des vorigen Paragraphen aufgestellten Regel, dass die Differenzen desto kleiner sind, von

einer je höheren Ordnung sie sind, bildet der Fall, wo die Function sich in der Gegend ihres Maximums oder Minimums befindet; da hier der 1ste Differential-Coefficient $=0$, der 2te aber endlich ist, so sind innerhalb der beiden dem Maximum oder Minimum zunächst liegenden Intervalle die ersten Differenzen von derselben Ordnung der Kleinheit als die zweiten, oder wohl gar die 1ste Differenz sehr klein gegen die 2te oder völlig $=0$, und erst die 3ten Differenzen können von einer geringfügigeren Ordnung sein als die ersten. Diese Unterscheidung ist wesentlich, wenn wir das dem Maximum oder Minimum zugehörige Argument und das Maximum oder Minimum selbst durch convergirende Reihen darstellen wollen. Wir betrachten demnach $\Delta'$ und $\Delta''$ als Grössen der 0ten Ordnung, $\Delta'''$ als eine sehr kleine Grösse der 1sten Ordnung, $\Delta^{IV}$ als eine sehr kleine Grösse der 2ten, $\Delta^{V}$ als eine sehr kleine Grösse der 3ten Ordnung u. s. w.

Das dem Maximum oder Minimum zugehörige Argument wird bestimmt, indem man die Gleichung (1) §. 2. nach $t$ differentiirt. Das Differential

$$\frac{\partial A'}{\partial t}\Delta' + \frac{\partial A''}{\partial t}\cdot\frac{\Delta''}{1.2} + \frac{\partial A'''}{\partial t}\cdot\frac{\Delta'''}{1.2.3} + \ldots.$$

geht für $t=0$ in

$$\Delta' - \frac{1}{2.3}\Delta''' + \frac{1.2}{3.4.5}\Delta^{V} - \frac{1.2.3}{4.5.6.7}\Delta^{VII} + \ldots.$$

über; in jedem Gliede dieses Ausdrucks lassen sich (weil er auch so:

$$\Delta' - \frac{\Delta'''}{2.3} + \frac{\Delta^{V}}{\frac{4.3}{1.2}\cdot 5} - \frac{\Delta^{VII}}{\frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot 7} + \frac{\Delta^{IX}}{\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot 9} - \ldots,$$

oder so:

$$\Delta' - \frac{\Delta'''}{2.3} + \frac{\Delta^{V}}{3.\frac{5.4}{1.2}} - \frac{\Delta^{VII}}{4.\frac{7.6.5}{1.2.3}} + \frac{\Delta^{IX}}{5.\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}} - \ldots.$$

geschrieben werden kann, und

$$\frac{4.3}{1.2},\ \frac{5.4}{1.2},\ \frac{6.5.4}{1.2.3},\ \frac{7.6.5}{1.2.3},\ \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4},\ \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4},\ \ldots.$$

resp. die grössten Binomial-Coefficienten von 4, 5, 6, .... und daher ganze Zahlen sind) alle Factoren des Zählers des Coefficienten gegen Factoren des Nenners heben, und diese Coefficienten lassen sich daher sämmtlich in Gestalt von Brüchen schreiben, deren Zähler $=1$ und deren Nenner ganze Zahlen sind, nämlich so:

$$\Delta' - \frac{\Delta'''}{6} + \frac{\Delta^{V}}{30} - \frac{\Delta^{VII}}{140} + \frac{\Delta^{IX}}{630} - \frac{\Delta^{XI}}{2772} + \frac{\Delta^{XIII}}{12012} - \ldots, \quad (5)$$

wobei die Nenner recurrirend nach dem Gesetz

$$\frac{6}{1} = 2 \cdot \frac{3}{1}, \quad \frac{30}{6} = 2 \cdot \frac{5}{2}, \quad \frac{140}{30} = 2 \cdot \frac{7}{3}, \quad \frac{630}{140} = 2 \cdot \frac{9}{4}, \quad \frac{2772}{630} = 2 \cdot \frac{11}{5},$$

$$\frac{12012}{2772} = 2 \cdot \frac{13}{6}, \ldots$$

oder noch leichter nach dem Gesetz

$$\frac{6}{1} = \frac{6}{1}, \quad \frac{30}{6} = \frac{5}{1}, \quad \frac{140}{30} = \frac{14}{3}, \quad \frac{630}{140} = \frac{9}{2}, \quad \frac{2772}{630} = \frac{22}{5}, \quad \frac{12012}{2772} = \frac{13}{3}, \ldots$$

berechnet werden können. Findet sich nun die Formel (5) (nach Substitution der numerischen Werthe für $\Delta'$, $\Delta'''$, $\Delta^{V}, \ldots$) $=0$, so hat man das Maximum oder Minimum ohne Interpolation gefunden, es befindet sich unter den gegebenen discreten Functionen; dagegen kann man aus dem etwaigen positiven oder negativen Werth der Grösse (5) ersehen, ob das Maximum (resp. Minimum) sich im vorhergehenden oder im nachfolgenden Intervall befindet. Da aber die in §. 2. gegebene Anleitung zur Beurtheilung, welche Differenzreihen jedesmal vernachlässigt werden können, den absoluten Werth von $t$ nicht $> \frac{1}{2}$ voraussetzt, so wird man, auch nachdem man schon bestimmt hat, in welchem Intervall das Maximum oder Minimum sich befindet, untersuchen müssen, ob der erste Differential-Coefficient der Function bei der der Mitte dieses Intervalls entsprechenden Function positiv oder negativ sei. Dazu ist in der angeführten Schrift über Sonnenverfinsterungen Seite 4. Anleitung gegeben; man wird, wenn man die daselbst aufgestellten Formeln vollständig entwickelt, finden, dass der dem Argument $\frac{\text{Arg.}\,R + \text{Arg.}\,S}{2}$ entsprechende Differential-Coefficient $=$

$$\Delta R - \frac{1^2}{2.3.4}\Delta^3 R + \frac{1^2.3^2}{2.4.5.6.8}\Delta^5 R - \frac{1^2.3^2.5^2}{2.4.6.7.8.10.12}\Delta^7 R + \ldots$$

$$= \Delta R - \frac{1}{3.8}\Delta^3 R + \frac{1.3}{5.8.16}\Delta^5 R - \frac{1.3.5}{7.8.16.24}\Delta^7 R + \ldots = \Delta R - \frac{1}{24}\Delta^3 R$$

$$+ \frac{3}{640}\Delta^5 R - \frac{5}{7168}\Delta^7 R + \ldots$$

ist, wo die Coefficienten recurrirend durch die Gleichungen

$$\frac{\frac{1}{24}}{1} = \frac{1.1}{3.8}, \quad \frac{\frac{3}{640}}{\frac{1}{24}} = \frac{3.3}{5.16}, \quad \frac{\frac{5}{7168}}{\frac{3}{640}} = \frac{5.5}{7.24}, \ldots$$

berechnet werden können. Auf diese Art wird es allemal möglich sein, 2 gegebene Werthe $Q$ und $R$ der Function so, dass die in Bezug auf $t$ genommenen ersten Differential-Coefficienten der Function, welche den Argumenten $\frac{\text{Arg.}\,Q+\text{Arg.}\,R}{2}$ und Arg. $R$ entsprechen, entgegegesetzte Zeichen haben, oder 2 gegebene Werthe $R$ und $S$, so, dass die zu Arg. $R$ und $\frac{\text{Arg.}\,R+\text{Arg.}\,S}{2}$ gehörigen Differential-Coefficienten entgegengesetzte Zeichen haben, zu bestimmen, — wodurch von selbst $t$ innerhalb der Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ eingeschlossen wird. Sollte sich der zu $\frac{\text{Arg.}\,Q+\text{Arg.}\,R}{2}$ oder $\frac{\text{Arg.}\,R+\text{Arg.}\,S}{2}$ gehörige Differential-Coefficient genau $=0$ finden, also das Maximum oder Minimum sich genau in der Mitte eines Intervalls befinden, so bestimmt man dieses Maximum oder Minimum selbst am leichtesten vermittelst der in der angeführten Schrift Seite 3. aufgestellten Interpolations-Methode; hiernach ist das Maximum oder Minimum, welches sich in dem von $R$ bis $S$ reichenden Intervall befindet, =

$$\frac{R+S}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\Delta^2R+\Delta^2S}{2}+\frac{1.3}{8.16}\cdot\frac{\Delta^4R+\Delta^4S}{2}$$

$$-\frac{1.3.5}{8.16.24}\cdot\frac{\Delta^6R+\Delta^6S}{2}+\ldots.$$

Wir haben also nur noch den allgemeinen Fall zu untersuchen, wo das dem Maximum oder Minimum zugehörige $t$ weder $=-\frac{1}{2}$ noch $=0$ noch $=+\frac{1}{2}$ ist, sondern entweder zwischen $-\frac{1}{2}$ und $0$ oder zwischen $0$ und $+\frac{1}{2}$ liegt.

Zur Bestimmung des Arguments des Maximums (Minimums) hat man

$$\frac{\partial A'}{\partial t}\,\Delta'+\frac{\partial A''}{\partial t}\cdot\frac{\Delta''}{1.2}+\frac{\partial A'''}{\partial t}\cdot\frac{\Delta'''}{1.2.3}+\ldots.=0 \qquad (6)$$

zu setzen; in diese Gleichung hat man die aus den Gleichungen

$A' \;=t,$

$A'' \;=t^2,$

$A''' \;=t(t^2-1^2)=t^3-1^2t,$

$A^{IV}=t^2(t^2-1^2)=t^4-1^2t^2,$

$A^{V} \;=t(t^2-1^2)(t^2-2^2)=t^5-(1^2+2^2)t^3+1^2.2^2.t,$

$$A^{VI} = t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2) = t^6-(1^2+2^2)t^4+1^2.2^2.t^2,$$

$$A^{VII} = t(t^2-1^2)(t^2-2^2)(t^2-3^2) = t^7-(1^2+2^2+3^2)t^5$$
$$+(1^2.2^2+1^2.3^2+2^2.3^2)t^3-1^2.2^2.3^2.t,$$

$$A^{VIII} = t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)(t^2-3^2) = t^8-(1^2+2^2+3^2)t^6$$
$$+(1^2.2^2+1^2.3^2+2^2.3^2)t^4-1^2.2^2.3^2t^2,$$

$$A^{IX} = t(t^2-1^2)(t^2-2^2)(t^2-3^2)(t^2-4^2) = t^9-(1^2+2^2+3^2+4^2)t^7$$
$$+(1^2.2^2+1^2.3^2+1^2.4^2+2^2.3^2+2^2.4^2+3^2.4^2)t^5$$
$$-(1^2.2^2.3^2+1^2.2^2.4^2+1^2.3^2.4^2+2^2.3^2.4^2)t^3+1^2.2^2.3^2.4^2t,$$

$$A^{X} = t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)(t^2-3^2)(t^2-4^2) = t^{10}-(1^2+2^2+3^2+4^2)t^8$$
$$+(1^2.2^2+1^2.3^2+1^2.4^2+2^2.3^2+2^2.4^2+3^2.4^2)t^6$$
$$-(1^2.2^2.3^2+1^2.2^2.4^2+1^2.3^2.4^2+2^2.3^2.4^2)t^4+1^2.2^2.3^2.4^2t^2,$$

u. s. w. fliessenden Werthe

$$\frac{\partial A'}{\partial t} = 1,$$

$$\frac{\partial A''}{1.2\partial t} = t,$$

$$\frac{\partial A'''}{1.2.3\partial t} = \frac{t^2}{1.2} - \frac{1^2}{2.3},$$

$$\frac{\partial A^{IV}}{1.2.3.4\partial t} = \frac{t^3}{1.2.3} - \frac{1^2}{1.3.4}t,$$

$$\frac{\partial A^{V}}{1.2.3.4.5\partial t} = \frac{t^4}{1.2.3.4} - \frac{1^2+2^2}{1.2.4.5}t^2 + \frac{1^2.2^2}{2.3.4.5},$$

$$\frac{\partial A^{VI}}{1.2.3.4.5.6\partial t} = \frac{t^5}{1.2.3.4.5} - \frac{1^2+2^2}{1.2.3.5.6}t^3 + \frac{1^2.2^2}{1.3.4.5.6}t,$$

$$\frac{\partial A^{VII}}{1.2.3.4.5.6.7\partial t} = \frac{t^6}{1.2.3.4.5.6} - \frac{1^2+2^2+3^2}{1.2.3.4.6.7}t^4$$
$$+\frac{1^2.2^2+1^2.3^2+2^2.3^2}{1.2.4.5.6.7}t^2 - \frac{1^2.2^2.3^2}{2.3.4.5.6.7},$$

$$\frac{\partial A^{VIII}}{1.2.3.4.5.6.7.8\partial t} = \frac{t^7}{1.2.3.4.5.6.7} - \frac{1^2+2^2+3^2}{1.2.3.4.5.7.8}t^5$$
$$+\frac{1^2.2^2+1^2.3^2+2^2.3^2}{1.2.3.5.6.7.8}t^3 - \frac{1^2.2^2.3^2}{1.3.4.5.6.7.8}t,$$

$$\frac{\partial A^{IX}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9\partial t}=\frac{t^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}-\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1.2.3.4.5.6.8.9}t^6$$

$$+\frac{1^2.2^2+1^2.3^2+1^2.4^2+2^2.3^2+2^2.4^2+3^2.4^2}{1.2.3.4.6.7.8.9}t^4$$

$$-\frac{1^2.2^2.3^2+1^2.2^2.4^2+1^2.3^2.4^2+2^2.3^2.4^2}{1.2.4.5.6.7.8.9}t^2$$

$$+\frac{1^2.2^2.3^2.4^2}{2.3.4.5.6.7.8.9},$$

$$\frac{\partial A^{X}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10\partial t}=\frac{t^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}-\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1.2.3.4.5.6.7.9.10}t^7$$

$$+\frac{1^2.2^2+1^2.3^2+1^2.4^2+2^2.3^2+2^2.4^2+3^2.4^2}{1.2.3.4.5.7.8.9.10}t^5$$

$$-\frac{1^2.2^2.3^2+1^2.2^2.4^2+1^2.3^2.4^2+2^2.3^2.4^2}{1.2.3.5.6.7.8.9.10}t^3$$

$$+\frac{1^2.2^2.3^2.4^2}{1.3.4.5.6.7.8.9.10}t,$$

u. s. w., d. i.

$$\frac{\partial A'}{\partial t}=1,$$

$$\frac{\partial A''}{1.2\partial t}=t,$$

$$\frac{\partial A'''}{1.2.3\partial t}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}t^2,$$

$$\frac{\partial A^{IV}}{1.2.3.4\partial t}=-\frac{1}{12}t+\frac{1}{6}t^3,$$

$$\frac{\partial A^{V}}{1.2.3.4.5\partial t}=\frac{1}{30}-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{24}t^4,$$

$$\frac{\partial A^{VI}}{1.2.3.4.5.6\partial t}=\frac{1}{90}t-\frac{1}{36}t^3+\frac{1}{120}t^5,$$

$$\frac{\partial A^{VII}}{1.2.3.4.5.6.7\partial t}=-\frac{1}{140}+\frac{7}{240}t^2-\frac{1}{72}t^4+\frac{1}{720}t^6,$$

$$\frac{\partial A^{VIII}}{1.2.3.4.5.6.7.8\partial t}=-\frac{1}{560}t+\frac{7}{1440}t^3-\frac{1}{480}t^5+\frac{1}{5040}t^7,$$

$$\frac{\partial A^{IX}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9\partial t}=\frac{1}{630}-\frac{41}{6048}t^2+\frac{13}{3456}t^4-\frac{1}{1728}t^6+\frac{1}{40320}t^8,$$

$$\frac{\partial A^{X}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10\partial t}=\frac{1}{3150}t-\frac{41}{45360}t^{3}+\frac{13}{28800}t^{5}-\frac{1}{15120}t^{7}$$

$$+\frac{1}{362880}t^{9},$$

u. s. w., zu substituiren. Nun ist klar, dass der Gleichung (6) immer noch ein Genüge geschieht, wenn alle Differenzen $\varDelta'$, $\varDelta''$, $\varDelta'''$,.... mit einem gemeinschaftlichen (positiven oder negativen) Factor multiplicirt werden, dass es also bei der Bestimmung des dem Maximum oder Minimum zugehörigen $t$ nicht auf die absoluten Werthe der successiven Differenzen, sondern nur auf ihre Verhältnisse ankommt. Wir vereinfachen daher unsere Entwickelung, wenn wir einstweilen eine der ersten Differenzen $\varDelta'$, $\varDelta''$, $\varDelta'''$,....$=1$ setzen. Und da $\varDelta'$ in der Gegend des Maximums (Minimums) sehr klein oder auch völlig $=0$ ist, so wird man nicht $\varDelta'$, sondern $\varDelta''=1$ zu setzen haben.

Da, wie gesagt, $\varDelta'$ und $\varDelta''$ in der Gegend des Maximums (Minimums) von gleicher Ordnung der Kleinheit angenommen werden, so darf man bei der Auflösung der Gleichung (6) in der 1sten Annäherung $\varDelta''$ eben so wenig vernachlässigen als $\varDelta'$; vernachlässigt man aber $\varDelta'''$, $\varDelta^{IV}$,.... und setzt man $\varDelta''=1$, so folgt aus der Gleichung (6)

$$t=-\varDelta'.$$

Da auf der linken Seite der Gleichung (6) das 1ste Glied $=\varDelta'$ und das 2te $=t$ ist, so findet man

$$t=-\varDelta'-\frac{\partial A'''}{\partial t}\cdot\frac{\varDelta'''}{1.2.3}-\frac{\partial A^{IV}}{\partial t}\cdot\frac{\varDelta^{IV}}{1.2.3.4}-\cdots$$

Diese Gleichung ist durch allmälige Annäherung aufzulösen, wobei auf der rechten Seite dieser Gleichung der 1ste Näherungswerth von $t=-\varDelta'$ zu setzen ist. Die 2te Annäherung giebt also

$$t=-\varDelta'+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\varDelta'^{2}\right)\varDelta''';$$

$$t^{2}=\varDelta'^{2}-\left(\frac{1}{3}\varDelta'-\varDelta'^{3}\right)\varDelta''';$$

$$\frac{\partial A'''}{1.2.3\partial t}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\varDelta'^{2}-\left(\frac{1}{6}\varDelta'-\frac{1}{2}\varDelta'^{3}\right)\varDelta''';$$

$$\frac{\partial A^{IV}}{1.2.3.4\partial t}=\frac{1}{12}\varDelta'-\frac{1}{6}\varDelta'^{3};$$

also die 3te Annäherung:

$$t = -\Delta' + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\Delta'^2\right)\Delta''' + \left(\frac{1}{6}\Delta' - \frac{1}{2}\Delta'^3\right)\Delta'''^2$$
$$-\left(\frac{1}{12}\Delta' - \frac{1}{6}\Delta'^3\right)\Delta^{IV};$$

$$t^2 = \Delta'^2 - \left(\frac{1}{3}\Delta' - \Delta'^3\right)\Delta''' + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{2}\Delta'^2 + \frac{5}{4}\Delta'^4\right)\Delta'''^2$$
$$+\left(\frac{1}{6}\Delta'^2 - \frac{1}{3}\Delta'^4\right)\Delta^{IV};$$

$$t^3 = -\Delta'^3 - \left(\frac{1}{2}\Delta'^2 - \frac{3}{2}\Delta'^4\right)\Delta''';$$

$$\frac{\partial A'''}{1.2.3\partial t} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\Delta'^2 - \left(\frac{1}{6}\Delta' - \frac{1}{2}\Delta'^3\right)\Delta'''$$
$$+\left(\frac{1}{72} - \frac{1}{4}\Delta'^2 + \frac{5}{8}\Delta'^4\right)\Delta'''^2 + \left(\frac{1}{12}\Delta'^2 - \frac{1}{6}\Delta'^4\right)\Delta^{IV}$$

$$\frac{\partial A^{IV}}{1.2.3.4\partial t} = \frac{1}{12}\Delta' - \frac{1}{6}\Delta'^3 - \left(\frac{1}{72} + \frac{1}{24}\Delta'^2 - \frac{1}{4}\Delta'^4\right)\Delta''';$$

$$\frac{\partial A^{V}}{1.2.3.4.5\partial t} = \frac{1}{30} - \frac{1}{8}\Delta'^2 + \frac{1}{24}\Delta'^4;$$

also die 4te Annäherung:

$$\left.\begin{aligned} t' = &-\Delta' + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\Delta'^2\right)\Delta''' + \left(\frac{1}{6}\Delta' - \frac{1}{2}\Delta'^3\right)\Delta'''^2 \\ &-\left(\frac{1}{12}\Delta' - \frac{1}{6}\Delta'^3\right)\Delta^{IV} - \left(\frac{1}{72} - \frac{1}{4}\Delta'^2 + \frac{5}{8}\Delta'^4\right)\Delta'''^3 \\ &+\left(\frac{1}{72} - \frac{1}{24}\Delta'^2 - \frac{1}{12}\Delta'^4\right)\Delta'''\Delta^{IV} - \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{8}\Delta'^2 + \frac{1}{24}\Delta'^4\right)\Delta^{V}. \end{aligned}\right\} (7)$$

Es ist aus dem Gange der bisherigen Entwickelung zu ermesse wie man, wenn es in irgend einem Anwendungsfalle verlangt würd bei der Bestimmung von $t$ auch noch $\Delta^{VI}$, $\Delta^{VII}$,.... berücksichtig könnte; in der Astronomie kommt ein solcher Fall nicht leicht vc Dass aber der Werth (7) der das Maximum oder Minimum bestir menden Gleichung

$$\Delta' - \frac{1}{6}\Delta''' + \frac{1}{30}\Delta^{V} - \ldots + \left(1 - \frac{1}{12}\Delta^{IV} + \ldots\right)t$$
$$+\left(\frac{1}{2}\Delta''' - \frac{1}{8}\Delta^{V} + \ldots\right)t^2 + \left(\frac{1}{6}\Delta^{IV} - \ldots\right)t^3 + \left(\frac{1}{24}\Delta^{V} - \ldots\right)t^4 + \ldots =$$

Taf. III.

Fig. 4.

A
F
H
E
N
α
C



Genüge thue, erhellt folgendermaassen:

$$(1-\tfrac{1}{12}\Delta^{IV}+\ldots)t=-\Delta'+\left(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}\Delta'^2\right)\Delta'''+\left(\tfrac{1}{6}\Delta'-\tfrac{1}{2}\Delta'^3\right)\Delta'''^2$$
$$+\tfrac{1}{6}\Delta'^3\Delta^{IV}-\left(\tfrac{1}{72}-\tfrac{1}{4}\Delta'^2+\tfrac{5}{8}\Delta'^4\right)\Delta'''^3-\tfrac{1}{12}\Delta'^4\Delta'''\Delta^{IV}$$
$$-\left(\tfrac{1}{30}-\tfrac{1}{8}\Delta'^2+\tfrac{1}{24}\Delta'^4\right)\Delta^{V}+\ldots;$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\Delta'''-\tfrac{1}{8}\Delta^{V}+\ldots\right)t^2=\tfrac{1}{2}\Delta'^2\Delta'''-\left(\tfrac{1}{6}\Delta'-\tfrac{1}{2}\Delta'^3\right)\Delta'''^2$$
$$+\left(\tfrac{1}{72}-\tfrac{1}{4}\Delta'^2+\tfrac{5}{8}\Delta'^4\right)\Delta'''^3+\left(\tfrac{1}{12}\Delta'^2-\tfrac{1}{6}\Delta'^4\right)\Delta'''\Delta^{IV}-\tfrac{1}{8}\Delta'^2\Delta^{V}+\ldots;$$

$$\left(\tfrac{1}{6}\Delta^{IV}-\ldots\right)t^3=-\tfrac{1}{6}\Delta'^3\Delta^{IV}-\left(\tfrac{1}{12}\Delta'^2-\tfrac{1}{4}\Delta'^4\right)\Delta'''\Delta^{IV}+\ldots;$$

$$\left(\tfrac{1}{24}\Delta^{V}-\ldots\right)t^4=\tfrac{1}{24}\Delta'^4\Delta^{V}+\ldots;$$

u. s. w., also

$$\Delta'-\tfrac{1}{6}\Delta'''+\tfrac{1}{30}\Delta^{V}-\ldots+(1-\tfrac{1}{12}\Delta^{IV}+\ldots)t+\left(\tfrac{1}{2}\Delta'''-\tfrac{1}{8}\Delta^{V}+\ldots\right)t^2$$
$$+\left(\tfrac{1}{6}\Delta^{IV}-\ldots\right)t^3+\left(\tfrac{1}{24}\Delta^{V}-\ldots\right)t^4+\ldots=0.$$

Nunmehr hat man in der Gleichung (7) jede der Differenzen $\Delta'$, $\Delta'''$, $\Delta^{IV}$, $\Delta^{V}$,.... durch $\Delta''$ zu dividiren, um diese Gleichung für den Fall brauchbar zu machen, wo $\Delta''$ nicht $=1$ gesetzt wird. Dadurch wird

$$\left.\begin{aligned}t=&-\frac{\Delta'}{\Delta''}+\left(\frac{1}{6}-\frac{\Delta'^2}{2\Delta''^2}\right)\frac{\Delta'''}{\Delta''}+\left(\frac{\Delta'}{6\Delta''}-\frac{\Delta'^3}{2\Delta''^3}\right)\frac{\Delta'''^2}{\Delta''^2}\\&-\left(\frac{\Delta'}{12\Delta''}-\frac{\Delta'^3}{6\Delta''^3}\right)\frac{\Delta^{IV}}{\Delta''}-\left(\frac{1}{72}-\frac{\Delta'^2}{4\Delta''^2}+\frac{5\Delta'^4}{8\Delta''^4}\right)\frac{\Delta'''^3}{\Delta''^3}\\&+\left(\frac{1}{72}-\frac{\Delta'^2}{24\Delta''^2}-\frac{\Delta'^4}{12\Delta''^4}\right)\frac{\Delta'''\Delta^{IV}}{\Delta''^2}-\left(\frac{1}{30}-\frac{\Delta'^2}{8\Delta''^2}+\frac{\Delta'^4}{24\Delta''^4}\right)\frac{\Delta^{V}}{\Delta''}+\ldots\end{aligned}\right\}(8)$$

Diesen Werth hat man, um das Maximum oder Minimum selbst zu bestimmen, statt $t$ in die Formel (1) §. 2. zu setzen; man erhält:

$$A' = -\frac{\Delta'}{\Delta''} + \left(\frac{1}{6} - \frac{\Delta'^2}{2\Delta''^2}\right)\frac{\Delta'''}{\Delta''} + \left(\frac{\Delta'}{6\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{2\Delta''^3}\right)\frac{\Delta'''^2}{\Delta''^2} - \left(\frac{\Delta'}{12\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{6\Delta''^3}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{72} - \frac{\Delta'^2}{4\Delta''^2} + \frac{5\Delta'^4}{8\Delta''^4}\right)\frac{\Delta'''^3}{\Delta''^3} + \left(\frac{1}{72} - \frac{\Delta'^2}{24\Delta''^2} - \frac{\Delta'^4}{12\Delta''^4}\right)\frac{\Delta''''}{\Delta}$$

$$-\left(\frac{1}{30} - \frac{\Delta'^2}{8\Delta''^2} + \frac{\Delta'^4}{24\Delta''^4}\right)\frac{\Delta^V}{\Delta''};$$

$$\frac{A''}{1.2} = \frac{\Delta'^2}{2\Delta''^2} - \left(\frac{\Delta'}{6\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{2\Delta''^3}\right)\frac{\Delta'''}{\Delta''} + \left(\frac{1}{72} - \frac{\Delta'^2}{4\Delta''^2} + \frac{5\Delta'^4}{8\Delta''^4}\right)\frac{\Delta'''^2}{\Delta''^2}$$

$$+\left(\frac{\Delta'^2}{12\Delta''^2} - \frac{\Delta'^4}{6\Delta''^4}\right)\frac{\Delta^{IV}}{\Delta''} + \left(\frac{\Delta'}{24\Delta''} - \frac{5\Delta'^3}{12\Delta''^3} + \frac{7\Delta'^5}{8\Delta''^5}\right)$$

$$-\left(\frac{\Delta'}{36\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{9\Delta''^3}\right)\frac{\Delta'''\Delta^{IV}}{\Delta''^2} + \left(\frac{\Delta'}{30\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{8\Delta''^3} + \frac{\Delta'^5}{24\Delta''^5}\right)$$

$$\frac{1}{3}t = -\frac{\Delta'}{3\Delta''} + \left(\frac{1}{18} - \frac{\Delta'^2}{6\Delta''^2}\right)\frac{\Delta'''}{\Delta''} + \left(\frac{\Delta'}{18\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{6\Delta''^3}\right)\frac{\Delta'''^2}{\Delta''^2}$$

$$-\left(\frac{\Delta'}{36\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{18\Delta''^3}\right)$$

$$\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\Delta'^2}{6\Delta''^2} - \left(\frac{\Delta'}{6\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{2\Delta''^3}\right)\frac{\Delta'''}{\Delta''} + \left(\frac{1}{72} - \frac{\Delta'^2}{4\Delta''^2} + \frac{5\Delta'^4}{8\Delta''^4}\right)$$

$$+\left(\frac{\Delta'^2}{12\Delta''^2} - \frac{\Delta'^4}{6\Delta''^4}\right)$$

$$\frac{A'''}{1.2.3} = \frac{\Delta'}{6\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{6\Delta''^3} - \left(\frac{1}{36} - \frac{\Delta'^2}{6\Delta''^2} + \frac{\Delta'^4}{4\Delta''^4}\right)\frac{\Delta'''}{\Delta''}$$

$$-\left(\frac{\Delta'}{24\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{4\Delta''^3} + \frac{3\Delta'^5}{8\Delta''^5}\right)\frac{\Delta'''^2}{\Delta''^2} + \left(\frac{\Delta'}{72\Delta''} - \frac{5\Delta'^3}{72\Delta''^3} + \frac{\Delta'^5}{12\Delta''^5}\right)$$

$$\frac{1}{12}t^2 = \frac{\Delta'^2}{12\Delta''^2} - \left(\frac{\Delta'}{36\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{12\Delta''^3}\right)\frac{\Delta'''}{\Delta''};$$

$$\frac{A^{IV}}{1.2.3.4} = -\frac{\Delta'^2}{24\Delta''^2} + \frac{\Delta'^4}{24\Delta''^4} + \left(\frac{\Delta'}{72\Delta''} - \frac{5\Delta'^3}{72\Delta''^3} + \frac{\Delta'^5}{12\Delta''^5}\right)\frac{\Delta'''}{\Delta''};$$

$$\frac{1}{2}t^2 - 2 = -2 + \frac{\Delta'^2}{2\Delta''^2};$$

$$\frac{A^V}{1.2.3.4.5} = -\frac{\Delta'}{30\Delta''} + \frac{\Delta'^3}{24\Delta''^3} - \frac{\Delta'^5}{120\Delta''^5},$$

folglich Formel (1) gleich

$$\begin{rcases}\ldots - \frac{\Delta'^2}{2\Delta''} + \left(\frac{\Delta'}{6\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{6\Delta''^3}\right)\Delta''' - \left(\frac{1}{72} - \frac{\Delta'^2}{12\Delta''^2} + \frac{\Delta'^4}{8\Delta''^4}\right)\frac{\Delta'''^2}{\Delta''} \\ - \left(\frac{\Delta'^2}{24\Delta''^2} - \frac{\Delta'^4}{24\Delta''^4}\right)\Delta^{IV} - \left(\frac{\Delta'}{72\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{12\Delta''^3} + \frac{\Delta'^5}{8\Delta''^5}\right)\frac{\Delta'''^3}{\Delta''^2} \\ + \left(\frac{\Delta'}{72\Delta''} - \frac{5\Delta'^3}{72\Delta''^3} + \frac{\Delta'^5}{12\Delta''^5}\right)\frac{\Delta'''\Delta^{IV}}{\Delta''} \\ - \left(\frac{\Delta'}{30\Delta''} - \frac{\Delta'^3}{24\Delta''^3} + \frac{\Delta'^5}{120\Delta''^5}\right)\Delta^{V} + \ldots\end{rcases} (9)$$

## §. 4.

Die Ausdrücke (8) und (9) des vorigen Paragraphen sind noch so einzurichten, dass sie sich bequem vermittelst Additions- und Subtractions-Logarithmen berechnen lassen. Man mache

$$\Delta_{,} = \Delta' + \frac{1}{12}\Delta'''\left(\frac{15\Delta'^2}{\Delta''^2} - 1\right),$$

$$\Delta_{,,,} = \frac{\Delta'''}{6}\left(1 - \frac{3\Delta'^2}{\Delta''^2}\right)\left(1 + \frac{\Delta_{,}\Delta'''}{\Delta''^2}\right),$$

$$\Delta^{(3)} = \frac{\Delta'''}{6}\left(1 - \frac{3\Delta'^2}{\Delta''^2}\left(1 + \frac{2\Delta'^2}{\Delta''^2}\right)\right),$$

$$\Delta_{IV} = \frac{\Delta^{IV}}{12} \cdot \frac{\Delta'\left(1 - \frac{2\Delta'^2}{\Delta''^2}\right) - \Delta^{(3)}}{\Delta''},$$

$$\Delta_{V} = \frac{\Delta^{V}}{30}\left(1 - \frac{15\Delta'^2}{4\Delta''^2}\left(1 - \frac{\Delta'^2}{3\Delta''^2}\right)\right),$$

$$\Delta_{(3)} = \Delta''' - \frac{\Delta'\Delta^{IV}}{4\Delta''} - \frac{\Delta^{V}}{5}\left(1 - \frac{\Delta'^2}{4\Delta''^2}\right),$$

$$\Delta^{(1)} = \Delta'\left(1 - \frac{\Delta_{(3)}}{3\Delta'}\left(1 - \frac{\Delta'^2}{\Delta''^2}\right)\right);$$

so geht die Gleichung (8) in

$$t = -\frac{\Delta' - \Delta_{,,,} + \Delta_{IV} + \Delta_{V}}{\Delta''},$$

und die Gleichung (9) in

$$\text{Maximum} =$$

$$R - \frac{\Delta'\left(\Delta^{(1)} - \frac{\Delta'''}{3\Delta''} \cdot \frac{\Delta^{IV}}{12}\left(1 - \frac{2\Delta'^2}{\Delta''^2}\right)\left(1 - \frac{3\Delta'^2}{\Delta''^2}\right)\right) + \left(\frac{\Delta'''}{6}\right)^2\left(1 - \frac{3\Delta'^2}{\Delta''^2}\right)^2\left(1 + \frac{\Delta'\Delta'''}{\Delta''^2}\right)}{2\Delta''}$$

über. Die äussere Form der Rechnung wird an einigen Beispielen klar werden, worin keine aufzuschreibende Ziffer ausgelassen ist.

Gesetzt, man wolle den Augenblick der nördlichsten Abweichung des Mondes im März 1855 und diese nördlichste Abweichung selbst finden, so giebt das Encke'sche Jahrbuch:

| Mittlere Berliner Zeit. | Decl. ☽ $=\delta$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| März 23. $12^h$ | $+25^0.25'.43'',4$ | | | | |
| | | $+59'.20'',2$ | | | |
| 24. 0 | $+26.25.\ 3,6$ | | $-20'.3'',0$ | | |
| | | $+39.17,2$ | | $-3'',2$ | |
| 12 | $+27.\ 4.20,8$ | | $-20.\ 6,2$ | | $+16''$,[illegible] |
| | | $+19.11,0$ | | $+13,1$ | |
| 25. 0 | $+27.23.31,8$ | | $-19.53,1$ | | $+16$,[illegible] |
| | | $-\ 0.42,1$ | | $+29,3$ | |
| 12 | $+27.22.49,7$ | | $-19.23,8$ | | $+13,6$ |
| | | $-20.\ 5,9$ | | $+42,9$ | |
| 26. 0 | $+27.\ 2.43,8$ | | $-18.40,9$ | | |
| | | $-38.46,8$ | | | |
| 12 | $+26.23.57,0$ | | | | |

Hier liegt der grösste Einfluss der 4ten Differenz $16'',3$ auf die Interpolation, nämlich $\frac{3}{128}\cdot 16'',3=0'',38203125$, innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler; die 4ten, 5ten, 6ten.... Differenzen können daher vernachlässigt werden. Für den Mittag des 25. März ist, wenn man einen halben Tag als Einheit der Zeit $t$ annimmt, $\frac{\partial\delta}{\partial t}=\frac{19'.11'',0-0'.42'',1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{13'',1+29'',3}{2}=+9'.10'',91666....$; für März 25. $6^h$ aber ist $\frac{\partial\delta}{\partial t}=-0'.42'',1-\frac{1}{24}.29'',3$, also negativ. Folglich liegt das Maximum der Abweichung zwischen 0 und $6^h$ des 25. März. Man hat also $R=+27^0.23'.31'',8$ zu setzen,

| | | |
|---|---|---|
| $\varDelta'$ aber $=+554'',45$ | $\lg.\varDelta''=3,07668_n$ | $\lg.5=0,69897$ |
| $\varDelta''=-1193'',1$ | $\lg.\varDelta'=2,74386$ | $\lg.\frac{15\varDelta'^2}{\varDelta''^2}=0,51045$ |
| $\varDelta'''=+\ 21'',2$ | $\lg.\frac{\varDelta''}{\varDelta'}=0,33282_n$ | $\lg.\frac{\varDelta'''}{12}=0,24716$ |
| $\frac{1}{6}\varDelta'''=+3'',53333....$ | $\lg.15=1,17609$ | $\lg.\left(\frac{15\varDelta'^2}{\varDelta''^2}-1\right)=0,35011$ |
| | $\lg.\frac{\varDelta''^2}{\varDelta'^2}=0,66564$ | $\lg.\varDelta'=2,74386$ |
| | | $\lg.(\varDelta,-\varDelta')=0,59727$ |

| | | |
|---|---|---|
| $(\Delta''^2) = 6{,}15336$ | $\lg.\frac{\Delta'''}{6} = 0{,}54818$ | $\lg.(\Delta' - \Delta_{,,,}) = 2{,}74288$ |
| $\Delta_{,} = 2{,}74694$ | $\lg.(1 + \frac{\Delta'\Delta'''}{\Delta''^2}) = 0{,}00360$ | $\lg.\frac{\Delta''}{12} = 1{,}99750_n$ |
| $\Delta''' = 1{,}32634$ | $\lg.\frac{1}{1 - \frac{15\Delta'^2}{5\Delta''^2}} = 0{,}45329$ | $\lg.(12t) = 0{,}74538$ |
| $\frac{\Delta''^2}{\Delta_{,}\Delta'''} = 2{,}08008$ | $\lg.\Delta' = 2{,}74386$ | $12t = +5^h{,}563875,$ |
| | $\lg.\Delta_{,,,} = 0{,}09849$ | |

so Maximum der Abweichung März 25. $5^h.33'.49'',95$. Vernachlässigt man ausser $\Delta^{IV}$ und $\Delta^{V}$ auch $\Delta'''^2$ und $\Delta'''^3$, so fällt die Addition von $\lg.(1 + \frac{\Delta_{,}\Delta'''}{\Delta''^2}) = 0{,}00360$ weg, und man erhält $\lg.\Delta_{,,,} = 0{,}09489$, also $\lg.(\Delta' - \Delta_{,,,}) = 2{,}74289$, also $\lg.(12t) = 0{,}74539$, also $12t = 5^h{,}5640$, also Maximum der Abweichung März 25. $5^h.33'.50'',4$, von dem vorher gefundenen ganz unmerklich verschieden.

| | |
|---|---|
| $3\Delta' = +1663'',35$ | $\lg.\frac{\Delta''}{\Delta'} = 0.33282_n$ |
| $\lg.(3\Delta') = 3{,}22098$ | $\lg.\Delta'' = 3.07668_n$ |
| $\lg.\frac{1}{1 - \frac{\Delta'^2}{\Delta''^2}} = 0{,}10565$ | $\lg.\Delta''' = 1.32634$ |
| $\lg.\Delta''' = 1{,}32634$ | $\lg.\frac{\Delta''^2}{\Delta'\Delta'''} = 2.08316$ |
| $\lg.\frac{3\Delta'}{\Delta_{(3)}(1 - \frac{\Delta'^2}{\Delta''^2})} = 2{,}00029$ | |

| | |
|---|---|
| $\frac{\Delta'''^2}{36} = 1{,}09636$ | $\lg.(2(\text{Max.} - R)\Delta'') = 5{,}48336_n$ |
| $(1 + \frac{\Delta'\Delta'''}{\Delta''^2}) = 0{,}00357$ | $\lg.(2\Delta'') = 3{,}37771_n$ |
| $\frac{1}{(1 - \frac{3\Delta'^2}{\Delta''^2})^2} = 0{,}90658$ | $\lg.(\text{Max.} - R) = 2{,}10565$ |
| $(\Delta'\Delta^{(1)}) = 5{,}48336$ | $R = +27°.23'.31'',8$ |
| $\left(\frac{\Delta'''^2}{36}(1 - \frac{3\Delta'^2}{\Delta''^2})^2(1 + \frac{\Delta'\Delta'''}{\Delta''^2})\right) = 0{,}19335$ | $\text{Max.} - R = +\ 2.7{,}5$ |
| | $\text{Maximum} = +27.25.39{,}3.$ |

Man sieht, dass hier die mit $\Delta'''^2$ und $\Delta'''^3$ multiplicirten Glieder

gar keinen merklichen Einfluss auf die Bestimmung des Maximums haben. Zur Controlle können wir für März 25.$5^h$,563875 interpoliren, für welchen Augenblick $t = +\frac{5{,}563875}{12} = +\frac{14837}{32000}$ ist, also die Formel (1) §. 2. in

$$+27^{0}.23'.31'',8+\frac{14837}{32000}\left(554'',45-\frac{14837}{32000}\cdot\frac{1193'',1}{2}-\left(1-\left(\frac{14837}{32000}\right)^{2}\right)\cdot\frac{21'',2}{6}\right)$$

$$=+27^{0}.23'.31'',8+\frac{14837}{32000}\left(\frac{3305'',5}{6}-\frac{14837}{32000}\left(\frac{1193'',1}{2}-\frac{14837}{32000}\cdot\frac{21'',2}{6}\right)\right)$$

$$=+27^{0}.25'.39'',3$$

übergeht.

Wir wollen ein anderes Beispiel berechnen, worin auch die 4ten und 5ten Differenzen zu berücksichtigen sind.

| Function. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −0,2571 | | | | | | |
| | −0,2239 | | | | | |
| −0,4810 | | +0,0145 | | | | |
| | −0,2094 | | +0,0932 | | | |
| −0,6904 | | +0,1077 | | −0,0834 | | |
| | −0,1017 | | +0,0098 | | +0,0402 | |
| −0,7921 | | +0,1175 | | −0,0432 | | −0,0102 |
| | +0,0158 | | −0,0334 | | +0,0300 | |
| −0,7763 | | +0,0841 | | −0,0132 | | |
| | +0,0999 | | −0,0466 | | | |
| −0,6764 | | +0,0375 | | | | |
| | +0,1374 | | | | | |
| −0,5390 | | | | | | |

Wir setzen voraus, dass in den gegebenen numerischen Werthen der Function die Zehntausendtheile zuverlässig und daher beibehalten, die Hunderttausendtheile aber vernachlässigt sind. Dann können die fünften Differenzen nicht vernachlässigt werden, weil $\frac{3}{256}\cdot 0{,}0300 = 0{,}00035 15625$, also $> 0{,}00005$ ist. Dagegen kann die 6te Differenz unbeachtet bleiben, weil $\frac{5}{1024}\cdot 0{,}0102 = 0{,}0000498046875$, also $< 0{,}00005$. Der Function $-0{,}7921$ gehört der 1ste Differential-Coefficient

$$\frac{-0{,}1017+0{,}0158}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{0{,}0098-0{,}0334}{2}+\frac{1}{30}\cdot\frac{0{,}0402+0{,}0300}{2}$$

$$=-0{,}04039\ldots.$$

zu, der Mitte des nachfolgenden Intervalls aber

$$+0{,}0158+\frac{0{,}0334}{24}+3.\frac{0{,}0300}{640};$$

folglich liegt das Maximum zwischen $-0{,}7921$ und der Mitte des folgenden Intervalls. Man hat also $R=-0{,}7921$ zu setzen,

$\varDelta'$ aber $=-0{,}04295$
$\varDelta'' \quad =+0{,}1175$
$\varDelta''' \quad =-0{,}0118$
$\varDelta^{IV} \quad =-0{,}0432$
$\varDelta^{V} \quad =+0{,}0351$

$3\varDelta' \quad =-0{,}12885$
$\frac{1}{6}\varDelta''' \quad =-0{,}001966..$
$\frac{1}{4}\varDelta^{IV} \quad =-0{,}0108$
$\frac{1}{12}\varDelta^{IV}=-0{,}0036$
$\frac{1}{5}\varDelta^{V} \quad =+0{,}00702$
$\frac{1}{30}\varDelta^{V} \quad =+0{,}00117$

$\lg.\varDelta'' \quad =9{,}07004.$*)
$\lg.\varDelta' \quad =8{,}63296.n$
$\lg.\frac{\varDelta''}{\varDelta'} \quad =0{,}43708_n$
$\lg.15 \quad =1{,}17609$
$\lg.\frac{\varDelta''^2}{\varDelta'^2}=0{,}87416$

$\lg.5 \quad =0{,}6987$
$\lg.\frac{15\varDelta'^2}{\varDelta''^2} \quad =0{,}30193$
$\lg.\frac{\varDelta'''}{12} \quad =7{,}99270.n$
$\lg.\left(\frac{15\varDelta'^2}{\varDelta''^2}-1\right)=0{,}00180$
$\lg.\varDelta' \quad =8{,}63296.n$
$\lg.(\varDelta,-\varDelta') \quad =7{,}99450.n$

$\lg.(\varDelta''^2) \quad =8{,}14008.$
$\lg.\varDelta, \quad =8{,}72283.n$
$\lg.\varDelta''' \quad =8{,}07188.n$
$\lg.\frac{\varDelta''^2}{\varDelta,\varDelta'''}=1{,}34537$

$\lg.\frac{\varDelta'''}{6} \quad =7{,}29373.n$
$\lg.(1+\frac{\varDelta,\varDelta'''}{\varDelta''^2})=0{,}01918$
$\lg.\frac{1}{1-\frac{3\varDelta'^2}{\varDelta''^2}} \quad =0{,}22246$
$\lg.\varDelta' \quad =8{,}63296.n$
$\lg.\varDelta,,, \quad =7{,}09045.n$

$\lg.\frac{\varDelta''^2}{\varDelta'^2} \quad =0{,}87416$
$\lg.3 \quad =0{,}47712$
$\lg.(1+\frac{2\varDelta'^2}{\varDelta''^2}) \quad =0{,}10285$
$\lg.\frac{\varDelta''^2}{3\varDelta'^2(1+\frac{2\varDelta'^2}{\varDelta''^2})}=0{,}29419$
$\lg.\frac{\varDelta'''}{6} \quad =7{,}29373.n$
$\lg.\frac{\varDelta'''}{6\varDelta^{(3)}} \quad =0{,}30799$

$\lg.\varDelta' \quad =8{,}63296.n$
$\lg.\frac{1}{1-\frac{2\varDelta'^2}{\varDelta''^2}} \quad =0{,}13502$
$\lg.(\varDelta'(1-\frac{2\varDelta'^2}{\varDelta''^2}))=8{,}49794.n$
$\lg.\varDelta^{(3)} \quad =6{,}98574.n$

*) Der Punkt hinter dem Logarithmus soll allemal $-10$ bedeuten.

$$\lg.\frac{\Delta''^2}{\Delta'^2} = 0{,}87416$$

$$\lg.\frac{1}{1-\frac{\Delta'^2}{3\Delta''^2}} = 0{,}01979$$

$$\lg.\tfrac{1{,}5}{4} = 0{,}57403$$

$$\lg.\frac{4\Delta''^2}{15\Delta'^2\left(1-\frac{\Delta'^2}{3\Delta''^2}\right)} = 0{,}31992$$

$$\lg.\frac{12\Delta_{IV}\Delta''}{\Delta^{IV}} = 8{,}48438.n$$

$$\lg.\Delta'' = 9{,}07004.$$

$$\lg.\frac{\Delta^V}{30} = 7{,}06819.$$

$$\lg.\frac{\Delta^V}{30\Delta_V} = 0{,}28292$$

$\lg.\Delta_V =$ [illegible]

$$\lg.(-\Delta'+\Delta_{,,,}) = 8{,}62033.$$

$$\lg.(\Delta_{IV}+\Delta_V) = 7{,}18880.$$

$$\lg.(t\Delta'') = 8{,}60395.$$

$$\lg.\Delta'' = 9{,}07004.$$

$$\lg.t = 9{,}53391.$$

$$t = +0{,}341908$$

$$\lg.\frac{\Delta'''}{4} = 8{,}03342.n$$

$$\lg.\Delta'' = 9{,}07004.$$

$$\lg.\Delta''' = 8{,}07188.n$$

$$\lg.\frac{\Delta'\Delta^{IV}}{4\Delta''} = 7{,}59634.$$

---

$$\lg.\frac{\Delta^V}{5} = 7{,}84634.$$

$$\lg.\left(\Delta''' - \frac{\Delta'\Delta^{IV}}{4\Delta''}\right) = 8{,}19722.n$$

$$\lg.\left(\frac{\Delta^V}{5}\left(1-\frac{\Delta'^2}{4\Delta''^2}\right)\right) = 7{,}83158.$$

$$\lg.(3\Delta') = 9{,}11009.n$$

$$\lg.\frac{1}{1-\frac{\Delta'^2}{\Delta''^2}} = 0{,}06229$$

$$\lg.\Delta_{(3)} = 8{,}35283.n$$

$$\lg.\frac{3\Delta'}{\Delta_{(3)}\left(1-\frac{\Delta'^2}{\Delta''^2}\right)} = 0{,}81955$$

$$\lg.\frac{\Delta''}{\Delta'} = 0{,}43708.n$$

$$\lg.\Delta'' = 9{,}07004.n$$

$$\lg.\Delta''' = 8{,}07188.n$$

$$\lg.\frac{\Delta''^2}{\Delta'\Delta'''} = 1{,}43524$$

$$\lg.\frac{\Delta'''}{3} = 7{,}59476.n$$

$$\lg.\frac{\Delta^{IV}}{12} = 7{,}55630.n$$

$$\lg.\Delta'' = 9{,}07004.$$

$$\lg.\frac{1}{1-\frac{2\Delta'^2}{\Delta''^2}} = 0{,}13502$$

$$\lg.\frac{1}{1-\frac{3\Delta'^2}{\Delta''^2}} = 0{,}22246$$

$$\lg.\frac{\Delta'''^2}{36} = 4{,}58746.$$

$$\lg.(1+\frac{\Delta'\Delta'''}{\Delta''^2}) = 0{,}01565$$

$$\lg.\frac{1}{(1-\frac{3\Delta'^2}{\Delta''^2})^2} = 0{,}44492$$

$$\lg.\Delta^{(1)} = 8{,}56161.n$$

$$\lg.\left(\frac{\Delta'''\Delta^{IV}}{36\Delta''}(1-\frac{5\Delta'^2}{\Delta''^2}+\frac{6\Delta'^4}{\Delta''^4})\right) = 5{,}72354.$$

$$\lg.\Delta' = 8{,}63296.n$$

$$\lg.(\Delta^{(1)}-\frac{\Delta'''\Delta^{IV}}{36\Delta''}(1-\frac{5\Delta'^2}{\Delta''^2}+\frac{6\Delta'^4}{\Delta''^4})) = 8{,}56224.n$$

$$\lg.(\Delta'\Delta^{(1)}-\frac{\Delta'\Delta'''\Delta^{IV}}{36\Delta''}(1-\frac{5\Delta'^2}{\Delta''^2}+\frac{6\Delta'^4}{\Delta''^4})) = 7{,}19520.$$

$$\lg.\left(\frac{\Delta'''^2}{36}(1-\frac{3\Delta'^2}{\Delta''^2})^2(1+\frac{\Delta'\Delta'''}{\Delta''^2})\right) = 4{,}15819.$$

$$\lg.(2(\text{Max.}-R)\Delta'') = 7{,}19560.n$$

$$\lg.(2\Delta'') = 9{,}37107.$$

$$\lg.(\text{Max.}-R) = 7{,}82453.n$$

$$R = -0{,}7921$$

$$\text{Max.}-R = -0{,}0067$$

$$\text{Maximum} = -0{,}7988.$$

Zur Controlle können wir für $t=+0{,}341908$ interpoliren, und finden dadurch:

$$\text{Maximum} = -0{,}7921-0{,}341908\times 0{,}04295+\frac{0{,}341908^2}{2}.0{,}1175+\frac{0{,}341908\,(1-0{,}341908^2)}{6}.0{,}0118$$

$$+\frac{0{,}341908^2(1-0{,}341908^2)}{24}.0{,}0432+\frac{0{,}341908(1-0{,}341908^2)(4-0{,}341908^2)}{120}.0{,}0351=-0{,}7988.$$

# XXII.

## Ueber die Bestimmung der Directrixen *), Brennpunkte und Charakteristiken oder Determinanten der Linien des zweiten Grades im Allgemeinen.

Von

dem Herausgeber.

---

Wenn man aus den Coefficienten der allgemeinen Gleichung

$$1) \quad . \quad . \quad . \quad ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

einer Linie des zweiten Grades die verschiedenen Elemente dieser Linie ohne jedwede weitere Transformation der Coordinaten bestimmen will, so ist es nach meiner Meinung oft von besonderem Nutzen, zunächst auf die Bestimmung der Directrixen, Brennpunkte und Charakteristiken oder Determinanten dieser Linie des zweiten Grades zurückzugehen, weil sich daraus, wie ich im Archiv. Thl. XVII. Nr. II. S. 54. gezeigt habe, dann auch alle übrigen Elemente mit der grössten Leichtigkeit ableiten lassen. Zur Bestimmung der Directrixen, Brennpunkte und Charakteristiken oder Determinanten der Linien des zweiten Grades unmittelbar aus den Coefficienten ihrer allgemeinen Gleichungen, die weitere Transformationen der Coordinaten gar nicht in Anspruch nimmt, will ich daher in dieser Abhandlung Formeln entwickeln. Wenn ich nun aber jetzt noch hinzusetze, dass ich dabei nur

---

*) Manche Schriftsteller schreiben in vornehmerer Weise „Directricen". Da aber das Wort Directrice schon auch eine andere, sehr unmathematische Bedeutung hat, die unwillkührlich an Töchterschulen, Putzwaaren-Geschäfte u. dgl. erinnert, so möchte ich doch den lateinischen Ausdruck vorziehen.

rechtwinklige Coordinatensysteme zu Grunde legen will, da jedes schiefwinklige System immer leicht durch die bekannten Formeln der Coordinatenverwandlung auf ein rechtwinkliges zurückgeführt werden kann, so widerspreche ich damit freilich streng genommen meinem nur so eben erst ausgesprochenen Princip, jedwede Coordinatenverwandlung unnöthig zu machen, bemerke aber, dass es für keinen Mathematiker die geringste Schwierigkeit haben kann, die aus dem in Rede stehenden Uebergange von einem schiefwinkligen zu einem rechtwinkligen Systeme resultirenden Ausdrücke der Coefficienten der Gleichung der Linie des zweiten Grades in meine im Folgenden entwickelten, allerdings nur für rechtwinklige Systeme geltenden Formeln einzuführen, weshalb ich es grösserer Einfachheit und Kürze wegen habe vorziehen zu müssen geglaubt, die sämmtlichen folgenden Entwickelungen auf rechtwinklige Systeme zu beschränken, was in der That auch für den von mir beabsichtigten Zweck völlig hinreicht. Dass solche allgemeine Formeln, wie die im Folgenden entwickelten, z. B. für die Aufgabe von der Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte, aber auch noch in vielen anderen Fällen, von Wichtigkeit sind, erhellet leicht.

Die gesuchte Gleichung der Directrixen *) unserer Linie des zweiten Grades sei im Allgemeinen

$$2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Ax+By+C=0,$$

und $X$, $Y$ seien im Allgemeinen die Coordinaten der Brennpunkte. Die Charakteristik oder Determinante (m. s. a. a. O. S. 55.) sei $n$. Weil nun nach den Lehren der analytischen Geometrie, unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Quadrate der Entfernungen des Punktes $(xy)$ in der Linie des zweiten Grades von dem Brennpunkte und von der Directrix respective

$$(x-X)^2+(y-Y)^2 \quad \text{und} \quad \frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}$$

sind, so hat man (m. s. a. a. O. S. 55.) die Gleichung

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=n^2\,\frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2},$$

welche mittelst leichter Rechnung auf die Form

*) Man weiss schon, dass es in zwei Fällen zwei giebt.

$$3)\left\{\begin{array}{r}\{(n^2-1)A^2-B^2\}x^2+\{(n^2-1)B^2-A^2\}y^2+2n^2ABxy\\ +2\{n^2AC+(A^2+B^2)X\}x\\ +2\{n^2BC+(A^2+B^2)Y\}y\\ +n^2C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)\end{array}\right\}=0$$

gebracht wird, und nun mit der Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

identisch sein muss, woraus die sechs folgenden Gleichungen:

$$4)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{r}(n^2-1)A^2-B^2=a,\\ (n^2-1)B^2-A^2=b,\\ n^2AB=c,\\ n^2AC+(A^2+B^2)X=d,\\ n^2BC+(A^2+B^2)Y=e,\\ n^2C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)=f\end{array}\right.$$

resultiren, welche die sechs unbekannten Grössen $n$, $A$, $B$, $C$, $X$, $Y$ enthalten, und zu deren Bestimmung also gerade hinreichen.

Diese sechs Gleichungen zerfallen in die zwei folgenden Gruppen:

$$5)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{r}(n^2-1)A^2-B^2=a,\\ (n^2-1)B^2-A^2=b,\\ n^2AB=c\end{array}\right.$$

und

$$6)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{r}n^2AC+(A^2+B^2)X=d,\\ n^2BC+(A^2+B^2)Y=e,\\ n^2C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)=f;\end{array}\right.$$

von denen die erste nur die unbekannten Grössen $n$, $A$, $B$, die zweite nur die unbekannten Grössen $C$, $X$, $Y$ enthält, und die also eine abgesonderte Betrachtung und Auflösung gestatten.

Wir beschäftigen uns daher zunächst mit der ersten Gruppe 5). Aus den beiden ersten Gleichungen dieser Gruppe erhält man:

$$7)\quad\ldots\quad A^2=\frac{(n^2-1)a+b}{(n^2-1)^2-1},\quad B^2=\frac{(n^2-1)b+a}{(n^2-1)^2-1};$$

und weil nun vermöge der dritten Gleichung in 5)

$$n^4A^2B^2=c^2$$

ist, so ergiebt sich zur Bestimmung der Charakteristik oder Determinante $n$ unmittelbar die Gleichung:

$$8) \quad \ldots \quad n^4\frac{\{(n^2-1)a+b\}\{(n^2-1)b+a\}}{\{(n^2-1)^2-1\}^2}=c^2.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$9) \quad \ldots\ldots \quad u=n^2-1, \quad n^2=u+1;$$

so wird die Gleichung 8):

$$\frac{(u+1)^2}{(u^2-1)^2}(au+b)(bu+a)=c^2$$

oder, wie man leicht findet:

$$10) \quad \ldots \quad (au+b)(bu+a)=c^2(u-1)^2,$$

und, wenn man diese Gleichung gehörig nach den Potenzen von $u$ ordnet:

$$11) \quad . \; . \quad (c^2-ab)u^2-(a^2+b^2+2c^2)u+(c^2-ab)=0.$$

Löst man diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man:

$$12) \quad u=n^2-1=\frac{a^2+b^2+2c^2\pm(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)},$$

und hieraus:

$$13) \quad . \quad n^2=\frac{\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\pm(a+b)\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}.$$

Nach 7) und 9) ist nun ferner

$$A^2=\frac{au+b}{u^2-1}, \quad B^2=\frac{bu+a}{u^2-1}.$$

Nach 12) ist aber, wie man leicht findet:

$$au+b=\frac{a+b}{2(c^2-ab)}\{a(a-b)+2c^2\pm a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\},$$

$$bu+a=\frac{a+b}{2(c^2-ab)}\{b(b-a)+2c^2\pm b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\};$$

und nach 11) ist

$$u^2 = \frac{a^2+b^2+2c^2}{c^2-ab}u-1,$$

also

$$u^2-1 = \frac{a^2+b^2+2c^2}{c^2-ab}u-2,$$

folglich nach 12):

$$u^2-1 = \frac{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2} \pm (a^2+b^2+2c^2)\}}{2(c^2-ab)^2}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$14) \left\{ \begin{array}{l} A^2 = \dfrac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}} \cdot \dfrac{a(a-b)+2c^2 \pm a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2} \pm (a^2+b^2+2c^2)}, \\ B^2 = \dfrac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}} \cdot \dfrac{b(b-a)+2c^2 \pm b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2} \pm (a^2+b^2+2c^2)}. \end{array} \right.$$

Dass in den Formeln 13) und 14) für $n^2$, $A^2$, $B^2$ die oberen und unteren Zeichen auf einander zu beziehen sind, versteht sich nach der vorhergehenden Entwickelung ganz von selbst.

Bei der weiteren Discussion der Gleichungen 13) und 14) müssen wir die drei Fälle, wenn

$$c^2-ab=0, \quad c^2-ab>0, \quad c^2-ab<0$$

ist, von einander unterscheiden, wozu uns schon der Umstand nöthigt, dass die Grösse $c^2-ab$ in dem Nenner des obigen allgemeinen Ausdrucks 13) von $n^2$ vorkommt, für diesen Ausdruck also ein keine bestimmte Bedeutung habendes Symbol erscheint, wenn die Grösse $c^2-ab$ verschwindet.

I. $c^2-ab=0$.

In diesem Falle sind wir genöthigt, zu der Fundamentalgleichung 11), aus welcher $u$ bestimmt wurde, zurückzukehren. Für $c^2-ab=0$ wird diese Gleichung:

$$15) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a^2+b^2+2c^2)u=0.$$

Wäre nun $a^2+b^2+2c^2=0$, so wäre $a=0$, $b=0$, $c=0$, und die Gleichung 1) nähme die Gestalt

$$2dx+2ey+f=0$$

an, repräsentirte also eine gerade Linie, ein Fall, den wir daher

von unserer ferneren Betrachtung ausschliessen werden, und demzufolge anzunehmen berechtigt sind, dass die Grösse $a^2+b^2+2c^2$ nicht verschwindet, so dass also aus der Gleichung 15)

$$u=0,\quad n^2-1=0,\quad n^2=1,\quad n=1$$

folgt, weil $n$ seiner Natur nach nur positiv genommen werden kann. Da also die Charakteristik oder Determinante $n=1$ ist, so ist (m. s. den Aufsatz Thl. XVII. Nr. II.) in diesem Falle die Linie des zweiten Grades eine Parabel, was auch bekanntlich mit der Bedingung $c^2-ab=0$ im besten Einklange steht.

Für $A^2$ und $B^2$ liefern in diesem Falle die Formeln

$$A^2=\frac{au+b}{n^2-1},\quad B^2=\frac{bu+a}{n^2-1}$$

die Werthe

$$A^2=-b,\quad B^2=-a.$$

Wegen der Gleichung $c^2-ab=0$ oder $ab=c^2$ haben $a$ und $b$ gleiche Vorzeichen und sind also entweder beide positiv oder beide negativ. Wären aber $a$ und $b$ beide positiv, so würde man die Gleichung 1) unter der Form

$$-ax^2-by^2-2cxy-2dx-2ey-f=0$$

schreiben können, wo nun $-a$ und $-b$ beide negativ wären. Man wird also immer zu der Annahme berechtigt sein, dass in der Gleichung 1) die Coefficienten $a$ und $b$ beide negativ, also $-a$ und $-b$ beide positiv sind, so dass folglich die Gleichungen

$$A^2=-b,\quad B^2=-a$$

für $A$ und $B$ stets reelle Werthe liefern. Mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander kann man nun entweder

$$A=\pm\sqrt{-b},\quad B=\pm\sqrt{-a}$$

oder

$$A=\pm\sqrt{-b},\quad B=\mp\sqrt{-a}$$

setzen. Ob man aber das Erste oder das Zweite thun muss, ist leicht mittelst der Gleichung

$$n^2AB=c \text{ oder hier } AB=c$$

zu entscheiden, indem man nämlich in Folge dieser Gleichung offenbar

$$A=\pm\sqrt{-b},\quad B=\pm\sqrt{-a}$$

oder

$$A = \pm\sqrt{-b},\quad B = \mp\sqrt{-a}$$

setzen muss, jenachdem $c$ positiv oder negativ ist. Verschwände $c$ und vermöge der Gleichung $c^2 - ab = 0$ also auch eine der Grössen $a$ und $b$, so wäre jede Wahl der Zeichen verstattet, da die Gleichung $AB = c$ in diesem Falle immer erfüllt ist.

Bevor wir zu der Discussion der Fälle

$$c^2 - ab > 0,\quad c^2 - ab < 0$$

übergehen, wollen wir zuerst die folgenden vier Fragen beantworten.

1. Wann ist

$$(a-b)^2 + 4c^2 \gtreqless (a+b)^2?$$

Die Beantwortung dieser Frage liefert die folgende analytische Darstellung:

$$(a-b)^2 + 4c^2 \gtreqless (a+b)^2,$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + 4c^2 \gtreqless a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$4(c^2 - ab) \gtreqless 0,$$

$$c^2 - ab \gtreqless 0.$$

Jenachdem also $c^2 - ab \gtreqless 0$ ist, ist

$$(a-b)^2 + 4c^2 \gtreqless (a+b)^2.$$

2. Wann ist

$$(a^2 + b^2 + 2c^2)^2 \gtreqless (a+b)^2\{(a-b)^2 + 4c^2\}?$$

Die Beantwortung dieser Frage liefert die folgende analytische Darstellung:

$$(a^2+b^2+2c^2)^2 \overset{>}{\underset{<}{=}} (a+b)^2\{(a-b)^2+4c^2\},$$

$$(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)c^2+4c^4 \overset{>}{\underset{<}{=}} (a^2-b^2)^2+4(a+b)^2c^2$$

$$\overset{>}{\underset{<}{=}} (a^2+b^2)^2-4a^2b^2+4(a^2+b^2)c^2+8abc^2,$$

$$4(c^4-2abc^2+a^2b^2) \overset{>}{\underset{<}{=}} 0,$$

$$4(c^2-ab)^2 \overset{>}{\underset{<}{=}} 0,$$

$$(c^2-ab)^2 \overset{>}{\underset{<}{=}} 0.$$

Weil nun bloss $(c^2-ab)^2 \geqq 0$ sein kann, so ist nie

$$(a^2+b^2+2c^2)^2 < (a+b)^2\{(a-b)^2+4c^2\};$$

jenachdem aber $(c^2-ab)^2 \geqq 0$ ist, ist

$$(a^2+b^2+2c^2)^2 \geqq (a+b)^2\{(a-b)^2+4c^2\}.$$

3. Wann ist

$$\{a(a-b)+2c^2\}^2 \overset{>}{\underset{<}{=}} a^2\{(a-b)^2+4c^2\}?$$

Die Beantwortung dieser Frage liefert die folgende analytische Darstellung:

$$\{a(a-b)+2c^2\}^2 \overset{>}{\underset{<}{=}} a^2\{(a-b)^2+4c^2\},$$

$$a^2(a-b)^2+4a(a-b)c^2+4c^4 \overset{>}{\underset{<}{=}} a^2(a-b)^2+4a^2c^2,$$

$$a(a-b)+c^2 \overset{>}{\underset{<}{=}} a^2,$$

$$c^2 - ab \gtreqless 0.$$

Jenachdem also $c^2 - ab \gtreqless 0$ ist, ist

$$\{a(a-b)+2c^2\}^2 \gtreqless a^2\{(a-b)^2+4c^2\}.$$

4. Wann ist

$$\{b(b-a)+2c^2\}^2 \gtreqless b^2\{(a-b)^2+4c^2\}?$$

Die Beantwortung dieser Frage liefert die folgende analytisc Darstellung:

$$\{b(b-a)+2c^2\}^2 \gtreqless b^2\{(a-b)^2+4c^2\},$$

$$b^2(b-a)^2+4b(b-a)c^2+4c^4 \gtreqless b^2(b-a)^2+4b^2c^2,$$

$$b(b-a)+c^2 \gtreqless b^2,$$

$$c^2 - ab \gtreqless 0.$$

Jenachdem also $c^2 - ab \gtreqless 0$ ist, ist

$$\{b(b-a)+2c^2\}^2 \gtreqless b^2\{(a-b)^2+4c^2\}.$$

Der Beantwortung dieser vier Fragen fügen wir noch die B merkung bei, dass, weil

$$\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b)\}\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}-(a+b)\}$$
$$=(a-b)^2-(a+b)^2+4c^2=4(c^2-ab)$$

ist, die Grössen

$$\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b) \quad \text{und} \quad \sqrt{(a-b)^2+4c^2}-(a+b)$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, jenachdem

$$c^2-ab>0 \text{ oder } c^2-ab<0$$

ist. Für $c^2-ab=0$ wird immer die eine der beiden in Rede stehenden Grössen verschwinden, was auch daraus erhellet, weil in diesem Falle

$$(a-b)^2+4c^2=(a-b)^2+4ab=(a+b)^2,$$

also

$$\sqrt{(a-b)^2+4c^2}=\pm(a+b)$$

ist.

Es sei nun

$$\text{II. } c^2-ab>0.$$

Weil nach dem Vorhergehenden in diesem Falle

$$(a-b)^2+4c^2>(a+b)^2$$

ist, so ist

$$\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\pm(a+b)>0,$$

und man kann also nach 13)

$$n=\left\{\frac{\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\pm(a+b)\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

setzen. Ferner ist nach dem Vorhergehenden

$$(a^2+b^2+2c^2)^2>(a+b)^2\{(a-b)^2+4c^2\},$$

also

$$\frac{a^2+b^2+2c^2\pm(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}>0,$$

und folglich, weil

$$n^2=u+1=1+\frac{a^2+b^2+2c^2\pm(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}$$

ist,

$$n^2>1 \text{ oder } n>1,$$

was bekanntlich im Allgemeinen der Fall der Hyperbel ist, und auch mit der Bedingung $c^2-ab>0$ im besten Einklange steht.

Weil nach dem Vorhergehenden

$$\{a(a-b)+2c^2\}^2 > a^2\{(a-b)^2+4c^2\},$$

$$\{b(b-a)+2c^2\}^2 > b^2\{(a-b)^2+4c^2\}$$

ist, und die Grössen

$$a(a-b)+2c^2 = a^2+c^2+(c^2-ab),$$

$$b(b-a)+2c^2 = b^2+c^2+(c^2-ab)$$

offenbar positiv sind, so ist

$$a(a-b)+2c^2 \pm a\sqrt{(a-b)^2+4c^2} > 0,$$

$$b(b-a)+2c^2 \pm b\sqrt{(a-b)^2+4c^2} > 0;$$

und weil

$$(a^2+b^2+2c^2)^2 > (a+b)^2\{(a-b)^2+4c^2\}$$

ist, so ist

$$(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2} \pm (a^2+b^2+2c^2) \gtrless 0,$$

wo die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehe Berücksichtigt man nun die Ausdrücke von $A^2$ und $B^2$ in 14), ist aus dem Vorhergehenden klar, dass man in diesen Ausdrücke und also natürlich auch in dem obigen Ausdrucke von $n$, nur d oberen Zeichen nehmen darf. Daher hat man im vorliegend Falle für $n$, $A^2$, $B^2$ die folgenden Ausdrücke:

$$n = \left\{\frac{\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b)\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$A^2 = \frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}} \cdot \frac{a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)},$$

$$B^2 = \frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}} \cdot \frac{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)};$$

und aus der Gleichung $n^2AB=c$ erhellet, dass man

$$n = \left\{\frac{\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b)\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$A = \pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}} \cdot \frac{a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}$$

$$B = \pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}} \cdot \frac{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}$$

oder

$$n=\left\{\frac{\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b)\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$A=\pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$B=\mp\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

etzen muss, jenachdem $c$ positiv oder negativ ist. Für $c=0$ erschwindet immer eine der Grössen $A$, $B$, und die Gleichung $2AB=c$ ist daher immer erfüllt, wie man auch die Zeichen ehmen mag.

Dass der Quotient $\frac{A}{B}$ derselbe bleibt, man mag in den beien obigen Systemen von Formeln die oberen oder die unteren eichen nehmen, und dass also die beiden durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

harakterisirten geraden Linien, welche die vorhergehenden Formeln liefern, einander parallel sind, ist klar.

III. $c^2-ab<0$.

In diesem Falle kann weder $a=0$, noch $b=0$ sein, weil sonst $c^2<0$ wäre, was ungereimt ist; auch müssen $a$ und $b$ offenbar leiche Vorzeichen haben, und es ist also entweder $a>0$, $b>0$, $a+b>0$ oder $a<0$, $b<0$, $a+b<0$.

Weil nach dem oben Bewiesenen in diesem Falle

$$(a-b)^2+4c^2<(a+b)^2$$

t, so ist für $a>0$, $b>0$:

$$\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b)>0,$$

$$\sqrt{(a-b)^2+4c^2}-(a+b)<0;$$

id für $a<0$, $b<0$:

$$\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b)<0,$$

$$\sqrt{(a-b)^2+4c^2}-(a+b)>0.$$

lso ist für $a>0$, $b>0$:

$$n=\left\{\frac{\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}-(a+b)\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

und für $a<0$, $b<0$:

$$n=\left\{\frac{\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b)\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner ist nach dem Vorhergehenden:

$$(a^2+b^2+2c^2)^2>(a+b)^2\{(a-b)^2+4c^2\},$$

also

$$\frac{a^2+b^2+2c^2\pm(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}<0,$$

folglich, weil

$$n^2=u+1=1+\frac{a^2+b^2+2c^2\pm(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}$$

ist,

$$n^2<1 \text{ oder } n<1,$$

was bekanntlich im Allgemeinen der Fall der Ellipse ist, und auc mit der Bedingung $c^2-ab<0$ im besten Einklange steht.

Wegen der so eben gefundenen Ausdrücke von $n$ muss ma nun für $a>0$, $b>0$ in den Formeln für $A^2$ und $B^2$ in 14) di unteren Zeichen nehmen, also

$$A^2=\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{a(a-b)+2c^2-a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}-(a^2+b^2+2c^2)},$$

$$B^2=\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{b(b-a)+2c^2-b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}-(a^2+b^2+2c^2)}$$

setzen; dagegen muss man für $a<0$, $b<0$ in den in Rec stehenden Formeln die oberen Zeichen nehmen, also

$$A^2=\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)},$$

$$B^2=\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}$$

setzen.

Wegen

$$(a^2+b^2+2c^2)^2 > (a+b)^2\{(a-b)^2+4c^2\}$$

ist

$$(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}-(a^2+b^2+2c^2)<0,$$

$$(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)>0.$$

Wegen

$$\{a(a-b)+2c^2\}^2 < a^2\{(a-b)^2+4c^2\},$$

$$\{b(b-a)+2c^2\}^2 < b^2\{(a-b)^2+4c^2\}$$

ist für $a>0$, $b>0$:

$$a(a-b)+2c^2-a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}<0,$$

$$b(b-a)+2c^2-b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}<0;$$

und für $a<0$, $b<0$ ist:

$$a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}<0,$$

$$b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}<0.$$

Hieraus sieht man, dass für $a>0$, $b>0$ die obigen Ausdrücke von $A^2$ und $B^2$ für diese Grössen negative Werthe liefern; für $a<0$, $b<0$ liefern dagegen die obigen Ausdrücke von $A^2$ und $B^2$ für diese Grössen positive Werthe. Nun ist aber schon bei dem Falle I. gezeigt worden, dass man immer berechtigt ist, $a$ und $b$, die hier, wie dort, gleiche Vorzeichen haben, negativ anzunehmen. Daher muss man, diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, im vorliegenden Falle setzen:

$$n=\left\{\frac{\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b)\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$A^2=\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)},$$

$$B^2=\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)};$$

und aus der Gleichung $n^2AB=c$ erhellet, dass man

$$n=\left\{\frac{\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b)\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$A=\pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$B=\pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$n=\left\{\frac{\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a+b)\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$A=\pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$B=\mp\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

setzen muss, jenachdem $c$ positiv oder negativ ist. Für $c=0$ gilt dieselbe Bemerkung wie in II.

Dass der Quotient $\frac{A}{B}$ derselbe bleibt, man mag in den beiden obigen Systemen von Formeln die oberen oder die unteren Zeichen nehmen, und dass also die beiden durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

charakterisirten geraden Linien, welche die vorhergehenden Formeln liefern, einander parallel sind, ist klar.

Dass die Formeln für $n$, $A$, $B$ in II. und III. ganz dieselben sind, wird dem aufmerksamen Leser nicht entgehen, wobei jedoch nicht unberücksichtigt bleiben darf, dass die Formeln in dem Falle III. die Grössen $a$ und $b$ als negativ voraussetzen, die Formeln in II. aber einer solchen Einschränkung gar nicht unterliegen.

Leicht ergiebt sich aus dem Vorhergehenden:

$$A^2+B^2=\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{\{a+b+\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\}\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}$$

und aus den drei Fundamental-Gleichungen 5) folgen auch leicht die Relationen:

$$n^2(A^2-B^2)=a-b,$$

$$(n^2-2)(A^2+B^2)=a+b;$$

also

$$n^2=\frac{a-b}{A^2-B^2},\quad n^2=\frac{a+b}{A^2+B^2}+2;$$

und hieraus:

$$\frac{a-b}{A^2-B^2}-\frac{a+b}{A^2+B^2}=2.$$

Weil $n^2AB=c$ ist, so hat man auch die Relation:

$$\frac{A^2-B^2}{AB}=\frac{A}{B}-\frac{B}{A}=\frac{a-b}{c}.$$

Wir gehen nun zu der Auflösung der Gleichungen 6), nämlich der Gleichungen

$$n^2AC+(A^2+B^2)X=d,$$
$$n^2BC+(A^2+B^2)Y=e,$$
$$n^2C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)=f$$

über.

Aus den zwei ersten dieser Gleichungen folgt:

$$15)\quad\ldots\ldots\quad X=\frac{d-n^2AC}{A^2+B^2},\quad Y=\frac{e-n^2BC}{A^2+B^2},$$

so dass also $X$, $Y$ vollkommen bestimmt sind, wenn $C$ bestimmt ist.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber:

$$X^2+Y^2=\frac{(d-n^2AC)^2+(e-n^2BC)^2}{(A^2+B^2)^2},$$

und die dritte der drei aufzulösenden Gleichungen liefert uns daher zur Bestimmung von $C$ die folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$n^2C^2-\frac{(d-n^2AC)^2+(e-n^2BC)^2}{A^2+B^2}=f,$$

welche, gehörig reducirt, leicht auf die Form

$$C^2-2\frac{dA+eB}{(n^2-1)(A^2+B^2)}C=-\frac{d^2+e^2+f(A^2+B^2)}{n^2(n^2-1)(A^2+B^2)}$$

gebracht wird, und, auf gewöhnliche Weise aufgelöst, nach einigen Reductionen zu dem folgenden Ausdrucke von $C$ führt:

$$16)\quad C=\frac{n(dA+eB)\pm\sqrt{(dA+eB)^2-(n^2-1)\{(eA-dB)^2+f(A^2}}{n(n^2-1)(A^2+B^2)}$$

$$=\frac{n(dA+eB)\pm\sqrt{(dA+eB)^2+(1-n^2)\{(eA-dB)^2+f(A^2}}{n(n^2-1)(A^2+B^2)}$$

oder:

$$17)\quad C=\frac{n(d+e\frac{B}{A})\pm\sqrt{(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+}}{n(n^2-1)A(1+\frac{B^2}{A^2})}$$

$$=\frac{n(d+e\frac{B}{A})\pm\sqrt{(d+e\frac{B}{A})^2+(1-n^2)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+}}{n(n^2-1)A(1+\frac{B^2}{A^2})}$$

Bei der weiteren Discussion dieses Ausdrucks müsse nun wieder die drei Fälle, wenn

$$c^2-ab=0,\quad c^2-ab>0,\quad c^2-ab<0$$

oder, was Dasselbe ist,

$$n=1,\quad n>1,\quad n<1$$

ist, von einander unterscheiden.

I. $c^2-ab=0$.

Weil in diesem Falle $n=1$ ist, so ist die obige Glei des zweiten Grades, aus welcher $C$ bestimmt werden muss, folg

$$C^2-\frac{(d-AC)^2+(e-BC)^2}{A^2+B^2}=f,$$

und führt, gehörig reducirt, zu der Gleichung des ersten Gr

$$2(dA+eB)C=d^2+e^2+f(A^2+B^2),$$

woraus

$$C=\frac{d^2+e^2+f(A^2+B^2)}{2(dA+eB)}$$

folgt; und zur Bestimmung von $X$, $Y$ hat man in diesem die folgenden Ausdrücke:

$$X=\frac{d-AC}{A^2+B^2},\quad Y=\frac{e-BC}{A^2+B^2},$$

so dass sich also $C$, $X$, $Y$ im Allgemeinen immer in reeller Weise bestimmen lassen. Der Fall $dA+eB=0$, wo $C$ unendlich wird, bildet eine Ausnahme. Weil es hier nur meine Absicht ist, im Allgemeinen die Formeln zur Bestimmung der Directrixen und Brennpunkte zu entwickeln, nicht die einzelnen Fälle vollständig zu discutiren, so genügt es mir, wegen des Falls $dA+eB=0$ auf die Abhandlung Nr. XII. S. 146. in diesem Theile zu verweisen, wo der Leser Alles finden wird, was über diesen Fall zu wissen nöthig ist.

Bezeichnet man von jetzt an die absoluten Werthe von $A$, $B$ respective durch $A'$, $B'$, so ist bekanntlich

$$A=\pm A',\quad B=\pm B' \text{ oder } A=\pm A',\quad B=\mp B',$$

jenachdem $c$ positiv oder negativ ist. Wenn also $c$ positiv ist, so ist nach dem Obigen:

$$C=\pm\frac{d^2+e^2+f(A'^2+B'^2)}{2(dA'+eB')}=\pm C',$$

$$X=\frac{d-A'C'}{A'^2+B'^2},\quad Y=\frac{e-B'C'}{A'^2+B'^2};$$

und die Gleichung der Directrixen ist

$$\pm A'x\pm B'y\pm C'=0,$$

also

$$A'x+B'y+C'=0,$$

welche Gleichung doppelte Zeichen nicht mehr enthält und daher nur einer geraden Linie entspricht. Wenn dagegen $c$ negativ ist, so ist nach dem Obigen:

$$C=\pm\frac{d^2+e^2+f(A'^2+B'^2)}{2(dA'-eB')}=\pm C',$$

$$X=\frac{d-A'C'}{A'^2+B'^2},\quad Y=\frac{e+B'C'}{A'^2+B'^2};$$

und die Gleichung der Directrixen ist:

$$\pm A'x\mp B'y\pm C'=0,$$

also

$$A'x-B'y+C'=0,$$

welche Gleichung wieder doppelte Zeichen nicht mehr enthält, und daher nur einer geraden Linie entspricht.

Die Parabel hat folglich nur eine Directrix und nur ein Brennpunkt.

II. $c^2-ab>0$.

Weil in diesem Falle $n>1$, also $n^2-1$ positiv ist, so wollen

$$C=\frac{n(dA+eB)\pm\sqrt{(dA+eB)^2-(n^2-1)\{(eA-dB)^2+f(A^2+B^2)\}}}{n(n^2-1)(A^2+B^2)}$$

oder

$$C=\frac{n(d+e\frac{B}{A})\pm\sqrt{(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})\}}}{n(n^2-1)A(1+\frac{B^2}{A^2})}$$

setzen. Hier sind nun die folgenden drei Fälle zu unterscheid

Wenn

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}=0$$

ist, so ist

$$C=\frac{d+e\frac{B}{A}}{(n^2-1)A(1+\frac{B^2}{A^2})}=\frac{dA+eB}{(n^2-1)(A^2+B^2)},$$

und es giebt also in diesem Falle eine Directrix und ein derselben entsprechenden Brennpunkt. Bezeichnen wir die E fernung des Brennpunkts von der Directrix im Allgemeinen du $E$, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie im A gemeinen

$$E^2=\frac{(AX+BY+C)^2}{A^2+B^2}.$$

Nun ist aber

$$X=\frac{d-n^2AC}{A^2+B^2},\quad Y=\frac{e-n^2BC}{A^2+B^2};$$

folglich

$$AX+BY=\frac{dA+eB-n^2(A^2+B^2)C}{A^2+B^2},$$

und daher

$$AX+BY+C=\frac{dA+eB-(n^2-1)(A^2+B^2)C}{A^2+B^2},$$

woraus nach dem Obigen

$$E^2=\frac{\{dA+eB-(n^2-1)(A^2+B^2)C\}^2}{(A^2+B^2)^3}$$

folgt. Weil nun in dem vorliegenden speciellen Falle nach dem Obigen

$$(n^2-1)(A^2+B^2)C=dA+eB$$

ist, so ist in diesem Falle $E=0$, und der Brennpunkt liegt also in der Directrix. Nehmen wir den Brennpunkt als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ an, dessen $\mathfrak{y}$-Axe die Directrix ist, so ist die Gleichung der Curve offenbar

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2=n^2\mathfrak{x}^2, \text{ also } \mathfrak{y}_1=(n^2-1)\mathfrak{x}^2;$$

woraus sich

$$\mathfrak{y}=\pm\mathfrak{x}\sqrt{n^2-1}$$

ergiebt, und die Curve daher, weil $n^2-1$ positiv, also $\sqrt{n^2-1}$ reell ist, durch zwei im Brennpunkte sich schneidende gerade Linien repräsentirt wird.

Wenn

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}>0$$

ist, so hat $C$ zwei ungleiche reelle Werthe, und es giebt also zwei Directrixen und zwei denselben entsprechende Brennpunkte.

Wenn

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}<0$$

ist, so sind beide Werthe von $C$ imaginär, und es giebt also in diesem Falle weder eine Directrix, noch einen Brennpunkt. Weil man anderweitig (m. s. den Aufsatz Nr. XII. in diesem Theile) weiss, dass in dem vorliegenden Falle, wo $c^2-ab>0$ ist, die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

nur eine Hyperbel oder zwei gerade Linien repräsentiren kann, die Hyperbel aber bekanntlich immer zwei Brennpunkte und zwei Directrixen hat, so kann in dem Falle, wenn

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}<0$$

ist, die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

nur zwei gerade Linien repräsentiren, was wir jetzt der Kürze wegen nicht weiter analytisch untersuchen wollen.

III. $c^2-ab<0$.

Weil in diesem Falle $n<1$, also $1-n^2$ positiv ist, so wollen wir

$$C=\frac{n(dA+eB)\pm\sqrt{(dA+eB)^2+(1-n^2)\{(eA-dB)+f(A^2+B^2)^2\}}}{n(n^2-1)(A^2+B^2)}$$

oder

$$C=\frac{n(d+e\frac{B}{A})\pm\sqrt{(d+e\frac{B}{A})^2+(1-n^2)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}}}{n(n^2-1)A(1+\frac{B^2}{A^2})}$$

setzen, und nun wieder die drei folgenden Fälle unterscheiden.

Wenn

$$(d+e\frac{B}{A})^2+(1-n^2)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}=0$$

ist, so ist

$$C=\frac{d+e\frac{B}{A}}{(n^2-1)A(1+\frac{B^2}{A^2})}=\frac{dA+eB}{(n^2-1)(A^2+B^2)},$$

und ganz auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden Falle erhält man, ähnliche Bedeutungen wie dort auch hier den Zeichen $E$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ beilegend, $E=0$ und

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2=n^2\mathfrak{x}^2, \text{ also } \mathfrak{y}^2=(n^2-1)\mathfrak{x}^2;$$

woraus sich

$$\mathfrak{y}=\pm\mathfrak{x}\sqrt{n^2-1},$$

d. h., weil $n^2-1$ negativ, also $\sqrt{n^2-1}$ imaginär ist, eine imaginäre Curve ergiebt; nur für $\mathfrak{x}=0$, $\mathfrak{y}=0$, d. h. für den Punkt $(XY)$ sind die vorstehenden Gleichungen zulässig.

Wenn

$$(d+e\frac{B}{A})^2+(1-n^2)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}>0$$

ist, so hat $C$ zwei ungleiche reelle Werthe, und es giebt also zwei Directrixen und zwei Brennpunkte.

Wenn

$$(d+e\frac{B}{A})^2+(1-n^2)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}<0$$

ist, so sind beide Werthe von $C$, und also auch die Werthe von $X$, $Y$ imaginär.

Anderweitig (m. s. den Aufsatz Nr. XII. in diesem Theile) weiss man, dass in dem vorliegenden Falle, wo $c^2-ab<0$ ist, die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

nur einen Punkt oder eine Ellipse darstellt, oder imaginär ist.

Wie aus $n$ und $E$ die Axen, der Parameter, die Excentricität leicht berechnet werden können, habe ich schon in dem Aufsatze Thl. XVII. Nr. II. ausführlich gezeigt, und erlaube mir daher in dieser Beziehung hier der Kürze wegen auf jenen Aufsatz zu verweisen.

# XXIII.

## De tabulis Trigonometricis.

(E conspectu actorum Reg. Acad. Scient. Holmiensis.)

Auctore

Dre *Christiano Fr. Lindman*,

Lectore Strengn.

---

Inter omnes constat, numeros, quos tabulae cujusvis generis, ut tabulae trigonometricae, suppeditant, non esse nisi quam proxime veros, id quod saepissime quoque dici potest de praeceptis, quae in his tabulis utendis tenenda sunt. Numeri e tabulis sumti ob utramque caussam mendis magis minusve laborant, unde alia deinceps menda oriuntur, quorum limites cogniti esse debent, ut sciamus, quatenus fides habenda sit numeris tabularum ope inventis. Illus Gauss in libro suo „Theoria motus corporum coelestium" inscripto mentionem de magna illa re fecit docuitque, quomodo limites errorum in calculos vocandi essent*). Ingratum fortasse non erit, si in unum locum congessero eas formulas, quae ad functiones goniometricas spectant. Ratio non habetur nisi inevitabilis tabularum erroris ($=\omega$), qui ob modum nunc usitatum fractiones decimales, ut dicunt, corrigendi **) dimidiam unitatem decimalis ultimae excedere nequit. Itaque

---

*) Celus N. G. a Schultén in tabulis ab se editis (Helsingforsiae 1838) aliquot formulas hujus generis suisque tabulis aptatas protulit. Mirum profecto est, nihil prorsus, quod equidem sciam, in ulla alia tabula occurrere, unde cognoscere licet, quam prope ad veritatem accedant numeri tabularum ope accepti.

**) Tantus error evitari non potest, quando in tabulis v. c. septem decimalium decimalis octava negligitur, si est minor quam quinque, sed

I°. dato arcu $\varphi$

α) accurate,

summus error, qui inesse potest in $\log \mathrm{Sin}\,\varphi$, $\log \mathrm{Cos}\,\varphi$, $\log \mathrm{tg}\,\varphi$, $\log \mathrm{Cot}\,\varphi$, est $=\omega$;

β) proxime (error arcus in partibus radii $= d\varphi$),

summus est error ipsius $\log \mathrm{Sin}\,\varphi = m \,\mathrm{Cot}\,\varphi d\varphi + \omega$,

„ „ „ „ $\log \mathrm{Cos}\,\varphi = -m \,\mathrm{tg}\,\varphi d\varphi - \omega$,

„ „ „ „ $\log \mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{2m d\varphi}{\mathrm{Sin}\,2\varphi} + \omega$;

„ „ „ „ $\log \mathrm{Cot}\,\varphi = -\dfrac{2m d\varphi}{\mathrm{Sin}\,2\varphi} - \omega$,

($m =$ modulo logarithmorum vulgarium);

II^do^. dato logarithmo functionis cujusdam goniometricae

α) accurate,

summus error arcus in minutis secundis est $= \dfrac{\omega \,\mathrm{tg}\,\varphi}{m \,\mathrm{Sin}\,1''}$ e $\log \mathrm{Sin}\varphi$,

„ „ „ „ „ „ „ $= -\dfrac{\omega \,\mathrm{Cot}\,\varphi}{m \mathrm{Sin} 1''}$ e $\log \mathrm{Cos}\varphi$,

„ „ „ „ „ „ „ $= \dfrac{\omega \,\mathrm{Sin}\,2\varphi}{m \,\mathrm{Sin}\,1''}$ e $\log \mathrm{tg}\,\varphi$,

„ „ „ „ „ „ „ $= -\dfrac{\omega \mathrm{Sin} 2\varphi}{m \mathrm{Sin}\,1''}$ e $\log \mathrm{Cot}\varphi$;

β) proxime,

summus error arcus est resp. ut in α), dummodo in numeratoribus $\omega + \omega'$ pro $\omega$ ponatur, si est $\omega' =$ errori logarithmi.

Ex his formulis liquet, mendum arcus logarithmo Sinus dati, quando arcus a quadrante parum discrepat, quantumlibet fieri posse. Ita quoque res se habet, si arcus prope zero logarithmo Cosinus datur, id quod praeterea, tabulis modo cursim transitis, elucet.

---

septima decimalis unitate augetur, si octava est aequalis quinque vel major. Sin autem signo quodam denotaretur, decimales neglectas intra limites 0,25 et 0,75 contineri; et octava negligeretur, si minor esset quam 0,25, septima vero unitate augeretur, si octava est major quam 0,75, patet, errorem dimidio minorem fieri, quam nunc est. (Decimalis septima hic unitas habetur.) Diversis notis utendis error tabularum etiam magis minui potest, dummodo idoneae notae reperiri possint.

Interdum igitur accidit, ut rationes et formulae, alias aptissimae, prorsus sint relinquendae et aliae quaerendae. Ita est, si ex. c. hypotenusa trianguli sphaerici rectanguli, angulis datis quaeritur. Enimvero si hypotenusa designatur per $a$ angulique adjacentes per $B$ et $C$, habemus

$$\operatorname{Cos} a = \operatorname{Cot} B \operatorname{Cot} C,$$

ubi fieri potest, ut $\log \operatorname{Cos} a$ ad decem multum appropinquet. Formula tum transformanda est. Facile invenitur

$$\frac{1-\operatorname{Cos} a}{1+\operatorname{Cos} a} = \frac{1-\operatorname{Cot} B \operatorname{Cot} C}{1+\operatorname{Cot} B \operatorname{Cot} C}$$

vel ope formularum notissimarum

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{\operatorname{Cos}(B+C)}{\operatorname{Cos}(B-C)},$$

unde arcus $a$ accurate inveniri potest. Aliae aliis locis *) viae monstrantur, quae fere omnes in alia functione goniometrica, transformationibus factis, reperienda continentur. Formula praeterea inventa usum logarithmorum statim patiatur, oportet. Quod quum non semper eveniat, angulos auxiliares interdum introducere necesse est. Haec res diligentissime disjungi debet ab illa, in qua arcus tam accurate invenitur, quam habitus tabulae permittit. Longe aliter res se habet, quum angulo auxiliari utimur. Dato enim logarithmo Sinus vel Cosinus ad decem appropinquante, functio data ex. c. $\operatorname{Cos}\varphi$ ponatur $= \operatorname{tg} x$, ut suadent Cel[i] Francoeur **) et Grunert ***). Ex aequatione $\operatorname{tg} x = \operatorname{Cos}\varphi$ arcus $x$ invenitur. Deinde habebimus

$$\frac{1-\operatorname{Cos}\varphi}{1+\operatorname{Cos}\varphi} = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x},$$

unde redundat aequatio

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = \pm \sqrt{\operatorname{tg}(45^0 - x)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Jam videamus, ad qualem exitum haec via ducat, atque ponamus $\log \operatorname{tg} x (= \log \operatorname{Cos}\varphi)$ mendo vacuum. Ita maximum arcus $x$ mendum evadit $= \frac{\omega \operatorname{Sin} 2x}{2m \operatorname{Sin} 1''}$, quod quoque, signo tantum mutato, arcum

*) Vid. ex. c. Cagnoli, Traité de Trigon. Paris 1786, pag. 109, 250; Francoeur, Cours de Math. pures. Bruxelles 1838. Tom. II. pag. 252.

**) L. c. p. 253.

***) Archiv der Mathematik und Physik. Tom. I. pag. 73.

$45^0 - x$ afficit et in $\log \operatorname{tg}(45^0 - x)$ generat errorem $= -\omega \operatorname{tg} 2x - \omega$. Quoniam vero arcus $x$, quando $\varphi$ ad zero propius accedit, paullo tantum minor est quam $45^0$, $\operatorname{tg} 2x$ admodum magna est, unde igitur error ingens resultare possit. Error quidem dimidio minor fit, quia logarithmus propter extractionem radicis quadratae per 2 dividitur, sed postea per 2 multiplicandum est, ut $\varphi$ inveniatur, cujus igitur maximus error est $= -\frac{\omega \operatorname{tg} 2x + 3\omega}{2m \operatorname{Sin} 1''} \operatorname{Sin} \varphi$. Qui quoniam error, etiamsi $\log \operatorname{Cos} \varphi$ nullo mendo laborare positus est, valde magnus esse potest, ratio, de qua nunc agitur, non est ejusmodi, ut nihil amplius desiderandum sit, quamquam errores interdum admodum parvi evadunt. In eo casu speciali, quum logarithmus datus mendo vacat, facillime invenitur formula, quae arcum accuratissime suppeditat. Enimvero posito

$$\log \operatorname{Cos} \varphi = 10 - \alpha \quad (\alpha = \text{fractioni admodum parvae}),$$

evadit

$$\operatorname{Cos} \varphi = r . 10^{-\alpha} \quad (r = \text{radio tabularum}),$$

unde

$$\operatorname{Sin} \varphi = r\sqrt{1 - 10^{-2\alpha}}, \quad \log \operatorname{Sin} \varphi = 10 + \tfrac{1}{2} \log (1 - 10^{-2\alpha}).$$

Jam formula notissima suppeditat

$$10^{-2\alpha} = 1 - \frac{k(2\alpha)}{1} + \frac{k^2(2\alpha)^2}{1.2} - \frac{k^3(2\alpha)^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

ubi est $k = l\,10 = 2{,}3025851$ ($\log k = 0{,}3622157$). Ita fit

$$\log \operatorname{Sin} \varphi = 10 + \frac{1}{2} \log (2k\alpha - 2k^2\alpha^2 + \frac{4}{3} k^3\alpha^3 - \frac{2}{3} k^4\alpha^4 + \text{etc.})$$

$$= 10 + \frac{1}{2} \log 2k\alpha + \frac{1}{2} . \log (1 - k\alpha + \frac{2}{3} k^2\alpha^2 - \frac{1}{3} k^3\alpha^3 + \text{etc.}).$$

Quia est $\alpha =$ fractioni admodum parvae, posterior logarithmus secundum formulam

$$\log (1 - y) = -\frac{1}{k} (y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \text{etc.})$$

in seriem convergentem evolvere licet, si ponitur

$$y = k\alpha - \frac{2}{3} k^2\alpha^2 + \frac{1}{3} k^3\alpha^3 - \text{etc.}$$

eaeque ipsius $\alpha$ dignitates introducuntur, quae ad ultimam decimalem mutandam valeant. Ratione dignitatis tertiae habita, invenitur

$$\log \operatorname{Sin} \varphi = 10 + \frac{1}{2} \log 2k\alpha - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{12} k\alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

quae formula, si $\log \operatorname{Cos} \varphi$ mendo vacuus est, arcum $\varphi$ non modo accurate suppeditat, sed etiam accuratius quam interpolatio vulgaris, quum tabulae septem habent decimales, quamquam arcus viginti gradus superat.

Sin autem $\log \operatorname{Cos} \varphi$ mendo quodam laborat — id quod saepissime usu venit — haec quoque formula in errorem valde magnum inducit. Posito enim $d\alpha =$ mendo ipsius $\alpha$, invenitur error ipsius $\varphi = \frac{1 - k\alpha}{2\alpha \operatorname{Sin} 1''} \operatorname{tg} \varphi d\alpha$, ubi tamen terminum $k\alpha$ in numeratore occurrentem sine errore notando negligere licet. Priore ratione utenda error maximus evadit $= \frac{(\omega + d\alpha) \operatorname{tg} 2x + 3\omega}{2m \operatorname{Sin} 1''} \operatorname{Sin} \varphi$, ubi terminus $3\omega$ sine discrimine omitti potest et $\omega$ ac $d\alpha$ eodem signo sumi debent. Itaque maximus error arcus $\varphi$ evadit

$$\text{secundum formulam (1)} = \frac{(\omega + d\alpha) \operatorname{tg} 2x \operatorname{Sin} \varphi}{2m \operatorname{Sin} 1''},$$

$$\text{,, \quad ,, \quad (2)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi d\alpha}{2\alpha \operatorname{Sin} 1''}.$$

Ut quodammodo dijudicari possit, quam rationem hi errores inter se habeant, considerandum est, esse $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin}^2 \varphi}$ et satis proxime $\alpha = \frac{m\varphi^2}{2}$, ubi est $\varphi =$ arcui in partibus radii. His introductis, quum ponimus $\operatorname{Cos} \varphi = 1$ animumque advertimus ad aequationem $\frac{1}{k} = m$, invenimus

$$\text{valorem absolutum erroris prioris} = \frac{\omega + dx}{m \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} 1''},$$

$$\text{,, \quad ,, \quad ,, posterioris} = \frac{d\alpha}{m \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} 1''},$$

(si in formula posteriore $\operatorname{Sin}^2 \varphi$ pro $\varphi^2$ substituitur)

unde efficitur, formulam (2) formulae (1) anteferendam esse, utpote quae arcum quaesitum paullo saltem accuratius suppeditet.

Aeque fere proxime ad veritatem accedet, si quis e tabulis, quas Cel[us] Zech ad logarithmos summarum differentiarumque inveniendos edidit, $\log \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi$ quaesiverit, quae via sine dubio facillima est.

Nihilominus tamen saepius accidit, ut arcus hac vel illa ratione inventi tantis sint mendis affecti, ut prorsus inutiles fiant. Etiamsi errores in tabulis septem decimalium utendis interdum pauca tantum minuta secunda efficiant, nimis tamen magni censendi sunt ut errores calculi. Praeterea obliviscendum non est, veram erroris magnitudinem e rationibus propositis percipi non posse, quamquam formulae nuper allatae maximum eorum indicant. Quae quum ita sint neque nova facile ratio rei, de qua agitur, explicandae reperiri posse videatur, nihil aliud superest, quam tabulis plurium decimalium uti, quando arcus ex logarithmo Sinus vel Cosinus ad decem propius accedente inveniendus est. Exemplum, quod jam allaturus sum, demonstrabit, errores alias oriri posse admodum magnos, nimirum pro magnitudine errorum, qui ab usu tabularum generaliter proficiscantur. Datis enim duobus trianguli plani lateribus anguloque opposito, ita ut sit latus $a=200$, angulus oppositus $A=20^{0}\,37'\,50''$ et latus $b=567{,}63$, angulum $B$ inveniemus ex aequatione $\text{Sin}\,B=\frac{b\,\text{Sin}\,A}{a}$. Tabulae decem decimalium dant

$$\begin{aligned}\log b &= 2{,}7540653404\\ \log\text{Sin}\,A &= 9{,}5469629291\\ \hline & \phantom{=}\ 2{,}3010282695\\ \log a &= 2{,}3010299957\\ \hline \log\text{Sin}\,B &= 9{,}9999982738,\end{aligned}$$

quamobrem est $B=89^{0}\,50'\,18'',45$ vel supplemento hujus anguli et error maximus $=0'',03$. Si tabulis septem decimalium utimur, prodit $\log\text{Sin}\,B=9{,}9999982$. Inde invenitur

ope formulae (1) $B=89^{0}\,50'\,4'',37$ vel suppl.
„ „ (2) $B=89\ 50\ 6{,}14$ „ „
ope tabularum Cel<sup></sup>

Errores igitur veri efficiunt resp. $14'',08$, $12'',31$, $12'',32$, qui majores sunt, quam qui tolerari umquam possint.

# XXIV.

# De aequationibus numericis tertii gradus solvendis.

(E conspectu actorum Reg. Acad. Scient. Holmiensis.)

Auctore

D^re *Christiano Fr. Lindman,*

Lectore Strengn.

---

Modum aequationes algebraicas solvendi si quis recensuerit, reperiet, aequationes alias aliter solvi et rationem eas solvendi in eo praecipue contineri, quod alia aequatio gradus proxime inferioris quaeritur, a cujus indicibus radices aequationis datae pendeant. Numericas autem aequationes solvendi caussa quaesitae sunt rationes, quae ad aequationes omnium graduum pertinerent. Quamquam dubitari non potest, quin optima sit haec via, si artem tantum scientiamque respexeris, patet tamen, praecepta inde proficisci posse, quae ad aequationes certi cujusdam gradus solvendas sint inutilia et supervacanea vel saltem aliis iisque commodioribus compensari possint. In ipso igitur usu et ratiocinando nulla spernenda est via, qua progredientes ad optatum exitum facile atque commode pervenire possimus. Praecipuis prius rationibus, quae ad aequationes numericas tertii gradus solvendas adhiberi possint, quam potero brevissime percursis, demonstrare conabor, hanc sententiam tanti aestimatam non fuisse, quanti meo judicio oporteret. Postea aliquid hac de re in medium proferre mihi liceat.

Vetustissima est ratio, quam ab Cardano appellare solent. Illa nimirum in aequationibus quoque numericis adhiberi potest, excepto casu, quem vocant, irreducibili, sed extractionem unius radicis quadratae et duarum radicum cubicarum desiderat. Quae quidem res non multum molestiae videtur afferre; quod si consi-

eraveris, radicem quadratam triplo plurium decimalium esse de-
ere quam valorem quantitatis incognitae, magna fit rei commu-
atio. Itaque ratio Cardani non satis est idonea ad quantitatem
cognitam inveniendam, si magnus decimalium numerus requiritur.
lia quaevis ratio aequationes algebraicas tertii gradus solvendi
d formulas formulae Cardani similes ducit itaque fere se habet,
t Cardani, quum in aequationibus numericis adhibetur. Seriebus
ommode uti possumus, si ad limitem certum quendam celeriter
ppropinquant; sin minus, usus earum molestissimus evadit. Hinc
equitur, ut alia ratio opus sit. Complures jam sunt cognitae,
uarum ope ad veros radicum valores magis minusve appropinquare
ceat. Omnium commodissima est, quae formulis goniometricis
titur, sed generatim sex tantum notas veras suppeditat, quum
garithmi septem decimalium adhibentur. Huc accedit, quod for-
ulae quoque goniometricae interdum radices omnino dare nequeunt.
eliquarum rationum duo sunt genera, quorum unum ad aequatio-
es numericas cujusvis gradus pertinet, alterum ad singularia ge-
era aequationum spectat. Rationes illius generis omnino sunt tres,
na Newtoni, altera Lagrangii, tertia Fourierii. Quia ad
equationes numericas cujusvis gradus destinatae sunt, nihil habet
dmirationis, quod longam et operosam ratiocinationem requirunt.
atio Fourierii praecipue elegans est, quippe quae semper adhi-
eri possit et radices quamvis accurate suppeditet. Nihil aliud
ntra eam dici videtur posse, nisi quod majorem desiderat labo-
m, quam qui aequationibus tertii gradus opus esse videatur.
ethodo Newtoni utenda radices interdum reperiri non possunt;
ethodus vero Lagrangii desiderat cognitos esse limites, intra
os una tantum radix cadat. Hujusmodi sane limites inveniri
ssunt, investigatio tamen eorum novam quandam molestiam
mper affert.

Hujus generis est ratio Gaussii indirecta aequationes omnes
inomiales solvendi et ratio Rutherfordii solvendi aequationes
rtii quartique gradus. In illa utimur tabulis logarithmicis, quam-
rem sex tantum notae accuratae inveniuntur, si tabulae sunt
ptem decimalium. Ratio Rutherfordii sane egregia est, sed,
lut rationes illius generis, multas requirit substitutiones et qua-
ata grandium numerorum et extractionem radicum, quibus rebus
aestantia hujus rationis aliquantum minuitur.

Ex hac etiam veloci percursione rationum elucet, sua quam-
e habere commoda, etiamsi interdum aliquid amplius desideran-
m sit. Quum sex tantum notis accuratis opus est, ratio gonio-
etrica est commodissima, si modo adhiberi possit, de qua re
sthac dicendum est. Si multae notae accuratae desiderantur,

ratio Fourieriana utenda est. Decem tamen decimales saepissime sufficere videntur, quamobrem in animo mihi nunc est rationem quandam proponere, qua hic numerus decimalium reperiatur. Novem quidem notae accuratae inveniri possunt ratione goniometrica et tabulis logarithmicis decem decimalium. Quoniam vero hujusmodi tabulae non semper praesto sunt, sed usus logarithmorum ad molestiam ratiocinationis levandam tantopere conducit, operae pretium esse mihi visum est tentare, numne propositum ope tabularum septem decimalium assequi possem. Vix, credo, opus est dicere, hic non agi nisi de radicibus irrationalibus et imaginariis.

In aequatione data terminum secundum vel abesse vel sublatum esse pono. Praeterea in aequatione sic accepta coëfficientem ipsius $x^3 = 1$ et valorem absolutum ceterarum coëfficientium $\geqq 1$ fingo, ita ut aequatio hujus sit formae

$$x^3 \pm px \pm q = 0, \qquad (p, q \geqq 1)$$

signis quomodocunque inter se junctis. Qualibet ratione utimur, valores primum ad veritatem paullum accedentes opus sunt. Hujusmodi valores goniometrica ratione commodissime inveniri videntur, tabulis quattuor vel quinque decimalium adhibitis. Formulae tum necessariae hae sunt:

$$(1) \quad x^3 + px \pm q = 0, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{3q} \cdot 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}, \quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi},$$

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\operatorname{Cot}2\psi, \quad x_2 = -\frac{x_1}{2} \pm \frac{\sqrt{p}}{\operatorname{Sin}2\psi}i, \quad x_3 = -\frac{x_1}{2} \mp \frac{\sqrt{p}}{\operatorname{Sin}2\psi}i;$$

$$(2) \quad x^3 - px \pm q = 0, \quad \frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}, \quad \operatorname{Sin}\varphi = \frac{p}{3q} \cdot 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}, \quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi},$$

$$x_1 = \mp \frac{2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}}{\operatorname{Sin}2\psi}, \quad x_2 = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{p}\operatorname{Cot}2\psi . i, \quad x_3 = -\frac{x_1}{2} \mp \sqrt{p}\operatorname{Cot}2\psi . i;$$

$$(3) \quad x^3 - px \pm q = 0, \quad \frac{q^2}{4} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \frac{p^3}{27}, \quad \operatorname{Cos}3\varphi = \frac{3q}{p . 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}},$$

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\operatorname{Cos}\varphi, \quad x_2 = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right), \quad x_3 = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right).$$

Postquam ita inventus est valor $(=k)$ nonnihil a vero discrepans, cujus mendum $(< 0{,}01)$ littera $y$ designetur, substituatur $k + y$ pro $x$ in aequatione formae primae, unde prodit aequatio

$$y^3+3ky^2+(3k^2+p)y+k^3+pk\pm q=0.$$

lore absoluto ipsius $k=\varkappa$ posito, si est $\varkappa>1$, evadit $3k^2>3\varkappa$ a fortiori $3k^2+p>3\varkappa$. Exsistente $\varkappa=\frac{1}{3}$, fit $3\varkappa=1$ et $3k^2+p$ $\frac{1}{3}+p$. Quia unitas est minimus valor coëfficientis $p$, evadit $^2+p>3\varkappa$, quod quoque usu venit, si est $\varkappa<\frac{1}{3}$. Hinc efficitur, antitatem $3k^2+p$ semper esse majorem quam valorem absolun ipsius $3k$. Itaque si ponimus

$$y=-\frac{k^3+pk\pm q}{3k^2+p}-\frac{3k}{3k^2+p}y^2-\frac{y^3}{3k^2+p}$$

memoria tenemus, factorem $y^2$ esse $<0{,}0001$, terminum $\frac{k^3+pk\pm q}{3k^2+p}$, in fractionem decimalem reductum et undecim vel odecim decimalibus praeditum, sumere possumus primum ipsius valorem proxime verum, qui pro $y^2$, $y^3$ substitutus valorem acratiorem suppeditabit, qui postea substituitur. Substitutio iteranda t, donec duo valores insequentes fiant aequales vel non inaequa- nisi decimalibus ultimis, id quod post tres quattuorve substiiones evenit, quoniam $y<0{,}01$ assumsimus. Ante has substiiones quaerendi sunt logarithmi quantitatum $\frac{3k}{3k^2+p}$, $\frac{1}{3k^2+p}$, i per totam ratiocinationem usurpantur. De binis radicibus aginariis posthac agetur.

Si est aequatio data formae secundae, eodem modo progredi et, dummodo sit $3k^2-p$ major valore absoluto ipsius $3k$. Facile judicatur, rem semper ita se habere. Radix enim realis est

$$k+y=\mp\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}\right).$$

revitatis caussa $\sqrt{1-\frac{4p^3}{27q^2}}=b$ posito, evadit

$$k=\mp\{(1-b)^{\frac{1}{3}}+(1+b)^{\frac{1}{3}}\}\sqrt[3]{\frac{q}{2}}-y,$$

$$-\frac{p}{3}=\{(1-b)^{\frac{2}{3}}+(1+b)^{\frac{2}{3}}\}\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}+\frac{p}{3}\pm 2y\{(1-b)^{\frac{1}{3}}+(1+b)^{\frac{1}{3}}\}\sqrt[3]{\frac{q}{2}}+y^2.$$

uantitas $k^2-\frac{p}{3}$ major esse debet valore absoluto ipsius $k$, id t, si $y^2$ negligitur,

$$\{(1-b)^{\frac{2}{3}}+(1+b)^{\frac{2}{3}}\}\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}+\frac{p}{3}}-2y\{(1-b)^{\frac{1}{3}}+(1+b)^{\frac{1}{3}}\}\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

$$>\{(1-b)^{\frac{1}{3}}+(1+b)^{\frac{1}{3}}\}\sqrt[3]{\frac{q}{2}}+y.$$

Posito $y=0{,}01$, oportet esse

$$\{(1-b)^{\frac{2}{3}}+(1+b)^{\frac{2}{3}}\}\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}+\frac{p}{3}}>1{,}02\{(1-b)^{\frac{1}{3}}+(1+b)^{\frac{1}{3}}\}\sqrt[3]{\frac{q}{2}}+0{,}01.$$

Quod quia usu venit, quum $p$ et $q$ minimum quaeque valorem habent, id est, unitati sunt aequales, et facile probatur ita quoque esse pro aliis quantitatum $p$ et $q$ valoribus, sequitur, ut in qualibet aequatione generis secundi eadem ratione atque in aequationibus generis primi uti liceat.

Jam in genus tertium transeamus. Posito primum $\frac{q^2}{4}=\frac{p^3}{27}$, patet esse $x_1=\mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, $x_2=x_3=\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$. Quod si est $\frac{q^2}{4}<\frac{p^3}{27}$, incidit casus, quem vocant, irreducibilis, ubi cunctae radices sunt reales et inaequales et binae eodem signo praeditae. Ratio goniometrica omnino suppeditat valorem uniuscujusque radicis proxime verum, qui ita ut antea tractari potest, siquidem valor absolutus coëfficientis $\frac{3k}{3k^2-p}$ minor est unitate vel unitatem paullulum tantum superat. Ut hoc dijudicetur, ponatur $=a$ ea radix, quae est signo ceteris opposita, et summa harum dimidia $=\alpha$ et differentia dimidia $=\delta$. Ita invenitur aequatio

$$(x-a)(x-\alpha-\delta)(x-\alpha+\delta)=0,$$

quae, cum data comparata, dat aequationes

$$a+2\alpha=0,\quad 2a\alpha+\alpha^2-\delta^2=-p,\quad a(\alpha^2-\delta^2)=\mp q. \qquad \text{(v)}$$

Ex aequationibus prima et secunda invenitur

$$p=\tfrac{3}{4}a^2+\delta^2. \qquad \text{(v')}$$

Jam si $a$ substituitur pro $k$, evadit, ratione signi non habita,

$$\frac{3k}{3k^2-p}=\frac{3a}{3a^2-p}.$$

Quum vero per hypothesin sit $\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4}$ et unitas minimus quan-

titatis $q$ valor, patet esse $p^3 > \frac{27}{4}$ vel $p > \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$. Quoniam praeterea est $\alpha^2 > \delta^2$ vel $\frac{1}{4}a^2 > \delta^2$, ex aequatione (v′) sequitur, ut sit $a^2 > p$ atque ideo $\frac{3}{2a} > \frac{3a}{3a^2 - p}$. At vero quum quantitas $\frac{3}{2a}$ semper minor sit numero 1,091, idem a fortiori in $\frac{3k}{3k^2 - p}$ valet. Itidem si substituitur $\alpha - \delta$ vel $\alpha + \delta$, prout est $\alpha > 0$ vel $\alpha < 0$, valor absolutus quantitatis $\frac{3k}{3k^2 - p}$ evadit respective $\frac{3(\alpha - \delta)}{2\delta(3\alpha - \delta)}$ vel $\frac{3(\alpha + \delta)}{2\delta(3\alpha + \delta)}$, quia est $p = 3\alpha^2 + \delta^2$. Quoniam factor, quo quantitas $\frac{3}{2\delta}$ multiplicata est, semper est minor quam $\frac{1}{3}$, sufficit, si est $\frac{1}{2\delta} < 1$ vel saltem unitatem paullum excedit. Tertiam radicem separatim quaerere opus non est, quia summa radicum est $= 0$.

Sin autem est $0{,}5 > \delta > 0{,}05$, convenientissimum videtur radices ejusmodi numero integro $n$ multiplicare, ut nova quantitas $\delta$ fiat $> 0{,}5$. Patet in promptuque est hoc fieri, si $\frac{x}{n}$ pro $x$ in aequatione substituitur. Talis multiplicatio etiam alias inventionem radicum accelerare potest, quoniam hoc pacto quantitas $y$ parva fit, ut multiplicatio per 2, si decimalis tertia ipsius $k$ est $= 5$.

Sit denique $\delta < 0{,}05$. Haec res valore valde magno logarithmi quantitatis $\operatorname{Cos} 3\varphi$ indicatur, qui interdum tam prope accedit ad 10, ut arcus $\varphi$ vix et ne vix quidem determinari possit *). Tum multiplicatio nuper commemorata incommoda evadit, quia magni numeri inde oriuntur. Quoniam ratio goniometrica nunc ob caussam allatam valores proxime veros non suppeditat, aliter procedendum est. Ex aequatione (v′) invenitur

$$a = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}(p - \delta^2)},$$

ubi ordo signorum aequatione tertia aequationum (v) dijudicatur. Quia $\delta$ per hypothesin est quantitas admodum parva, ponere licet $k = \mp 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Jam vero si substituitur $k + y$ pro $x$ in aequatione data, quantitas $y$ ut antea potest determinari. Aequatio deinde prima (v) dabit $\alpha = -\frac{1}{2}a$. Jam nihil restat nisi quantitatem $\delta$ determinare **). Quod ut fiat, commodissimum videtur quantitates $a$ et $\alpha$ ex aequationibus (v) eliminare, quo facto prodit aequatio

---

*) Cfr. Dissert. de tabulis Trigonometricis pag. 284.

**) Rutherford quantitatem $\delta$ semper (id est, etiamsi $\delta$ non sit

$$4(p-\delta^2)(p-4\delta^2)^2=27q^2$$

vel

$$16\delta^6-24p\delta^4+9p^2\delta^2=\frac{4p^3-27q^2}{4},$$

quae aequatio hanc sibi formam induere potest:

$$\delta^2(3p-4\delta^2)^2=\frac{4p^3-27q^2}{4},$$

unde invenitur

$$\delta=\frac{\sqrt{4p^3-27q^2}}{6p(1-\frac{4}{3p}\delta^2)}.$$

Quoniam $\frac{4}{3p}\delta^2$ est unitate minor, fractio $\frac{1}{1-\frac{4}{3p}\delta^2}$ in seriem convergentem evolvi potest. Ita fit

$$\delta=\frac{\sqrt{4p^3-27q^2}}{6p}[1+\frac{4}{3p}\delta^2+\left(\frac{4}{3p}\right)^2\delta^4+\text{etc.}].$$

Molestum quidem est quaerere $p^3$ et $q^2$ et radicem quadratam duodecim decimalibus praeditam extrahere; sed $p^3$ et $q^2$ semper quaerendae sunt, quando $p$ signum — habet, ut innotescat, num casus irreducibilis incidat, nisi quis hanc rem formulis goniometricis decernere voluerit. Melius praeterea est, quam quantitatem $a$ ad quadratum elevare, quia $p^3$ et $q^2$ e tabula dignitatum sumere licet, nisi $p$ et $q$ sunt numeri valde magni. Ad verum autem valorem quantitatis $\delta$ celeriter acceditur. Vix opus est monere, logarithmos quantitatum constantium $\frac{\sqrt{4p^3-27q^2}}{6p}$, $\frac{4}{3p}$ ante ratiocinationis initium esse sumendos.

Radices tandem imaginariae sunt quaerendae. Pars earum realis est aequalis parti dimidiae radicis realis, signo tantum mutato. Coëfficiens ipsius $i(=\delta')$ invenitur, si in aequatione

$$\tfrac{3}{4}a^2+\delta^2=\mp p$$

ponitur $\delta' i$ pro $\delta$, quo facto evadit

$$\delta'=\sqrt{\tfrac{3}{4}a^2\pm p},$$

---

parva) determinat aequatione $\delta=\sqrt{p-\frac{3}{4}a^2}$, quae suo modo invenit. Hoc submolestum videtur, quia $a$ (decem decimalibus praedita) ad quadratum elevanda est.

prout est aequatio formae primae vel secundae. Quoniam radices imaginariae satis accurate cognitae videntur esse, si quinque vel sex decimales inventae sunt, in $\delta'$ quaerenda utamur tabulis, quas Cel^us Zech, ad logarithmos summarum differentiarumque inveniendos edidit.

Ex. 1. Primum exemplum sit aequatio

$$x^3-2x-5=0,$$

in qua solvenda Newtonus et Lagrangius suam quisque methodum spectavit et quae in Lexico Klügeliano (Pars post. supplem. pag. 554—561) secundum rationem Fourierii tractatur. Quia est $\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}=\frac{25}{4}-\frac{8}{27}>0$, haec aequatio unam tantum habet radicem realem. Tabulae trigonometricae quattuor decimalium dant

$$x=2{,}095, \quad x=-1{,}047\pm 1{,}135i.$$

Quoniam decimalis tertia est $=5$, radices per 2 multiplicandae sunt, quare substituitur $\frac{x_1}{2}$ pro $x$. Ita prodit aequatio

$$x_1^3-8x_1-40=0.$$

Iam si ponitur $x_1=4{,}19+y$, invenitur

$$0{,}040059+44{,}6683y+12{,}57y^2+y^3=0$$

vel

$$y=-0{,}000896810490-\overline{9{,}4493359}y^2-\overline{8{,}35000}y^3,$$

ubi numeri linea distincti sunt logarithmi. Primus valor proxime verus sit $y_1=-0{,}000896810490$. Quia est $\log y_1=6{,}9527006_{5n}$, habebimus

$$\begin{array}{lll}
\log y_1^2=3{,}9054013 & & \\
\phantom{\log y_1^2=}9{,}4493359_n & & y_1=-0{,}000896810490 \\
\phantom{\log y_1^2=}\overline{3{,}3547372_n} & \ldots\ldots & \phantom{y_1=}-0{,}000000226327 \\
 & & \\
\log y_1^3=0{,}85810_n & & \\
\phantom{\log y_1^3=}8{,}35000_n & & \\
\phantom{\log y_1^3=}\overline{9{,}20810} & \ldots\ldots & \phantom{y_1=}+0{,}000000000016 \\
 & & y_2=\overline{-0{,}000897036801.}
\end{array}$$

Substituto itidem $y_2$, invenitur $y_3=-0{,}000897036916$. Quoniam $y_3$ dimidia tantum unitate decimalis septimae $\log y_2$ superat,

elucet, nullam nisi ultimam ipsius $y_3$ decimalem falsam esse p
Itaque est

$$x_1 = 4{,}189102963084, \quad x = 2{,}094551481542.$$

Hunc valorem cum valore apud Klügelium invento si quis
paraverit, reperiet, ultimam etiam decimalem veram forte
Denique invenitur

$$x = -1{,}0472757 \pm 1{,}135940i.$$

Ex. 2. $t^3 + 11t^2 - 102t + 181 = 0.$

Primum omnium terminus secundus summovendus est pon
$t = \frac{x-11}{3}$, quo facto prodit aequatio

$$x^3 - 1281x + 17647 = 0.$$

Exsistente $\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4} = \frac{1323}{4}$, casus irreducibilis adest. Repe
quoque $\log \operatorname{Cos} 3\varphi = 9{,}9999$, unde liquet, duas radices pro
esse aequales. Valor radicis tertiae proxime verus invenitur
$= -41{,}33$. Substituendo $-41{,}33 + y$ pro $x$ obtinebimus

$$-7{,}890637 + 3843{,}5067y - 123{,}99y^2 + y^3 = 0$$

vel

$$y = 0{,}0020529785\,98 + \overline{8{,}5086590}y^2 - \overline{6{,}41527}y^3.$$

Posito $y_1 = 0{,}002052978598$, evadit

$$y_2 = 0{,}0020531145\,61, \quad y_3 = 0{,}0020531145\,79,$$

atque ideo

$$x = -41{,}327946885421 = \alpha,$$

ubi decimalis ultima est incerta.

Jam vero quia est $\sqrt{4p^3 - 27q^2} = 189$, invenitur

$$\delta = \frac{3}{122}\left[1 + \frac{4}{3843}\delta^2 + \text{etc.}\right]$$

vel

$$\delta = 0{,}024590163934 + \overline{5{,}4081510}\delta^2,$$

ubi hi termini sufficiunt. Ex hac aequatione invenimus

$$\delta = 0{,}024590179410.$$

Exsistente praeterea $\alpha = 20{,}663973442710_5$, evadit

$$x_2 = 20,688563622120_5, \quad x_3 = 20,639383263300_5.$$

Ex aequatione $t = \frac{x-11}{3}$ tandem eruitur

$$t_1 = -17,442648961807, \quad t_2 = 3,229521207374, \quad t_3 = 3,213127754433.$$

Ex. 3. $8t^3 - 6t - 1 = 0$. (Vide Bourdon, Elem. d'Alg. Paris 1837. p. 562.)

Ponendo $2t = x$ simplicior oritur aequatio

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Quia est $\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4} = \frac{3}{4}$, casus irreducibilis locum habet. Ratio goniometrica dat $\text{Cos}\, 3\varphi = \frac{1}{2}$, $3\psi = 60^0$, atque ideo

$$x_1 = 1,88, \quad x_2 = -1,532, \quad x_3 = -0,347.$$

Si prius posuerimus $x = 1,88 + y$, inveniemus

$$0,004672 + 7,6032y + 5,64y^2 + y^3 = 0$$

vel

$$y = -0,000614478114 - \overline{9,8702827}y^2 - \overline{9,11900}y^3.$$

Quamquam coëfficiens ipsius $y^2$ paullo major est, ad verum valorem celeriter appropinquamus et invenimus

$$y_2 = -0,000614758172, \quad y_3 = -0,000614758427,$$

atque ideo

$$x_1 = 1,879385241573.$$

Jam radix tertia supputanda est. Substituendo $-0,347 + y$ pro $x$ habebimus

$$-0,000781923 - 2,638773y - 1,041y^2 + y^3 = 0$$

vel

$$y = -0,000296320676 - \overline{9,5960487}y^2 + \overline{9,57860}y^3,$$

unde

$$y_2 = -0,000296355326, \quad y_3 = -0,000296355332,$$

atque ideo

$$x_3 = -0,347296855332, \quad x_2 = -1,532088886241.$$

Ut $t$ inveniatur, valores ipsius $x$ per 2 dividendi sunt.

Si quis ipsam radicem $x_2$ computare voluisset, substituenda esset quantitas $-1,53 + y$ pro $x$, quo facto evadit

$$y = -0{,}0020938 67303 + \overline{0{,}0572954}y^2 - \overline{9{,}39548}y^3.$$

Quia coëfficiens ipsius $y^2$ magna est ($\delta$ tantum est 0,64), ad veri valorem tardius appropinquamus, sed invenimus tamen decem decimales veras. Attamen satius est hanc radicem per 5 multiplicare, si separatim computanda est. Substituendo $\frac{z}{5}$ pro $x$ prodit aequatio

$$z^3 - 75z - 125 = 0,$$

unde, posito $z = -7{,}66 + y$, invenitur

$$0{,}044904 + 101{,}0268y - 22{,}98y^2 + y^3 = 0$$

vel

$$y = -0{,}000444476119 + \overline{9{,}3569134}y^2 - \overline{7{,}99556}y^3.$$

Ita habebimus $y_2 = -0{,}000444431181$, $y_3 = -0{,}000444431190$ atque ideo

$$z = -7{,}660444431190, \quad x_2 = -1{,}532088886238,$$

qui valor a valore supra invento fere nihil discrepat.

Ex. 4. $x^3 - 96x + 362 = 0.$

Quia est $\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4} = 7$ $(4p^3 - 27q^2 = 656)$, casus irreducibilis locum habet. Ratio goniometrica suppeditat $\log \mathrm{Cos}\, 3\varphi = 9{,}999$ Ut supra invenitur $k = -11{,}31$, quare, posito $x = -11{,}31 + y$, evadit

$$1{,}028909 + 287{,}7483y - 33{,}93y^2 + y^3 = 0$$

vel

$$y = -0{,}003575725729 + \overline{9{,}0715712}y^2 - \overline{7{,}54099}y^3,$$

unde

$$y_2 = -0{,}0035742179 22, \quad y_3 = -0{,}003574219194$$

atque ideo

$$a = -11{,}3135742191 94, \quad \alpha = 5{,}6567871095 97.$$

Postea invenitur

$$\delta = \frac{\sqrt{21}}{96}\{1 + \frac{1}{72}\delta^2 + \left(\frac{1}{72}\right)^2 \delta^4\}.$$

Quoniam est $\sqrt{21} = 458\sqrt{1 + \frac{59}{52441}} = 4{,}5825756949557$, fit

$$\delta = 0,047735163489 + \overline{6,8215059}\delta^2 + \overline{4,96417}\delta^4,$$

unde

$$\delta_2 = 0,047736674253, \quad \delta_3 = 0,047736674348,$$

atque ideo

$$\alpha + \delta = 5,704523783945, \quad \alpha - \delta = 5,609050435249.$$

In his exemplis undecim decimales accuratas invenimus et facile patet, etiam plures eodem modo accipi **posse**, si primus valor proxime verus plures habet decimales quam duas. Ita tamen ratiocinatio fit molestior. Quae quum ita sint et decem vel undecim decimales accuratae saepissime sufficere videantur, hunc decimalium numerum inveniendum mihi potissimum proposui.

---

# XXV.

## Ueber eine Krümmungskugel besonderer Art.

Von
dem **Herausgeber**.

---

Aus der allgemeinen Theorie der Berührungen in der analytischen Coordinaten-Geometrie ist bekannt, dass es für krumme Flächen eine Krümmungskugel im eigentlichen Sinne, d. h. eine Kugel, welche mit der krummen Fläche in einem gewissen Punkte derselben einen Contact der zweiten Ordnung hat, nicht giebt, weil die Bestimmung einer solchen Kugel die Erfüllung von mehr Bedingungen erfordert, als willkührliche Constanten in der Gleichung der Kugel enthalten sind. Für die höhere Geodäsie, wenn man in derselben die Erde als ein Ellipsoid betrachtet, die Berechnung des Netzes aber in seinen einzelnen Dreiecken sphärisch *)

*) Mittelst des **Legendre'schen** Theorems oder einer anderen Methode übrigens noch auf die Berechnung ebener Dreiecke reducirt.

führt, ist es aber von Wichtigkeit, eine Kugel zu kennen, welche sich in gegebenen Punkten der ellipsoidischen Erdoberfläche, in der Nähe derselben, möglichst genau an die Erdoberfläche anschliesst, weshalb es auch an verschiedenen sehr scharfsinnigen Untersuchungen über diesen oder wenigstens verwandte Gegenstände, namentlich von Gauss, nicht gefehlt hat, die theilweise in grosser Allgemeinheit durchgeführt worden sind. Praktisches Bedürfniss führte mich vor Kurzem zu einigen Betrachtungen über diese Gegenstände, die ich im Folgenden in der Kürze mittheilen will, ohne denselben auch nur im Entferntesten einen anderen, als vielleicht einigen praktischen Werth beilegen zu wollen.

Die Gleichung der gegebenen Fläche will ich durch

$$f(X, Y, Z)=0,$$

die veränderlichen oder laufenden Coordinaten also durch $X$, $Y$, $Z$ bezeichnen. Die Coordinaten eines beliebigen, aber bestimmten Punktes in dieser Fläche seien $x$, $y$, $z$, welche also durch die Gleichung

$$f(x, y, z)=0$$

mit einander verbunden sind; zwei dieser Coordinaten, etwa $x$, $y$, sind als unabhängige Variabele zu betrachten; die dritte Coordinate $z$ ist von denselben abhängig. Alle im Folgenden vorkommende Differentialquotienten sind, was hier ein für alle Mal bemerkt wird, partielle Differentialquotienten, und natürlich aus der vorstehenden Gleichung zu entwickeln.

Die Coordinaten des Mittelpunkts der gesuchten Kugel seien $p$, $q$, $r$, und $R$ sei ihr Halbmesser, also

$$(X-p)^2+(Y-q)^2+(Z-r)^2=R^2$$

ihre Gleichung, natürlich unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten. Die Natur der Betrachtungen, welche wir hier anzustellen die Absicht haben, erfordert, dass diese Kugel durch den gegebenen Punkt $(xyz)$ gehe, was als erste Gleichung zur Bestimmung der vier Unbekannten $p$, $q$, $r$, $R$ die Gleichung

$$\text{I.}\quad (x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=R^2$$

giebt.

Sind nun $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ die Coordinaten eines zweiten Punkts der gegebenen Fläche, so ist

$$(x-p+\Delta x)^2+(y-q+\Delta y)^2+(z-r+\Delta z)^2$$
$$=(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2+2\{(x-p)\Delta x+(y-q)\Delta y+(z-r)\Delta z\}$$
$$+\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2,$$

also

$$R^2+2\{(x-p)\Delta x+(y-q)\Delta y+(z-r)\Delta z\}+\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2$$

oder

$$R^2\{1+2\frac{(x-p)\Delta x+(y-q)\Delta y+(z-r)\Delta z}{R^2}+\frac{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}{R^2}\}$$

das Quadrat der Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkte $(pqr)$ der zu bestimmenden Kugel. Also ist nach dem Binomischen Lehrsatze bis auf Glieder genau, welche in Bezug auf $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ von der zweiten Ordnung sind:

$$\sqrt{(x-p+\Delta x)^2+(y-q+\Delta y)^2+(z-r+\Delta z)^2}$$
$$=R+\frac{(x-p)\Delta x+(y-q)\Delta y+(z-r)\Delta z}{R}$$
$$+\frac{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}{2R}-\frac{\{(x-p)\Delta x+(y-q)\Delta y+(z-r)\Delta z\}^2}{2R^3},$$

oder

$$\sqrt{(x-p+\Delta x)^2+(y-q+\Delta y)^2+(z-r+\Delta z)^2}-R$$
$$=\frac{(x-p)\Delta x+(y-q)\Delta y+(z-r)\Delta z}{R}$$
$$+\frac{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}{2R}-\frac{\{(x-p)\Delta x+(y-q)\Delta y+(z-r)\Delta z\}^2}{2R^3},$$

wo

$$\sqrt{(x-p+\Delta x)^2+(y-q+\Delta y)^2+(z-r+\Delta z)^2}-R$$

die Differenz zwischen der Entfernung des durch die Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ bestimmten Punktes der krummen Fläche von dem Mittelpunkte der zu bestimmenden Kugel und deren Halbmesser $R$ ist.

Gehen wir nun, was hier ein für alle Mal bemerkt sei, bei allen folgenden Entwickelungen bloss bis auf Glieder der zweiten Ordnung in Bezug auf $\Delta x$, $\Delta y$, so ist zuvörderst nach dem Taylor'schen Lehrsatze für mehrere veränderliche Grössen:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x^2+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Delta y^2,$$

also:

$$(x-p)\Delta x+(y-q)\Delta y+(z-r)\Delta z$$

$$=\{x-p+(z-r)\frac{\partial z}{\partial x}\}\Delta x+\{y-q+(z-r)\frac{\partial z}{\partial y}\}\Delta y$$

$$+\tfrac{1}{2}(z-r)\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Delta y^2\},$$

$$\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2=\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}\Delta x^2+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}\Delta y^2,$$

$$\{(x-p)\Delta x+(y-q)\Delta y+(z-r)\Delta z\}^2$$

$$=\{x-p+(z-r)\frac{\partial z}{\partial x}\}^2\Delta x^2+\{y-q+(z-r)\frac{\partial z}{\partial y}\}^2\Delta y^2;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\sqrt{(x-p+\Delta x)^2+(y-q+\Delta y)^2+(z-r+\Delta z)^2}-R$$

$$=\frac{x-p+(z-r)\frac{\partial z}{\partial x}}{R}\Delta x$$

$$+\frac{y-q+(z-r)\frac{\partial z}{\partial y}}{R}\Delta y$$

$$+\left\{\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(z-r)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{2R}-\frac{\{x-p+(z-r)\frac{\partial z}{\partial x}\}^2}{2R^3}\right\}\Delta x^2$$

$$+\left\{\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+(z-r)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{2R}-\frac{\{y-q+(z-r)\frac{\partial z}{\partial x}\}^2}{2R^3}\right\}\Delta y^2$$

$$+\frac{(z-r)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{R}\Delta x\Delta y.$$

Soll nun die gesuchte Kugel in der Nähe des Punktes $(xyz)$ sich möglichst genau oder innig an die durch die Gleichung

$$f(X, Y, Z)=0$$

charakterisirte Fläche anschliessen, so müssen vor allen Dingen die willkührlichen Constanten in der Gleichung der Kugel so bestimmt werden, dass in dem obigen Ausdrucke der Differenz

$$\sqrt{(x-p+\Delta x)^2+(y-y+\Delta y)^2+(z-r+\Delta z)^2}-R$$

die Glieder der ersten Ordnung ganz unabhängig von bestimmten Werthen der Veränderungen $\Delta x$ und $\Delta y$, also für jedes $\Delta x$ und $\Delta y$, verschwinden, was nach dem Obigen zu den beiden Gleichungen:

$$\text{II.}\quad x-p+(z-r)\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad y-q+(z-r)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

führt.

Weil bekanntlich

$$X-x+\frac{\partial z}{\partial x}(Z-z)=0,\quad Y-y+\frac{\partial z}{\partial y}(Z-z)=0$$

oder

$$x-X+(z-Z)\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad y-Y+(z-Z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

die Gleichungen der Normale der krummen Fläche in dem Punkte $(xyz)$ sind, so erhellet aus den Gleichungen II. unmittelbar, dass in dieser Normale der Mittelpunkt $(pqr)$ der gesuchten Kugel jederzeit liegt.

Ein möglichst inniges Anschliessen der gesuchten Kugel an die krumme Fläche in der Nähe des Punktes $(xyz)$ erforderte nun noch, dass die Constanten in der Gleichung der Kugel ferner so bestimmt würden, dass in dem obigen Ausdrucke der Differenz

$$\sqrt{(x-p+\Delta x)^2+(y-q+\Delta y)^2+(z-r+\Delta z)^2}-R$$

auch die Glieder der zweiten Ordnung unabhängig von bestimmten Werthen von $\Delta x$ und $\Delta y$, also für jedes $\Delta x$ und $\Delta y$, verschwänden, was aber, in Verbindung mit den drei Gleichungen I. und II., offenbar mehr als vier Bedingungsgleichungen geben würde, und daher nicht möglich ist, weil die Gleichung der Kugel nur die vier willkührlichen Constanten $p$, $q$, $r$, $R$ enthält.

Um daher unseren Zweck wenigstens so nahe oder genau als möglich, so genau, wie die Natur der Sache es irgend gestattet, zu erreichen, scheint nichts Anderes übrig zu bleiben, wenigstens nichts Anderes unserem Zwecke besser zu entsprechen, als dass wir die eine noch übrig bleibende willkührliche Constante so bestimmen, dass in dem obigen Ausdrucke der Differenz

$$\sqrt{(x-p+\Delta x)^2+(y-q+\Delta y)^2+(z-r+\Delta z)^2}-R$$

die Glieder der zweiten Ordnung für alle einander absolut gleichen Werthe der Grössen $\Delta x$ und $\Delta y$ verschwinden, was, mit Rücksicht auf die beiden Gleichungen

$$x-p+(z-r)\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad y-q+(z-r)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

in II., nach dem Obigen zu der Bedingungsgleichung

$$\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}+(z-r)\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\pm 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\}=0$$

führt, in welcher man das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem $\Delta x$ und $\Delta y$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Aber eben dieses doppelte Vorzeichen macht wieder die in Rede stehende Bestimmung im Allgemeinen unmöglich, indem dieselbe, in der Weise, wie sie oben ausgesprochen worden ist, vielmehr nur in den speciellen Fällen möglich sein wird, wo der Differentialquotient $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ verschwindet, weil dann die obige Bedingungsgleichung sich auf die, ein doppeltes Zeichen nicht mehr enthaltende Gleichung

$$\text{III.}\quad \{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}+(z-r)\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\}=0$$

reducirt. Unter den gemachten Voraussetzungen haben wir also zur Bestimmung von $p$, $q$, $r$, $R$ die vier folgenden Gleichungen:

$$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=R^2,$$

$$x-p+(z-r)\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad y-q+(z-r)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}+(z-r)\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\}=0;$$

aus denen sich:

$$x-p=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}},$$

$$y-q=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}},$$

$$z-r=-\frac{\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}},$$

$$R=\pm\frac{\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

oder:

$$\text{IV.}\quad\left\{\begin{aligned}
p&=x-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}},\\
q&=y-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}},\\
r&=z+\frac{\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}},\\
R&=\pm\frac{\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}
\end{aligned}\right.$$

ergiebt, das Zeichen in der letzten Formel immer so genommen, dass $R$ positiv wird.

Diese Formeln wollen wir nun auf das Erdellipsoid anwenden, dessen Gleichung wie gewöhnlich

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{b^2}=1$$

sein mag, so dass wir also für den Punkt $(xyz)$ die Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

haben, aus welcher die sämmtlichen partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad\frac{\partial z}{\partial y},\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

entwickelt werden müssen. Ohne Schwierigkeit erhalten wir aber durch partielle Differentiation der obigen Gleichung:

$$\frac{x}{a^2}+\frac{z}{b^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{y}{a^2}+\frac{z}{b^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{z}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{z}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0;$$

folglich, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{b^2x}{a^2z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{b^2y}{a^2z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2z^2+b^2x^2}{a^2z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2z^2+b^2y^2}{a^2z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{xy}{z^3}.$$

Weil nun aber das Erdellipsoid ein Rotations-Sphäroid und die Axe der $z$ die Drehungsaxe ist, so wird offenbar die Allgemeinheit nicht im Geringsten beeinträchtigt, wenn man $y=0$ setzt, wodurch die obigen Formeln in die folgenden übergehen:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{b^2x}{a^2z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2z^2+b^2x^2}{a^2z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0;$$

oder, weil

$$b^2(x^2+y^2)+a^2z^2=a^2b^2,$$

folglich, wenn wir $y=0$ setzen,

$$a^2z^2+b^2x^2=a^2b^2$$

ist, in die folgenden:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{b^2x}{a^2z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{b^4}{a^2z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{b^2}{a^2z},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

Wegen der letzten dieser Gleichungen ist im vorliegenden Falle die Anwendung der Gleichungen IV. gestattet.

Bezeichnen wir nun die sogenannte reducirte Breite des Punktes $(xyz)$ durch $B$, so ist bekanntlich:

$$x=a\cos B,\quad z=b\sin B;$$

folglich:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{b}{a}\cot B,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{b}{a^2\sin B^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{b}{a^2\sin B}.$$

Also ist:

$$\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\}+\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\}=\frac{2a^2\sin B^2+b^2\cos B^2}{a^2\sin B^2},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{a^2\sin B^2+b^2\cos B^2}{a^2\sin B^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1+\sin B^2}{\sin B^3};$$

folglich:

$$p=a\cos B\,\{1-\frac{2a^2\sin B^2+b^2\cos B^2}{a^2(1+\sin B^2)}\},$$

$$q=0,$$

$$r=b\sin B\,\{1-\frac{2a^2\sin B^2+b^2\cos B^2}{b^2(1+\sin B^2)}\};$$

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$p=a(1-\frac{b^2}{a^2})\frac{\cos B^3}{1+\sin B^2},$$

$$q=0,$$

$$r=2b(1-\frac{a^2}{b^2})\frac{\sin B^3}{1+\sin B^2}.$$

Setzt man wie gewöhnlich

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=e^2,\quad \frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}-1=\varepsilon^2;$$

so ist:

$$p=\frac{ae^2\cos B^3}{1+\sin B^2},$$

$$q=0,$$

$$r=-\frac{2b\varepsilon^2\sin B^3}{1+\sin B^2};$$

auch ist:

$$p=\frac{ae^2\cos B^3}{1+\sin B^2},$$

$$q=0,$$

$$r=-\frac{2ae^2\sin B^3}{(1+\sin B^2)\sqrt{1-e^2}}.$$

Ferner ist

$$R=\frac{1}{ab}\cdot\frac{(2a^2\sin B^2+b^2\cos B^2)\sqrt{a^2\sin B^2+b^2\cos B^2}}{1+\sin B^2},$$

oder, weil

$$2a^2\sin B^2+b^2\cos B^2=2a^2\{1-(1-\frac{b^2}{2a^2})\cos B^2\},$$

$$a^2\sin B^2+b^2\cos B^2=a^2\{1-(1-\frac{b^2}{a^2})\cos B^2\}$$

ist, auch:

$$R=\frac{2a^2}{b}\cdot\frac{\{1-(1-\frac{b^2}{2a^2})\cos B^2\}\sqrt{1-(1-\frac{b^2}{a^2})\cos B^2}}{1+\sin B^2},$$

oder:

$$R=\frac{2a}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\{1-\frac{1}{2}(1+e^2)\cos B^2\}\sqrt{1-e^2\cos B^2}}{1+\sin B^2}.$$

Weil

$$R^2=(x-p)^2+(z-r)^2$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden auch:

$$R^2=a^2\cos B^2\{1-(1-\frac{b^2}{a^2})\frac{\cos B^2}{1+\sin B^2}\}^2$$

$$+\,b^2\sin B^2\{1-2(1-\frac{a^2}{b^2})\frac{\sin B^2}{1+\sin B^2}\}^2$$

oder

$$R^2=a^2\cos B^2\{1-\frac{e^2\cos B^2}{1+\sin B^2}\}^2+b^2\sin B^2\{1+\frac{2\varepsilon^2\sin B^2}{1+\sin B^2}\}^2,$$

welche Formeln wir jetzt der Kürze wegen nicht weiter entwickeln und reduciren wollen, da die obigen Formeln schon hinreichend sind. Auch die Ableitung zweckmässiger Näherungsformeln aus den obigen genauen Formeln unterliegt keiner Schwierigkeit.

# XXVI.

# Gedächtnissrede auf Jakob Bernoulli zur zweiten Säcularfeier seiner Geburt

gehalten von

Herrn *Rudolf Wolf.*

Aus den Mittheilungen der Berner naturf. Gesellsch. besonders abgedruckt

---

(Ich erlaube mir, diese Rede aus der vorher genannten Zeitschrift hier mitzutheilen, weil es Pflicht ist, das Gedächtniss eines so grossen Mathematikers, wie Jakob Bernoulli war, von Zeit zu Zeit zu erneuern. G.)

---

Heute vor 200 Jahren, am 27. December 1654 alten, oder am 6. Januar 1655 neuen Styles, wurde in Basel Jakob Bernoulli geboren [1]), — der Erste jener sieben Bernoulli's [2]), die, wie die Geschichte kein zweites Beispiel aufzuweisen hat, während mehr als einem Jahrhunderte die mathematischen Wissenschaften auf eine so ausgezeichnete Weise pflegten, dass ein Newton und ein Leibniz, und später wieder ein D'Alembert und ein Euler sie als ebenbürtig betrachten mussten, — dass die gelehr-

---

[1]) Bekanntlich wurde in Basel, wie an den meisten evangelischen Orten, der Gregorianische Kalender erst 1701 eingeführt, indem man die eilf ersten Tage dieses Jahres ausfallen liess. — Die *Biographie universelle* setzt den Geburtstag Jakob Bernoulli's auf den 25., Leu's Lexikon auf den 29. December 1654; Bernoulli's Eloge in den Pariser Memoiren und die *Vita Bernoullii* von J. Battier geben dagegen übereinstimmend den 27. December.

[2]) Zwei Jakob, zwei Johann, zwei Nicolaus und ein Daniel, — und noch könnte ihnen ein dritter Johann, ein zweiter Daniel und ein Christoph beigefügt werden. Vergl. Bern. Mitth. 1846, pag. 18.

ten Gesellschaften ihnen im eigentlichen Sinne des Wortes zinspflichtig wurden, — dass noch jetzt jeder Mathematiker fast auf jedem Schritte ihren Fussstapfen begegnet, und ihren Namen nicht anders ausspricht, als mit Ehrfurcht. Für den Schweizer haben aber die Bernoulli's noch eine weitere Bedeutung als für die Mathematiker im Allgemeinen: Er sieht gerade in den Bedeutendsten der Bernoulli's Männer, welche trotz den glänzendsten Anerbietungen des Auslandes den grössten Theil ihres Lebens dem Vaterlande widmeten, so z. B. successive 103 Jahre den Lehrstuhl der Mathematik in Basel bekleideten, — Männer, welche nicht nur das wissenschaftliche Leben im Vaterlande förderten, und so z. B. Hauptstützen der ältesten Schweizerischen gelehrten Gesellschaft, der 1751 gestifteten *Societas helvetica physico, mathematico, botanico-medica* [1]), waren, sondern auch in geistiger Beziehung der Schweiz im Auslande eine Geltung zu verschaffen wussten, wie sie ihr früher fast nur zugekommen war, wenn es sich um körperliche Kraft, Tapferkeit und Treue handelte. Der Schweizer soll also seine Bernoulli's feiern, sei er Mathematiker oder nicht, und es wäre Undank, das Jubiläum der Geburt Jakob Bernoulli's vorübergehen zu lassen, ohne seiner zu gedenken.

Das Leben und die Verdienste Jakob Bernoulli's sind wiederholt geschildert worden [2]), und hätte auch nur Fontenelle allein sich dieser Aufgabe unterzogen, so wäre wohl wenig beizufügen. Es mag somit hier genügen, in kurzen Worten einiger der wichtigsten Punkte zu gedenken: Vom Vater zum Theologen, von der Natur zum Mathematiker bestimmt, studirte Jakob Bernoulli öffentlich Theologie, — im Geheimen, und sogar fast ohne litterarische Hülfsmittel, Mathematik, sich die Devise wählend: *Invito patre sidera verso* [3]). Bereits hatte er sich schöne Kenntnisse in letzterm Fache erworben, als er 1676 nach glücklich bestandenem theologischen Examen das väterliche Haus verliess, — zunächst in Genf die blinde Elisabeth von Waldkirch nach eigenen Methoden unterrichtete, — dann im südlichen Frankreich eine Informator- und Prediger-Stelle bekleidete, und erst 1682, nachdem er noch Frankreich, Holland, England und Deutsch-

---

[1]) Vergl. Bern. Mitth. 1846, pag. 85.

[2]) Fontenelle in den Mémoires de Paris, 1705; Lacroix in der Biographie universelle; Meyer von Knonau in der Encyclopädie von Ersch und Gruber; Leu im Schweizerischen Lexicon; Meister in Helvetiens berühmten Männern, etc. Ferner in den mathematisch-historischen Werken von Montucla, Bossut, Gerhardt, etc. etc.

[3]) Fontenelle gibt: „Je suis parmi les astres malgré mon père.“

land bereist hatte, bleibend nach Basel zurückkehrte, — mit der mathematischen Litteratur vertraut, mit den vorzüglichsten Gelehrten persönlich bekannt, und durch zwei Gelegenheitsschriften über die Cometen [1]) in grössern Kreisen angekündigt. Mit grossem Beifalle hatte er in Basel Vorlesungen über Experimental-Physik begonnen, und mit ungewöhnlichem Erfolge seinen um 13 Jahre jüngern Bruder Johann in die höhere Mathematik eingeführt, als Leibniz 1684 in den *Actis Eruditorum* ein den meisten Mathematikern unverständliches Specimen seiner Differentialrechnung gab. Für unsern Bernoulli genügte die Andeutung. Mit der die meisten seiner Arbeiten auszeichnenden Tiefe und Feinheit drang er, inzwischen 1687 auf den Lehrstuhl der Mathematik befördert, langsam, aber sicher in das Geheimniss von Leibniz ein, und schon 1691 hatte er sich den neuen Calcul so zu eigen gemacht, dass er in den Leipziger Acten einen Abriss der Differential- und Integral-Rechnung veröffentlichen konnte, in welchem er die allgemeinen Regeln für die Tangenten, Rectificationen, Quadraturen etc. entwickelte, und dieselben auf die Parabel, die logarithmische Spirale, die loxodromische Linie etc. anwandte; auch Johann blieb nicht hinter ihm zurück, und Leibniz fühlte sich gedrungen, zu erklären, dass der neue Calcul eben so gut den beiden Bernoulli's als ihm selbst zugehöre [2]). Entdeckung folgte sich nun auf Entdeckung, — die Probleme der

---

[1]) Neuerfundene Anleitung, wie man den Lauf der Cometen in gewisse grundmässige Gesätze einrichten, und ihre Erscheinung vorhersagen könne, mit geometrischen Gründen dargethan, samt angehenkten Prognostico. Basel 1681. 4°. — Conamen novi Systematis Cometarum pro motu eorum sub calculum revocando et apparitionibus praedicendis. Amstelod. 1682. 8°. — Montucla hält (Histoire II. 394) die zweite dieser Schriften, die erste scheint er nicht zu kennen, des Namens ihres Verfassers nicht ganz würdig, und in der That stellte Bernoulli in beiden Schriften eine Theorie auf, die nie Geltung erhalten konnte: Er dachte sich nämlich die Cometen als Trabanten eines weit über Saturn stehenden Planeten, und berechnete in dieser Hypothese, dass der Comet von 1680 im Jahre 1719 wiederkehren werde. Wenn nun auch nicht zu läugnen ist, dass Dörfel gleichzeitig eine glücklichere Idee hatte, so bleibt es für den damaligen Stand der Cometen-Theorie immer noch ein Fortschritt, dass Bernoulli die Cometen als periodische Gestirne festhielt, und versuchte, ihre Rückkehr zu berechnen; — wenige Jahre später hätte er natürlich andere Principien zu Grunde gelegt. Merkwürdig ist es aber, dass auch noch Bernoulli dem Aberglauben seiner Zeit ein Opfer bringen musste: Den Kern des Cometen rettete er, — den Schweif gab er preis.

[2]) „Vestra enim non minus haec methodus, quam mea est“, schrieb Leibniz am 21. März 1694 an Johann Bernoulli.

sochrone, Brachystochrone, Kettenlinie etc. wurden in edlem, eider durch die Heftigkeit Johann Bernoulli's etwas getrübem Wettkampfe behandelt, — und der Ruhm der Bernoulli's tieg so rasch, dass Beide 1699 bei der ersten Besetzung der cht auswärtigen Mitglieder der Pariser Academie unter dieselben nd 1701 bei der durch Leibniz veranlassten Stiftung der Beriner Academie auch in diese aufgenommen wurden. Mit ausgeeichnetem, ihn über seinen Bruder Johann erhebendem Scharfinne erfasste Jakob Bernoulli die Isoperimetrie, und wenn s noch nöthig sein sollte, aus der reichen wissenschaftlichen Erndte [1]) dieses Mannes, dem nicht das lange Leben eines Joann Bernoulli's und eines Euler's vergönnt war, sondern len schon am 16. August 1705 der unerbittliche Tod dahinraffte, twas Weiteres anzuführen, so wäre vor Allem noch der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu gedenken, die von Pascal und Huyhens nur in einzelnen, auf Spiele bezüglichen Aufgaben vorbeeitet, und erst von ihm auch auf moralische und politische Fragen usgedehnt und zu einer eigenen Wissenschaft erhoben wurde [2]). Nach Jakob Bernoulli's Wunsche wurde auf seinen Grabstein lie sich immer selbst wieder erzeugende logarithmische Spirale nit den Worten: *Eadem mutata resurgo* eingegraben, — der Nachvelt nicht nur eine seiner schönsten Arbeiten, sondern auch seinen Glauben an die Unsterblichkeit in Erinnerung zu bringen.

Es ist bereits erwähnt worden, dass die Bernoulli's den Lehrstuhl der Mathematik in Basel ununterbrochen während 103 ahren bekleideten [3]), — und diese Seite ihrer Wirksamkeit verient zum Schlusse noch etwas näher betrachtet zu werden. Wohl atte schon in den älteren Zeiten der Basilia die Mathematik an erselben zuweilen namhafte Vertreter, wie z. B. Heinrich Loiti Glareanus (1488—1563) [4]), den berühmten Freund des noch erühmtern Erasmus, — Sebastian Münster (1489—1552), en ausgezeichneten Cosmographen, — Simon Grynäus (1493

---

[1]) Siehe: Jacobi Bernulli Opera. Genevae 1744. 2 Vol. in 4°.

[2]) Jacobi Bernoulli, Ars conjectandi, Opus posthumum. Accedit ractatus de Seriebus infinitis. Basil. 1713. 4°. Der Herausgeber war des erfassers Neffe, Nicolaus I Bernoulli.

[3]) Jakob von 1687—1705; Johann I 1705—1748; Johann II 1748 is 1790. — Neben ihnen war Nicolaus I von 1722—1759 Professor der ogik und des Rechtes, und Daniel von 1733—1782 Professor der Botak und Physik.

[4]) Vergl. Schreiber, Heinrich Loriti Glareanus. Freib. 1837. . — Neujahrsgeschenk der Musikgesellschaft in Zürich auf 1855, mit nem Porträt Glareans.

bis 1541)[1]), den Besorger der ersten Originalausgaben von Euklid und Ptolemäus, — Jakob Ceporinus (1499—1525), den Herausgeber des Aratus und Proclus, — etc.; wohl hatte Basel schon lange einen eigenen Lehrstuhl der Mathematik, auf dem zuweilen tüchtige Kräfte lehrten, wie z. B. Christian Wursteisen (1544 bis 1588)[2]), Peter Ryff (1552—1629), Peter Megerlin (1623 bis 1686), etc., — aber zu einer Universität für Mathematiker wurde Basel erst durch Jakob Bernoulli erhoben. Seine Biographen berichten übereinstimmend, dass durch seine mathematischen Curse eine Menge Ausländer nach Basel gezogen worden seien, und sein Bruder Johann I, sein Neffe Nicolaus I und der bekannte Jakob Hermann[3]) geben Zeugniss seiner Wirksamkeit in der Nähe. Das von ihm angefangene, durch seinen frühen Tod unterbrochene Werk wurde von seinem Nachfolger, Johann I Bernoulli, der schon bei seinem ersten Aufenthalte in Paris durch den Marquis de l'Hôpital und Varignon Frankreich mit der Differentialrechnung bekannt gemacht[4]), und als Professor in Gröningen seine Lehrgabe bekundet hatte, mit dem grössten Erfolge fortgesetzt: Aus allen Ländern Europa's strömten nicht nur Studirende, sondern Doctoren, Professoren und Academiker nach Basel, um ihn zu hören[5]), — Maupertuis, Klingenstierna, Clairaut, etc. wurden seine Schüler; aus allen Gauen der Schweiz schaarten sich junge Männer um ihn und verbreiteten heimgekehrt höhere mathematische Bildung in weitern Kreisen, — ich erwähne die Genfer Gabriel Cramer und George-Louis Lesage, die Berner Albrecht von Haller und Samuel König, den Neuenburger Moula, den Schaffhauser Thomas Spleiss, die Zürcher Johannes Scheuchzer und Johannes Gessner, etc.; und in Basel selbst war seine Wirksamkeit gross genug, um Berlin, Petersburg etc. mit Professoren und Academikern zu versehen, — wir erinnern vor Allem an den unsterblichen Euler, dann an seine Söhne Nicolaus II und Daniel Bernoulli, ferner an die Wenz, Bruckner, Merian etc. Wohl hätten auch nach seinem Tode seine Söhne Daniel und Johann II Bernoulli nicht nur die Kenntnisse, sondern auch die Gabe besessen, Basel ferner

---

[1]) Vergl. Bern. Mitth. 1854, pag. 70.

[2]) Vergl. Bern. Mitth. 1852, pag. 104.

[3]) Vergl. Bern. Mitth. 1846, pag. 21.

[4]) Vergl. Bern. Mitth. 1848, pag. 221.

[5]) Vergl. Bern. Mitth. 1848, pag. 224. — Vergl. ferner hiefür und für das Folgende: Bern. Mitth. 1845, pag. 72; 1846, pag. 23; 1847, pag. 165; 1851, pag. 151, etc.; Wolf, Johannes Gessner; Leibnitii et Bernoullii Commercium; Prévost, George-Louis Lesage, etc.

die Eigenschaft einer grossen Bildungsstätte für Mathematiker und Physiker zu erhalten, wenn nicht ein unglückseliger Stern über der alten Basilia immer höher aufgestiegen wäre, der es bald auch den berühmtesten Lehrern nicht mehr gelingen liess, ihre Hörsäle zu füllen; doch bleiben auch aus dieser spätern Periode, ausser den Söhnen Johannes II, noch Joh. Heinr. Ziegler aus Winterthur, die Huber, Socin, Fuss aus Basel, etc., zu erwähnen. — Möchte es dem Gemeinsinne der Basler und ihrer angebornen Liebe zu ihrer Universität gelingen, dieselbe bis zu ihrem vierten Jubiläum im Jahre 1860 wieder zu der alten Blüthe zu bringen, — es wäre das schönste Denkmal für die Bernoulli's, wenn ihr Lehrstuhl in neuem Glanze aufleben könnte.

---

# XXVII.

## Körperliches Raumpendel bei constanter Rotation, nebst Anwendung auf die Stabilität des Kreisels.

Von

Herrn *R. Hoppe*,

Dr. phil. und Privatdocenten an der Universität in Berlin.

---

Der in Theil XXIII. Nr. XXIII. S. 417. erschienene Aufsatz von Lottner über die Bewegung eines Rotationskörpers um einen festen Punkt seiner Axe veranlasste mich, einerseits die weitere Frage zu stellen: in welchen Fällen die Bewegungsgleichungen eines in einem Punkte festen und von der Schwerkraft sollicitirten Körpers durch Annahme einer constanten Rotationsgeschwindigkeit erfüllt werden könnten, — andererseits aus der Berechnung einer solchen Bewegung die Gesetze derjenigen Erscheinungen zu entnehmen, welche wir am Kreisel beob-

**achten können, eines Körpers, der vermöge seiner Rotation seinen Schwerpunkt fortwährend über der Horizontalebene seines Stützpunkts erhält.**

## I.

In Betreff jener Frage ergab sich, dass ausser dem von Lottner behandelten Falle eine Pendelbewegung mit constanter Rotation, wiewohl unter ziemlich speciellen Beschränkungen, möglich ist, wie ich zunächst zeigen will. Es mögen die Coordinatensysteme der $xyz$ und $x_1y_1z_1$, deren ersteres am Körper, letzteres im Raume fest ist, den festen Punkt zum gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben, und die Beziehungen zwischen den beiderseitigen Coordinaten durch die Gleichungen

$$x_1 = ax + a_1y + a_2z,$$

$$y_1 = bx + b_1y + b_2z,$$

$$z_1 = cx + c_1y + c_2z$$

ausgedrückt sein. Für die Bewegungsgleichungen will ich diejenige Form wählen, welche Laplace bei der Bewegung eines freien Körpers unter Einwirkung beliebiger Kräftepaare anwendet, indem er die drei Variabeln

$$p = a_2a_1' + b_2b_1' + c_2c_1',$$

$$q = aa_2' + bb_2' + cc_2',$$

$$r = a_1a' + b_1b' + c_1c'$$

einführt. Substituirt man für die Kräftepaare das statische Moment der Schwere des Körpers, bezeichnet durch $A$, $B$, $C$ die Trägheitsmomente in Bezug auf die Axen der $x$, $y$, $z$, setzt

$$d = g\int x\partial m, \quad e = g\int y\partial m, \quad f = g\int z\partial m,$$

und wählt zu Axen der $xyz$ diejenigen, für welche

$$\int yz\partial m = \int zx\partial m = \int xy\partial m = 0$$

ist, und zwar so, dass $d$, $e$, $f$ positiv werden, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$Ap' + (C - B)qr = ec_2 - fc_1, \tag{1}$$

$$Bq' + (A - C)rp = fc - dc_2, \tag{2}$$

$$Cr' + (B - A)pq = dc_1 - ec; \tag{3}$$

und die Gleichungen der lebendigen Kraft und der constanten Flächengeschwindigkeit in der Ebene der $xy$:

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2-h)=dc+ec_1+fc_2,$$

$$(5)\qquad Apc+Bqc_1+Crc_2=k.$$

Um die Grössen $c$, $c_1$, $c_2$ zu eliminiren, multiplicire man die vier ersten Gleichungen der Reihe nach erst mit $0, f, -e, d$, dann mit $-f, 0, d, e$, dann mit $e, -d, 0, f$, dann mit $d, e, f, 0$, und addire sie jedesmal. Bezeichnet man der Kürze wegen ihre linken Seiten durch $P$, $Q$, $R$, $S$ und setzt:

$$d^2+e^2+f^2=n,$$

so kommt:

$$(6)\qquad \begin{cases} fQ-eR+dS=nc, \\ dR-fP+eS=nc_1, \\ eP-dQ+fS=nc_2; \end{cases}$$

$$(7)\qquad dP+eQ+fR=0.$$

Die letzte Gleichung ist bereits unabhängig von den $c$; nimmt man die Quadratsumme von den drei ersten, so erhält man eine zweite Gleichung der Art; und wenn man die Werthe der $c$ in Gleichung (5) einführt, eine dritte, so dass die Functionen $p$, $q$, $r$ hinreichend bestimmt sind.

Bezeichnet man den Winkel zwischen den Axen der $z$ und $z_1$ durch $\vartheta$, den Winkel zwischen der Winkelfläche $\vartheta$ und der Ebene der $x_1z_1$ einerseits und der Ebene der $xz$ andererseits durch $\xi$ und $\eta$, so kann man mittelst bekannter Formeln die Grössen $a$, $b$, $c$ etc. auf $\vartheta$, $\xi$, $\eta$ zurückführen und findet:

$$(8)\qquad \begin{cases} p=-\cos\eta.\vartheta'+\sin\vartheta\sin\eta.\xi', \\ q=\sin\eta.\vartheta'+\sin\vartheta\cos\eta.\xi', \\ r=\eta'-\cos\vartheta.\xi'. \end{cases}$$

Hier drückt $\vartheta$ die Elongation des Pendels, $\xi$ den Winkel des horizontalen Umlaufs, $\eta$ den der Rotation um die $z$-Axe aus. Die erste hat einen natürlich gegebenen Anfang in der vertikalen Richtung und variirt zwischen 0 und $\pi$; die Horizontalbewegung hat einen willkürlichen und unabhängigen Anfang und variirt ohne Grenzen; der Anfang der Rotation hingegen ist bei einer Bewegung der $z$-Axe stets von deren Richtung abhängig und daher die

Ebene erst zu bestimmen, von welcher an man die Rotation zu rechnen hat. Nimmt man an, der Körper sei ein Rotationskörper, und der feste Punkt liege zugleich mit dem Schwerpunkte auf seiner Axe; dann hat die Bewegung der Axe keinen Einfluss auf die Rotation; letztere wird vielmehr, so oft die Axe in Ruhe kommt, immer dieselbe Geschwindigkeit haben, und 0 sein, wenn die Bewegung aus der Ruhe hervorging. In diesem Falle verschwinden die Grössen $d$, $e$, $B-A$, und die Gleichung (3) gibt ein constantes $r$. Folglich ist $r$ hier die Rotationsgeschwindigkeit und

$$\partial\eta = \cos\vartheta\partial\xi$$

die Gleichung der Anfangsebene der Rotation. Da nun der Begriff der Rotation nicht von der Gestalt des Körpers, sondern nur von der Lage des Axensystems in demselben abhängig ist, so kann man unter der Rotationsgeschwindigkeit in Bezug auf die $z$-Axe in allen Fällen nur die Grösse $r$ verstehen.

Es ist nun die Frage, unter welchen Bedingungen ein constantes $r$ den Bewegungsgleichungen genügt. Die Lösung gebe ich hier nur für den Fall, wo der Schwerpunkt des Körpers auf der Axe der $z$ liegt, so dass letztere eine Hauptaxe wird. Hier hat man $d=e=0$, $n=f^2$; die Gleichungen (6), (7) gehen in folgende über:

$$fc=Q, \quad fc_1=-P, \quad fc_2=S, \quad R=0;$$

und nach Elimination der $c$ erhält man folgende Gleichungen:

$$R=0,$$
$$P^2+Q^2+S^2=f^2,$$
$$ApQ-BqP+CrS=fk.$$

Die erste dieser Gleichungen

$$(B-A)pq=0$$

hat drei Auflösungen. Die erste, $A=B$, entspricht dem Falle eines Rotationskörpers, den ich nicht weiter betrachten will. Die beiden andern, $p=0$ und $q=0$, sind nicht wesentlich von einander verschieden, so dass es hinreicht, eine von beiden, $q=0$, zu behandeln. Dann geben die beiden noch übrigen Gleichungen:

$$A^2p'^2+(A-C)^2r^2p^2+\tfrac{1}{4}(Ap^2+Cr^2-h)^2=f^2,$$
$$A(A-C)rp^2+\tfrac{1}{2}Cr(Ap^2+Cr^2-h)=fk.$$

Soll die letztere durch ein variables $p$ erfüllt werden, so muss zu gleicher Zeit

$$C = 2A, \quad Cr(Cr^2 - h) = 2fk$$

sein. Diess vorausgesetzt, wird die erstere:

$$p'^2 + r^2p^2 + \tfrac{1}{4}(p^2 + \frac{fk}{A^2r})^2 = \frac{f^2}{A^2},$$

und zeigt, dass $p$ eine inverse elliptische Function der Zeit ist, die jedoch verschiedene Form hat, je nachdem

$$k^2 < \text{ oder } > 4A^2r^2$$

ist. Um dieselbe durch die Functionen $\Theta$ und $H$ darzustellen, setze ich vorher zur Vereinfachung im ersten Falle:

$$(9) \quad \begin{cases} k = 2Ar\cos 2\gamma, \\ r^2 + \frac{f}{A}\cos 2\gamma = n^2\cos 2\delta, \\ \frac{f}{A}\sin 2\gamma = n^2\sin 2\delta, \end{cases}$$

wo $0 < \delta < \gamma < \frac{\pi}{2}$ angenommen werden kann. Dann ergibt sich

$$P = Ap', \quad Q = -Arp, \quad R = 0;$$

$$S = \tfrac{1}{2}Ap^2 + f\cos 2\gamma;$$

$$c = -\frac{A}{f}rp, \quad c_1 = -\frac{A}{f}p', \quad c_2 = \frac{A}{2f}p^2 + \cos 2\gamma;$$

$$(10) \quad \cos\vartheta = c_2 = \frac{p^2}{2n^2}\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\delta} + \cos 2\gamma;$$

$$(11) \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{c}{c_1} = \frac{rp}{p'};$$

$$(12) \quad \begin{cases} \xi' = \frac{p\sin\eta}{\sin\vartheta} = -\frac{pc}{\sin^2\vartheta} = 2r\frac{\cos\vartheta - \cos 2\gamma}{\sin^2\vartheta} \\ = 2r\left(\frac{\sin^2\gamma}{1-\cos\vartheta} - \frac{\cos^2\gamma}{1+\cos\vartheta}\right); \end{cases}$$

und die Differentialgleichung geht über in folgende:

$$p'^2 = \tfrac{1}{4}(4n^2\sin^2\delta - p^2)(4n^2\cos^2\delta + p^2).$$

Es sei jetzt

$$p = 2n \frac{\Theta 0 H \frac{\pi}{2}}{\Theta^2 \frac{\pi}{2}} \frac{H(u+\frac{\pi}{2})}{\Theta u},$$

$$\sin\delta = \frac{H^2 \frac{\pi}{2}}{\Theta^2 \frac{\pi}{2}}, \quad \cos\delta = \frac{\Theta^2 0}{\Theta^2 \frac{\pi}{2}},$$

$$\operatorname{tg}(\gamma - \delta) = \frac{\Theta^2 \zeta}{H^2(\zeta + \frac{\pi}{2})};$$

dann findet man

$$p'^2 = 4n^2 u'^2 \Theta^2 0 H^2 \frac{\pi}{2} \frac{H^2 u \Theta^2(u+\frac{\pi}{2})}{\Theta^4 u},$$

$$4n^2 \sin^2\delta - p^2 = 4n^2 \frac{H^2 \frac{\pi}{2}}{\Theta^2 \frac{\pi}{2}} \frac{H^2 u}{\Theta^2 u},$$

$$4n^2 \cos^2\delta + p^2 = 4n^2 \frac{\Theta^2 0}{\Theta^2 \frac{\pi}{2}} \frac{\Theta^2(u+\frac{\pi}{2})}{\Theta^2 u};$$

und nach Einführung dieser Werthe

$$u = \frac{nt}{\Theta^2 \frac{\pi}{2}}.$$

Ferner erhält man aus den Werthen von $\operatorname{tg}\delta$ und $\operatorname{tg}(\gamma - \delta)$:

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\Theta^2(\zeta + \frac{\pi}{2})}{H^2 \zeta},$$

und aus Gleichung (10):

$$\frac{1 - \cos\vartheta}{2\sin^2\gamma} = 1 - \frac{p^2}{4n^2 \sin\delta \cos\delta \operatorname{tg}\gamma} = \Theta^2 \frac{\pi}{2} \frac{\Theta(u+\zeta)\,\Theta(u-\zeta)}{\Theta^2(\zeta+\frac{\pi}{2})\,\Theta^2 u},$$

$$\frac{1 + \cos\vartheta}{2\cos^2\gamma} = 1 + \frac{p^2 \operatorname{tg}\gamma}{4n^2 \sin\delta \cos\delta} = -\Theta^2 \frac{\pi}{2} \frac{H(u+\zeta+\frac{\pi}{2})\,H(u-\zeta+\frac{\pi}{2})}{H^2 \zeta\, \Theta^2 u}.$$

Aus den Gleichungen (9) folgt:

$$r = n\sqrt{\frac{\sin 2(\gamma-\delta)}{\sin 2\gamma}} = i\frac{\Theta\zeta H(\zeta+\frac{\pi}{2})}{H\zeta\Theta(\zeta+\frac{\pi}{2})}.$$

Führt man diese Werthe in Gleichung (12) ein, multiplicirt mit

$$\partial t = \frac{1}{n}\Theta^2\frac{\pi}{2}\partial u$$

und integrirt, so kommt:

$$\xi = i\left\{\frac{\Theta'(\zeta+\frac{\pi}{2})}{\Theta(\zeta+\frac{\pi}{2})} + \frac{H'\zeta}{H\zeta}\right\}u + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u-\zeta)H(u-\zeta+\frac{\pi}{2})}{\Theta(u+\zeta)H(u+\zeta+\frac{\pi}{2})}.$$

Durch blosse Substitution bereits gefundener Werthe ergibt sich aus den Gleichungen (11), (10):

$$\operatorname{tg}\eta = i\frac{\Theta\zeta H(\zeta+\frac{\pi}{2})}{H\zeta\Theta(\zeta+\frac{\pi}{2})}\,\frac{\Theta(u)H(u+\frac{\pi}{2})}{Hu\Theta(\zeta+\frac{\pi}{2})},$$

$$\cos\vartheta = -\frac{\Theta^2(\zeta+\frac{\pi}{2})\Theta(u+\zeta)\Theta(u-\zeta)+H^2\zeta H(u+\zeta+\frac{\pi}{2})H(u-\zeta+\frac{\pi}{2})}{\Theta\frac{\pi}{2}\Theta(2\zeta+\frac{\pi}{2})\Theta^2 u},$$

$$\sin\vartheta = iH\zeta\Theta(\zeta+\frac{\pi}{2})\frac{\sqrt{\Theta(u+\zeta)\Theta(u-\zeta)H(u+\zeta+\frac{\pi}{2})H(u-\zeta+\frac{\pi}{2})}}{\Theta\frac{\pi}{2}\Theta(2\zeta+\frac{\pi}{2})\Theta^2 u}.$$

In gleicher Weise findet man im zweiten Falle, wenn man

$$2Ar = -k\cos 2\gamma,\quad \frac{f}{A\cos 2\gamma} - r^2 = n^2,\quad \frac{f\operatorname{tg}2\gamma}{A} = n^2\sin 2\delta$$

setzt, wo man stets $0 < \gamma < \delta < \frac{\pi}{4}$ nehmen kann,

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\cos 2\gamma}\left(\frac{p^2}{2n^2}\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\delta} - 1\right),$$

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{rp}{p'},$$

$$\xi' = \frac{2r}{\cos 2\gamma}\left(\frac{\cos^2\gamma}{1-\cos\vartheta} + \frac{\sin^2\gamma}{1+\cos\vartheta}\right), \tag{13}$$

$$p'^2 = \tfrac{1}{4}(p^2 - 4n^2\sin^2\delta)(4n^2\cos^2\delta - p^2). \tag{14}$$

Es sei

$$p = 2n\sqrt{\sin\delta\cos\delta}\,\frac{\Theta(u+\frac{\pi}{2})}{\Theta u},$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\Theta^2 0}{\Theta^2\frac{\pi}{2}}, \quad \operatorname{tg}\gamma = -\frac{H^2\zeta}{H^2(\zeta+\frac{\pi}{2})};$$

so ergibt sich:

$$p'^2 = 4n^2\sin\delta\cos\delta\, H^4\frac{\pi}{2}\,\frac{H^2uH^2(u+\frac{\pi}{2})}{\Theta^4 u}\,u'^2,$$

$$p^2 - 4n^2\sin^2\delta = 4n^2\sin\delta\cos\delta\,\frac{H^2\frac{\pi}{2}}{\Theta^2\frac{\pi}{2}}\,\frac{H^2(u+\frac{\pi}{2})}{\Theta^2 u},$$

$$4n^2\cos^2\delta - p^2 = 4n^2\sin\delta\cos\delta\,\frac{H^2\frac{\pi}{2}}{\Theta^2 0}\,\frac{H^2 u}{\Theta^2 u};$$

und nach Einführung der Werthe in Gleichung (14):

$$u = \frac{nt\sqrt{\sin\delta\cos\delta}}{\Theta 0\Theta\frac{\pi}{2}} = \frac{nt}{\sqrt{\Theta^4 0 + \Theta^4\frac{\pi}{2}}}.$$

Ferner erhält man:

$$\frac{1-\cos\vartheta}{2\cos^2\gamma}\cos 2\gamma = 1 - \frac{p^2\operatorname{tg}\gamma}{4n^2\sin\delta\cos\delta} = H^2\frac{\pi}{2}\,\frac{\Theta(u+\zeta)\,\Theta(u-\zeta)}{H^2(\zeta+\frac{\pi}{2})\,\Theta^2 u},$$

$$\frac{1+\cos\vartheta}{2\sin^2\gamma}\cos 2\gamma = -1 + \frac{p^2\cot\gamma}{4n^2\sin\delta\cos\delta} = -H^2\frac{\pi}{2}\,\frac{\Theta(u+\zeta+\frac{\pi}{2})\Theta(u-\zeta+\frac{\pi}{2})}{H^2\zeta\Theta^2 u},$$

$$r = n\sqrt{\frac{\sin 2\delta}{\sin 2\gamma} - 1} = in\sqrt{\sin\delta\cos\delta}\,\frac{H^2\frac{\pi}{2}\Theta\zeta\Theta(\zeta+\frac{\pi}{2})}{\Theta 0\Theta\frac{\pi}{2}H\zeta H(\zeta+\frac{\pi}{2})}.$$

**Führt man diese Werthe in Gleichung (13) ein, multiplicirt mit**

$$\partial t = \frac{\Theta 0 \Theta \frac{\pi}{2}}{n \sqrt{\sin\delta \cos\delta}} \partial u$$

**und integrirt, so kommt**

$$\xi = i \left\{ \frac{H'\zeta}{H\zeta} + \frac{H'(\zeta + \frac{\pi}{2})}{H(\zeta + \frac{\pi}{2})} \right\} u + \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(u-\zeta)\Theta(u-\zeta+\frac{\pi}{2})}{\Theta(u+\zeta)\Theta(u+\zeta+\frac{\pi}{2})},$$

**und für die Grössen $\eta$ und $\vartheta$ ergibt sich:**

$$\operatorname{tang}\eta = -i \frac{\Theta\zeta\Theta(\zeta+\frac{\pi}{2})}{H\zeta H(\zeta+\frac{\pi}{2})} \frac{\Theta u \Theta(u+\frac{\pi}{2})}{H u H(u+\frac{\pi}{2})},$$

$$\cos\vartheta = -\frac{H^2(\zeta+\frac{\pi}{2})\Theta(u+\zeta)\Theta(u-\zeta) + H^2\zeta\Theta(u+\zeta+\frac{\pi}{2})\Theta(u-\zeta+\frac{\pi}{2})}{H\frac{\pi}{2} H(2\zeta+\frac{\pi}{2})\Theta^2 u},$$

$$\sin\vartheta = i H\zeta H(\zeta+\frac{\pi}{2}) \frac{\sqrt{2\Theta(u+\zeta)\Theta(u-\zeta)\Theta(u+\zeta+\frac{\pi}{2})\Theta(u-\zeta+\frac{\pi}{2})}}{H\frac{\pi}{2} H(2\zeta+\frac{\pi}{2})\Theta^2 u}.$$

**Hiermit sind für beide Fälle die sämmtlichen topischen Grössen explicite durch die Zeit ausgedrückt. Dass diess bei $\xi$ nur in imaginärer Form möglich ist (indem $\zeta$ die Form $x\sqrt{-1}$ hat), haben beide Fälle mit dem Falle eines Rotationskörpers gemein.**

**Es ist leicht, von der hier berechneten Bewegung eine Anschauung zu gewinnen. Beachtet man, dass ohne Unterschied beider Fälle**

$$-\frac{\sin\vartheta . \xi'}{\vartheta'} = \operatorname{tg}\eta = \frac{rp}{p'}$$

**ist, und dass erstere Grösse die Tangente des Winkels zwischen der Bahn der $z$-Axe und der durch sie gehenden Vertikalebene ausdrückt, nach derselben Seite hin, wo auch $\eta$ den Winkel zwischen der Ebene der $yz$ und der Vertikalebene darstellt: so erkennt man, dass die Ebene der $yz$ fortwährend die Bahn der**

$z$-Axe berührt. Dieser Umstand ist der Grund, warum die ganze Bewegung vom Trägheitsmomente $B$ unabhängig ist.

Im ersten Falle verschwinden $p$ und $p'$ abwechselnd nach Ablauf jeder Periode; daher gehen in denselben Zeitpunkten abwechselnd die Ebenen der $yz$ und $xz$ durch die Verticalebene; und da beim Verschwinden von $p$ $\vartheta$ seinen grössten Werth hat, so bildet die Bahn in ihren höchsten Punkten Rückkehrpunkte. $\cos\vartheta$ variirt zwischen den Grenzen

$$\cos 2\gamma, \quad \mathrm{tg}^2\delta \sin 2\gamma + \cos 2\gamma,$$

deren Unterschied abnimmt und jede Kleinheit erreicht, wenn $r$ bei constantem $\gamma$ in's Unendliche wächst. Man kann daher durch hinreichend schnelle Rotation das Sinken des Pendels bis auf jeden Grad vermindern und die Bewegung einer kreisförmigen so nahe bringen als man will.

Im zweiten Falle verschwindet $p'$ sowohl für den grössten, als für den kleinsten Werth von $\vartheta$, während $p$ nie verschwindet. Daher kann die Ebene der $yz$ keine Umdrehung erleiden, sondern nur oscilliren, so dass die Ebene der $xz$ nach jeder Viertelperiode vertical steht. Hier variirt $\cos\vartheta$ zwischen den Grenzen

$$\frac{\mathrm{tg}\,\delta \sin 2\gamma - 1}{\cos 2\gamma}, \quad \frac{\cot\delta \sin 2\gamma - 1}{\cos 2\gamma},$$

deren erstere stets negativ ist, und die einander gleich werden für $\delta = \frac{\pi}{4}$ oder

$$r^2 = -\frac{f}{A}\cos\vartheta.$$

In diesem Falle wird

$$\cos\vartheta = \frac{\sin 2\gamma - 1}{\cos 2\gamma}, \quad \cos 2\gamma = \frac{-2\cos\vartheta}{1 + \cos^2\vartheta},$$

und die Horizontalgeschwindigkeit, welche die Axe in constanter Neigung zu erhalten vermag, ist demnach

$$\xi' = \sqrt{\frac{f}{-A\cos\vartheta}},$$

ein Resultat, das sich unter allgemeinern Voraussetzungen aus Gleichung (2) ableiten lässt.

Die verticale Stellung der Axe tritt nur ein auf der Grenze zwischen beiden Fällen, nämlich für $k = -2Ar$, d. i. für $\gamma = \frac{\pi}{2}$

im Sinne der Gleichungen (9). Hier wird entweder $\delta = 0$ oder $\delta = \frac{\pi}{2}$. Für $\delta = 0$ verschwinden $p$ und $p'$, und $\vartheta$ wird constant $= \varkappa$, mithin nach dem Vorigen:

$$r \geqq \sqrt{\frac{f}{A}}.$$

Für $\delta = \frac{\pi}{2}$ wird $\Theta \frac{\pi}{2} = \infty$, daher steigt die Axe fortwährend, ohne die Verticale je zu erreichen. Hier ist

$$p'^2 = \tfrac{1}{4}p^2(4n^2 - p^2),$$

woraus sich durch Integration ergibt:

$$p = \frac{4n}{e^{nt} + e^{-nt}},$$

$$\cos\vartheta = \frac{8\left(1 - \frac{Ar^2}{f}\right)}{(e^{nt} + e^{-nt})^2} - 1,$$

$$\xi' = \frac{r(e^{2nt} + 1)^2}{(e^{2nt} - 1)^2 + \frac{4Ar^2}{f}e^{2nt}},$$

$$\xi = rt + \operatorname{arctg} \frac{f(e^{2nt} - 1) + 2Ar^2}{2Arn},$$

wo $n = \sqrt{\frac{f}{A} - r^2}$ gesetzt ist. Der kleinste Werth von $\vartheta$ findet statt für $t = 0$, das ist:

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{2Ar^2}{f}.$$

## II.

Ein körperliches Pendel hat vor einem einfachen die Eigenthümlichkeit, dass es über der durch den festen Punkt gehenden Horizontalebene schwingen kann, ohne durch dieselbe zu gehen. Diese Art Bewegung will ich jetzt für die genannten Fälle constanter Rotation besonders betrachten, und nehme daher von nun an überall an, dass $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ sei. Der erste Fall constanter Rota-

tion fand statt für $A=B$, wo die Gleichungen (4), (5), (3) in folgende übergehen:

$$(15)\qquad A(\vartheta'^2+\sin^2\vartheta.\xi'^2)+Cr^2-h=2f\cos\vartheta,$$

$$(16)\qquad A\sin^2\vartheta.\xi'=Cr\cos\vartheta-k,$$

$$\eta'-\cos\vartheta.\xi'=r.$$

Nach Elimination von $\xi'$ erhält man

$$(17)\quad A^2\sin^2\vartheta.\vartheta'^2=A(2f\cos\vartheta+h-Cr^2)\sin^2\vartheta-(Cr\cos\vartheta-k)^2.$$

Bezeichnet $-\alpha$ das Maximum, $-\beta$ das Minimum von $\cos\vartheta$, wo $\alpha$ und $\beta$ stets positiv sind, so erhält die Gleichung folgende Form:

$$(18)\quad \sin^2\vartheta.\vartheta'^2=\frac{2f}{A}(-\cos\vartheta-\alpha)(\beta+\cos\vartheta)(\gamma+\cos\vartheta).$$

Für $\vartheta=0$ und $\vartheta=\pi$ wird der erste Ausdruck von $\sin^2\vartheta.\vartheta'^2 \overline{\overline{<}} 0$, folglich kann $\gamma$ nicht zwischen $-1$ und $1$ enthalten sein. Für $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ wird er

$$=-\frac{2f}{A}\alpha\beta\gamma,$$

und muss positiv oder negativ sein, jenachdem der Werth von $\vartheta$ innerhalb der Grenzen der Bewegung liegt oder nicht. Beziehungsweise wird auch $\alpha\beta$ negativ oder positiv sein, folglich ist ohne Ausnahme

$$\gamma \overline{\overline{>}} 1.$$

Identificirt man die Gleichungen (17), (18), so ergibt sich, wenn man $r$ als positiv betrachtet,

$$Cr=\sqrt{\frac{Af}{2}}\{\sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}\pm\sqrt{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}\},$$

$$k=\sqrt{\frac{Af}{2}}\{-\sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}\pm\sqrt{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}\},$$

$$h=Cr^2+\frac{k^2}{A}-2f\alpha\beta\gamma.$$

Sind demnach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegeben, so sind im Allgemeinen zwei wesentlich verschiedene Bewegungen möglich, welche dem obern und untern Vorzeichen entsprechen. Beide werden identisch für

$Cr = -k$, und dieser Fall tritt ein für $\beta = 1$ und für $\gamma = 1$. Es sei zuerst $\gamma > 1$. Dann bildet der Fall des Durchgangs der Axe durch die Verticale, ausgedrückt durch $\beta = 1$, die Grenze zwischen der Bewegung mit überwiegender Rotation ($Cr > -k$) und der Bewegung mit überwiegender Flächengeschwindigkeit ($Cr < -k$).

Was den Fall $\gamma = 1$ betrifft, so erhält man $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ als Wurzeln der Gleichung

$$2Afx^3 - \{C^2r^2 - A(Cr^2 - h)\}x^2 - 2(Af + Crk)x - A(Cr^2 - h) - k^2 = 0,$$

welche für $Cr = -k$ übergeht in

$$(19)\quad (x-1)\{2Af(1-x)^2 + (C^2r^2 - A(Cr^2 - h + 6f))(1-x) + 2A(Cr^2 - h + 2f)\} = 0;$$

daher ist $\gamma = 1$, wenn der Werth 1 nicht zwischen den zwei übrigen Wurzeln enthalten, das heisst, wenn

$$Cr^2 - h + 2f > 0$$

ist. Hieraus ergibt sich folgende Regel.

Die Axe geht durch die Verticale, wenn erstens die Rotation in entgegengesetztem Sinne von dem der Flächengeschwindigkeit stattfindet, wenn zweitens erstere mit dem zugehörigen Trägheitsmomente multiplicirt dem absoluten Werthe nach der letzteren gleich ist, und wenn drittens die lebendige Kraft hinreicht, den Körper mit seiner Rotation bis zur verticalen Stellung zu erheben.

Erreicht die Axe die Verticale nicht, so können drei Ursachen stattfinden: entweder ist die Rotation im Verhältniss zur Flächengeschwindigkeit zu klein oder zu gross, oder die lebendige Kraft nicht ausreichend.

Da es der Zweck dieses Abschnittes ist, eine Uebersicht der verschiedenen Fälle zu geben, welche bei der Bewegung des Kreisels vorkommen können, so lasse ich eine Reihe solcher Aufgaben folgen, welche zur Orientirung in der Mannichfaltigkeit der Erscheinungen besonders geeignet scheinen. Es möge durch den Index o der anfängliche Werth einer jeden Variabeln bezeichnet sein.

1. Welche Bewegung erfolgt, wenn dem Kreisel in irgend einer geneigten Stellung eine blosse Rotation ertheilt wird?

Hier hat man

$$r = \eta_0', \quad k = Cr\cos\vartheta_0, \quad h = Cr^2 - 2f\cos\vartheta_0.$$

Die Gleichung (19), welche in folgende übergeht:

$$(x+\cos\vartheta_0)\{2Af(1-x^2)+C^2r^2(x+\cos\vartheta_0)\}=0,$$

hat die Wurzeln:

$$\alpha=\frac{C^2r^2-F}{4Af},\quad \beta=-\cos\vartheta_0,\quad \gamma=\frac{C^2r^2+F}{4Af},$$

wo $F=\sqrt{C^4r^4+8Af(2Af+C^2r^2\cos\vartheta_0)}$ gesetzt ist. Damit die erste positiv sei, muss

$$2Af<-C^2r^2\cos\vartheta_0$$

sein. Alsdann ist sie auch, wie man leicht findet, stets kleiner als die zweite, mithin $\vartheta_0$ der grösste Werth, den $\vartheta$ erreichen kann.

Nun ist die Tangente des Winkels zwischen der Bahn der Axe und der Verticalebene:

$$\frac{\sin\vartheta.\xi'}{\vartheta'}=Cr\sin\vartheta\sqrt{\frac{\cos\vartheta-\cos\vartheta_0}{2Af\sin^2\vartheta-C^2r^2(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)}},$$

im Anfang der Bewegung $=0$; folglich bewegt sich die Axe im Anfange vertical nach unten, wendet sich dann allmälig, so dass sie für $\cos\vartheta=-\alpha$ eine horizontale Bewegung hat und steigt bis $\vartheta=\vartheta_0$, wo die Bahn einen Rückkehrpunkt bildet.

2. Welche Horizontalgeschwindigkeit muss ausser der Rotation dem Kreisel ertheilt werden, damit er nicht anfänglich sinke?

Für $\vartheta_0'=0$ wird

$$Cr^2-h=2f\cos\vartheta_0-A\sin^2\vartheta_0.\xi_0'^2,$$

$$k=Cr\cos\vartheta_0-A\sin^2\vartheta_0.\xi_0',$$

daher

$$\vartheta'^2=(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)\left\{\frac{2f}{A}-\frac{C^2r^2}{A^2}\frac{\cos\vartheta-\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta}\right.$$

$$\left.-\frac{2Cr}{A}\frac{\sin^2\vartheta_0}{\sin^2\vartheta}\xi_0'-\frac{\sin^2\vartheta_0}{\sin^2\vartheta}(\cos\vartheta+\cos\vartheta_0)\xi_0'^2\right\}.$$

Der erste Factor ist positiv oder negativ, jenachdem $\vartheta_0$ der grösste oder kleinste Werth von $\vartheta$ ist. Ein Gleiches gilt daher auch vom zweiten. Für $\vartheta=\vartheta_0$ wird der zweite Factor

$$=\frac{2f}{A}-\frac{2Cr}{A}\xi_0'-2\xi_0'^2\cos\vartheta_0.$$

Damit er negativ sei, muss er erstlich in Bezug auf $\xi_0'$ zwei reelle Factoren haben, d. h. es muss

$$C^2r^2 > -4Af\cos\vartheta_0$$

sein, und überdiess muss $\xi_0'$ zwischen den beiden Wurzeln enthalten sein:

$$\frac{Cr \pm \sqrt{C^2r^2 + 4Af\cos\vartheta_0}}{-2A\cos\vartheta_0}.$$

3. Welche Horizontalgeschwindigkeit muss der Axe ertheilt werden, damit sie in der Horizontalbewegung beharre?

Die einzige Bedingung ist, dass $\alpha = \beta$ sei, und diess findet dem Vorigen zufolge statt für

$$\xi_0' = \frac{Cr \pm \sqrt{C^2r^2 + 4Af\cos\vartheta_0}}{-2A\cos\vartheta_0}.$$

Aus der Gleichung der Flächengeschwindigkeit geht hervor, dass alsdann $\xi'$ constant wird.

4. Welche Rotations- und Horizontalgeschwindigkeit muss dem Kreisel ertheilt werden, damit die Axe durch die Verticale gehe?

Der oben aufgestellten Regel zufolge wird erfordert, dass

$$Cr = -k, \quad Cr^2 - h + 2f < 0$$

sei; diess gibt nach den Gleichungen (15), (16), wenn man die anfänglichen Werthe der Variabeln einführt und daraus $k$ und $h$ bestimmt, die beiden Bedingungen:

$$\xi_0' = \frac{Cr}{A(1-\cos\vartheta_0)},$$

$$C^2r^2 > 2Af(1-\cos\vartheta_0).$$

Es müssen mithin $r$ und $\xi_0'$ ein bestimmtes Verhältniss haben und überdiess gross genug sein.

5. Welche Geschwindigkeiten müssen dem Kreisel ertheilt werden, damit die Axe ohne Aufhören steige?

Die Zeit ist, wie leicht zu sehen, eine elliptische Function erster Gattung von $\cos\vartheta$ für den Modulus

$$\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}.$$

Die Periode wird daher unendlich gross, wenn $\beta = \gamma$ ist, d. wenn beide Grössen $=1$ sind. Hieraus sieht man zunächst, d $\vartheta$ keinen andern Grenzwerth haben kann als $\pi$. Lässt man d gemäss in Gleichung (19) auch den zweiten Factor für $x=1$ schwinden, so erhält man:

$$Cr = -k, \quad Cr^2 - h + 2f = 0$$

oder

$$\xi_0' = \frac{Cr}{A(1-\cos\vartheta_0)}, \quad C^2 r^2 = 2Af(1-\cos\vartheta_0),$$

woraus die Werthe hervorgehen:

$$r = \frac{2\sqrt{Af}}{C}\sin\frac{\vartheta_0}{2}, \quad \xi_0' = \sqrt{\frac{f}{A}}\frac{1}{\sin\frac{\vartheta_0}{2}},$$

$$k = -2\sqrt{Af}\sin\frac{\vartheta_0}{2}, \quad h = 2f\left(1 - \frac{2A}{C}\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\right),$$

$$\xi' = 2\sqrt{\frac{f}{A}} \cdot \frac{\sin\frac{\vartheta_0}{2}}{1-\cos\vartheta},$$

$$\vartheta'^2 = \frac{2f}{A}\cot^2\frac{\vartheta}{2}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta).$$

Die Integration der zwei letzten Gleichungen gibt:

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{2\cos\frac{\vartheta_0}{2}}{e^{t\sqrt{\frac{f}{A}}\cos\frac{\vartheta_0}{2}} + e^{-t\sqrt{\frac{f}{A}}\cos\frac{\vartheta_0}{2}}},$$

$$\xi = t\sqrt{\frac{f}{A}}\sin\frac{\vartheta_0}{2} + \operatorname{arctg}\frac{e^{2t\sqrt{\frac{f}{A}}\cos\frac{\vartheta_0}{2}} - \cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}.$$

6. Welche Rotationsgeschwindigkeit muss der Kreisel verticaler Stellung zum wenigsten haben, um im stabilen Glei gewicht zu sein?

Die Bedingung lässt sich aus jedem der vier zuletzt betra teten Fälle abnehmen, indem man nur $\vartheta_0 = \pi$ setzt und $\xi'$ gleichgültig ansieht. Es zeigt sich in voller Uebereinstimmu dass, wenn

$$r \geqq \frac{2\sqrt{Af}}{C}$$

ist, die Axe ihre verticale Stellung nicht verlassen kann.

Das letzte Resultat lässt sich mit voller Genauigkeit unbeschadet der Reibung auf einen wirklichen Kreisel anwenden. Er wird seine verticale Stellung gerade in dem Augenblicke verlassen, wo seine Geschwindigkeit durch Reibungswiderstände auf den angegebenen Werth reducirt ist.

Es bleibt nun noch übrig, die Kreiselbewegung anderer als Rotationskörper zu untersuchen. In Betreff der beiden Fälle, wo sich infolge der constanten Rotationsgeschwindigkeit die Bewegung vollständig berechnen liess, hat sich gezeigt, dass sowohl eine Bewegung mit überwiegender Rotation ($Cr > -k$) als mit überwiegender Flächengeschwindigkeit, über der Horizontalebene des festen Punktes möglich ist. Die speciellen Bedingungen sind bereits aufgestellt worden. Den Fall einer Circularbewegung jedoch, welcher auch den einer Rotation um die vertical stehende Axe in sich begreift, will ich noch besonders betrachten, insofern die Bedingungen sich hier unter allgemeinern Voraussetzungen ableiten lassen.

Wollte man in den allgemeinen Bewegungsgleichungen $\vartheta$ constant setzen, so würde man finden, dass (den einen Fall $A=B$ ausgenommen) auch $\eta$, und demzufolge $\xi'$ constant wird. Da diese Untersuchung ohne positives Resultat, daher ohne Interesse ist, so beginne ich sogleich mit der Voraussetzung, dass $\vartheta$, $\eta$ und $\xi'$ constant seien. Die Gleichungen (1), (2), (3), deren jede alsdann eine Folge der beiden anderen ist, geben nach Elimination von $\xi'^2$ nur die eine Gleichung

$$\text{(20)} \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{d}{f}\,\frac{B-C}{A-B}\,\frac{1}{\sin\eta} + \frac{e}{f}\,\frac{C-A}{A-B}\,\frac{1}{\cos\eta}.$$

Die Geschwindigkeit gibt Gleichung (3) in folgendem Ausdrucke:

$$\text{(21)} \qquad \xi'^2 = \frac{\dfrac{d}{\sin\eta} - \dfrac{e}{\cos\eta}}{(A-B)\sin\vartheta},$$

eine Gleichung, die sich unter zwei um $\pi$ verschiedenen Werthen von $\eta$ immer nur für einen erfüllen lässt.

Setzt man

$$\frac{2d}{f}\,\frac{B-C}{A-B} = \varrho\sin\varphi, \quad \frac{2e}{f}\,\frac{C-A}{A-B} = \varrho\cos\varphi;$$

so wird

$$\operatorname{tg}\vartheta = \varrho\,\frac{\sin(\eta+\varphi)}{\sin 2\eta},$$

und hat ein Maximum und ein Minimum für

$$\operatorname{tg}\eta = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Letzteres ist positiv und sei $= \operatorname{tg}\vartheta_1$, ersteres negativ $= -\operatorname{tg}\vartheta_1$, und zwar hat man:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \varrho(\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}\varphi + \cot^{\frac{2}{3}}\varphi)^{\frac{3}{2}}.$$

Während nun $\eta$ von $-\varphi$ bis $2\pi-\varphi$ wächst, variirt $\vartheta$ einmal zwischen 0 und $\pi-\vartheta_1$ und einmal zwischen $\pi$ und $\vartheta_1$; daher gibt es für jedes $\vartheta$ zwischen $\vartheta_1$ und $\pi-\vartheta_1$ vier, für jedes $\vartheta$ ausserhalb dieser Grenzen zwei Werthe von $\eta$, welche der Gleichung (20) genügen. Erstere liegen in allen vier Quadranten, so dass stets zwei von ihnen die Gleichung (21) befriedigen können; letztere in denjenigen, wo $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\eta$ entgegengesetztes Zeichen haben, so dass nur einer von Anwendung ist.

Für jede Neigung der Axe gibt es also im Allgemeinen eine oder zwei Lagen des Körpers, in denen er sich kreisförmig bei bestimmter Geschwindigkeit so um die Verticale dreht, dass er dieser immer dieselbe Seite zukehrt. Die Lage findet man bei gegebener Neigung durch Auflösung der Gleichung (20) nach $\eta$, und die Geschwindigkeit durch Gleichung (21). Für $\sin\vartheta = 0$ wird im Allgemeinen $\xi'^2$ unendlich gross. Lässt man den Zähler

$$\frac{d}{\sin\eta} - \frac{e}{\cos\eta}$$

verschwinden, so wird

$$\operatorname{tg}\vartheta = \pm\frac{\sqrt{d^2+e^2}}{f},$$

das heisst, der Schwerpunkt liegt auf der Verticale; und $\xi' = 0$, wenn nicht $d = e = 0$ ist. Nur in letzterem Falle ist demnach eine Rotation um die verticale Axe möglich.

Hier wird Gleichung (20):

$$f(A-B)\sin\eta\cos\eta\operatorname{tg}\vartheta = 0.$$

Für $\cos\eta = 0$ gibt Gleichung (2):

$$(A-C)\xi'^2\cos\vartheta = f.$$

Sobald also $C > A$ ist, ist bei bestimmter Geschwindigkeit eine Circularbewegung über der Horizontalebene des festen Punktes bei jeder Neigung der Axe möglich. Für $\vartheta = \pi$ erhält man:

$$\xi' = \sqrt{\frac{f}{C-A}},$$

und zwar drückt hier $\xi'$ die Rotationsgeschwindigkeit aus, weil $r = \eta' + \xi' = \xi'$ ist.

---

# XXVIII.

## Ueber die Singularitäten der Flächen.

Von

Herrn Doctor *Maur*,

commissarischem Lehrer am kathol. Gymnasium zu Cöln.

---

### §. 1.

Gewöhnlich drückt man eine Fläche durch eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen aus. Wenn diese Veränderlichen Punktcoordinaten bedeuten, so stellt jedes System von Werthen für die drei Veränderlichen, welches der gegebenen Gleichung genügt, einen Punkt der Fläche dar; sind es aber Plancoordinaten, so bestimmt jedes System von Werthen für die drei Veränderlichen, welches der gegebenen Gleichung genügt, eine Ebene, welche die Fläche umhüllt. Wenn eine Fläche durch Punktcoordinaten ausgedrückt ist, so findet man in jedem Punkte nur eine einzige Berührungsebene; wenn sie aber durch Plancoordinaten ausgedrückt ist, so findet man in jeder umhüllenden Ebene nur einen einzigen Berührungspunkt. Die Wahrheit dieser beiden Sätze folgt leicht aus §. 3. In besonderen Fällen jedoch erleiden sie eine Beschränkung. Eine Fläche, bei welcher dieser besondere Fall eintritt, hat eine Singularität.

Es gibt daher zwei Arten von Singularitäten: singuläre Punkte, d. h. Punkte, in welchen die Fläche mehrere Berührungsebenen

hat, und singuläre Ebenen, d. h. umhüllende Ebenen der Fläche, in welchen mehrere Berührungspunkte liegen.

## §. 2.

Gewöhnlich ist die Gleichung einer Fläche nicht homogen. Wenn man aber die ursprünglichen Veränderlichen $p$, $q$, $r$ durch neue Veränderliche $\frac{P}{S}$, $\frac{Q}{S}$, $\frac{R}{S}$ ersetzt, so wird sie homogen zwischen den neuen Veränderlichen $P$, $Q$, $R$, $S$. Diese sind lineare Funktionen der ursprünglichen Veränderlichen; wenn insbesondere $S$ eine Constante oder gleich der Einheit ist, so ist die neue Gleichung identisch mit der ursprünglichen.

## §. 3.

Es sei

$$U = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer Fläche $n$ter Ordnung oder $n$ten Grades. Sie sei homogen zwischen den vier Veränderlichen $p$, $q$, $r$, $s$.

Aus dem Lehrsatze von den homogenen Funktionen folgt:

$$\frac{dU}{dp}.p + \frac{dU}{dq}.q + \frac{dU}{dr}.r + \frac{dU}{ds}.s \equiv n.U = 0.$$

Wenn man die partiellen Differential-Quotienten als constant ansieht oder, was dasselbe ist, sie auf bestimmte Werthe der Veränderlichen, $p'$, $q'$, $r'$, $s'$, bezieht und sie zur Unterscheidung einklammert, so stellt die Gleichung

$$\left(\frac{dU}{dp'}\right)p + \left(\frac{dU}{dq'}\right)q + \left(\frac{dU}{dr'}\right)r + \left(\frac{dU}{ds'}\right)s = 0 \tag{2}$$

einen geometrischen Ort erster Ordnung oder ersten Grades dar, je nachdem die Veränderlichen Punkt- oder Plancoordinaten bedeuten.

Wenn die Werthe $p'$, $q'$, $r'$, $s'$ die Gleichung (1) befriedigen, so befriedigen sie auch die Gleichung (2); denn diese enthält die Gleichung (1) als Faktor. Wenn man ferner die Gleichung (1) und die Gleichung (2) vollständig differentiirt und die partiellen Differential-Quotienten auf dieselben Werthe der Veränderlichen bezieht, so erhält man identisch dasselbe. Wenn nun die Veränderlichen Punktcoordinaten sind, so stellt die Gleichung (2)

die Ebene dar, welche die Fläche $U=0$ im Punkte $(p'q'r's')$ berührt. Denn die Gleichung (2) ist vom ersten Grade und ihr genügen ferner die Werthe $p', q', r', s'$; also stellt sie eine Ebene dar, welche durch den Punkt $(p'q'r's')$ geht. Dieser liegt aber auch in der Fläche $U=0$. Ausserdem sind endlich für diesen Punkt auch die partiellen Differential-Quotienten der Ebene und der Fläche einander gleich.

Sind aber die Veränderlichen Plancoordinaten, so stellt die Gleichung (2) den Punkt dar, in welchem die Fläche $U=0$ von der umhüllenden Ebene $(p'q'r's')$ berührt wird; denn die unmittelbar darauf folgenden umhüllenden Ebenen gehen ebenfalls durch den Punkt (2). Ausserdem ersieht man aus der Form der Gleichung (2), dass für das eine Coordinatensystem die Berührungsebene in jedem Punkte, für das andere aber der Berührungspunkt in jeder umhüllenden Ebene immer nur ein einziger und vollkommen bestimmter ist, ausser wenn gleichzeitig

$$\left(\frac{dU}{dp'}\right)=0,\quad \left(\frac{dU}{dq'}\right)=0,\quad \left(\frac{dU}{dr'}\right)=0,\quad \left(\frac{dU}{ds'}\right)=0$$

ist.

## §. 4.

Aus dem Lehrsatze von den homogenen Funktionen folgt ferner:

$$\frac{d^2U}{dp^2}p^2+\frac{d^2U}{dq^2}q^2+\frac{d^2U}{dr^2}r^2+\frac{d^2U}{ds^2}s^2+2\frac{d^2U}{dpdq}pq+2\frac{d^2U}{dpdr}pr+2\frac{d^2U}{dpds}ps$$
$$+2\frac{d^2U}{dqdr}qr+2\frac{d^2U}{dqds}qs+2\frac{d^2U}{drds}rs\equiv n(n-1)\,U=0.$$

Wenn man wieder die partiellen Differential-Quotienten auf bestimmte Werthe der Veränderlichen $p', q', r', s'$ bezieht, so entsteht die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d^2U}{dp'^2}\right)p^2+\left(\frac{d^2U}{dq'^2}\right)q^2+\left(\frac{d^2U}{dr'^2}\right)r^2+\left(\frac{d^2U}{ds'^2}\right)s^2\\ &+2.\left(\frac{d^2U}{dp'dq'}\right)pq+2.\left(\frac{d^2U}{dp'dr'}\right)pr+2.\left(\frac{d^2U}{dp'ds'}\right)ps\\ &+2.\left(\frac{d^2U}{dq'dr'}\right)qr+2.\left(\frac{d^2U}{dq'ds'}\right)qs+2.\left(\frac{d^2U}{dr'ds'}\right)rs=0,\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

welche einen geometrischen Ort zweiter Ordnung oder zweiter

Klasse darstellt. Dieser hat mit der Fläche $U=0$ immer eine Berührung erster Ordnung. Denn die Werthe $p', q', r', s'$ genügen der Gleichung $U=0$; sie genügen aber auch der Gleichung (3), da sie den Faktor $U$ enthält. Ferner, wenn man die Gleichung $U=0$ vollständig differentiirt, erhält man:

$$\frac{dU}{dp}dp+\frac{dU}{dq}dq+\frac{dU}{dr}dr+\frac{dU}{ds}ds=0. \tag{4}$$

Da $\frac{dU}{dp}, \frac{dU}{dq}, \frac{dU}{dr}, \frac{dU}{ds}$ homogene Funktionen des $(n-1)$ten Grades sind, so folgt aus dem Lehrsatze von den homogenen Funktionen:

$$\frac{dU}{dp}\equiv\frac{1}{n-1}\left\{\frac{d^2U}{dp^2}p+\frac{d^2U}{dpdq}q+\frac{d^2U}{dpdr}r+\frac{d^2U}{dpds}s\right\}, \tag{4*}$$

$$\frac{dU}{dq}\equiv\frac{1}{n-1}\left\{\frac{d^2U}{dq^2}q+\frac{d^2U}{dpdq}p+\frac{d^2U}{dqdr}r+\frac{d^2U}{dqds}s\right\},$$

$$\frac{dU}{dr}\equiv\frac{1}{n-1}\left\{\frac{d^2U}{dr^2}r+\frac{d^2U}{dpdr}p+\frac{d^2U}{dqdr}q+\frac{d^2U}{drds}s\right\},$$

$$\frac{dU}{ds}\equiv\frac{1}{n-1}\left\{\frac{d^2U}{ds^2}s+\frac{d^2U}{dpds}p+\frac{d^2U}{dqds}q+\frac{d^2U}{drds}r\right\}.$$

Wenn man diese Werthe in die Gleichung (4) setzt, den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{n-1}$ als von Null verschieden weglässt und die partiellen Differential-Quotienten auf die bestimmten Werthe $p', q', r', s'$ bezieht, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{d^2U}{dp'^2}\right)p+\left(\frac{d^2U}{dp'dq'}\right)q+\left(\frac{d^2U}{dp'dr'}\right)r+\left(\frac{d^2U}{dp'ds'}\right)s\right\}dp\\
&+\left\{\left(\frac{d^2U}{dq'^2}\right)q+\left(\frac{d^2U}{dp'dq'}\right)p+\left(\frac{d^2U}{dq'dr'}\right)r+\left(\frac{d^2U}{dq'ds'}\right)s\right\}dq\\
&+\left\{\left(\frac{d^2U}{dr'^2}\right)r+\left(\frac{d^2U}{dp'dr'}\right)p+\left(\frac{d^2U}{dq'dr'}\right)q+\left(\frac{d^2U}{dr'ds'}\right)s\right\}dr\\
&+\left\{\left(\frac{d^2U}{ds'^2}\right)s+\left(\frac{d^2U}{dp'ds'}\right)p+\left(\frac{d^2U}{dq'ds'}\right)q+\left(\frac{d^2U}{dr'ds'}\right)r\right\}ds=0.
\end{aligned}$$

Identisch dasselbe erhält man, wenn man die Gleichung (3)

einmal vollständig differentiirt und den gemeinschaftlichen Faktor $2$ als von Null verschieden weglässt. Also haben die beiden geometrischen Oerter (1) und (3) für das System der Werthe $p', q', r', s'$ nicht blos dieselben Coordinaten, sondern auch dieselben partiellen Differential-Quotienten erster Ordnung, mithin haben sie mit einander eine Berührung der ersten Ordnung.

Wenn man aber die Gleichung $U = 0$ zweimal vollständig differentiirt und die Veränderlichen alle als abhängig ansieht, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2U}{dp^2}dp^2 + \frac{d^2U}{dq^2}dq^2 + \frac{d^2U}{dr^2}dr^2 + \frac{d^2U}{ds^2}ds^2\\
&+2\frac{d^2U}{dpdq}dpdq + 2\frac{d^2U}{dpdr}dpdr + 2\frac{d^2U}{dpds}dpds\\
&+2\frac{d^2U}{dqdr}dqdr + 2\frac{d^2U}{dqds}dqds + 2\frac{d^2U}{drds}drds\\
&+\frac{dU}{dp}d^2p + \frac{dU}{dq}d^2q + \frac{dU}{dr}d^2r + \frac{dU}{ds}d^2s = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Wenn man die Gleichung (3) in derselben Weise zweimal vollständig differentiirt, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2U}{dp'^2}\right)dp^2 + \left(\frac{d^2U}{dq'^2}\right)dq^2 + \left(\frac{d^2U}{dr'^2}\right)dr^2 + \left(\frac{d^2U}{ds'^2}\right)ds^2\\
&+2\left(\frac{d^2U}{dp'dq'}\right)dpdq + 2\left(\frac{d^2U}{dp'dr'}\right)dpdr + 2\left(\frac{d^2U}{dp'ds'}\right)dpds\\
&+2\left(\frac{d^2U}{dq'dr'}\right)dqdr + 2\left(\frac{d^2U}{dq'ds'}\right)dqds + 2\left(\frac{d^2U}{dr'ds'}\right)drds\\
&+d^2p\left\{\left(\frac{d^2U}{dp'^2}\right)p + \left(\frac{d^2U}{dp'dq'}\right)q + \left(\frac{d^2U}{dp'dr'}\right)r + \left(\frac{d^2U}{dp'ds'}\right)s\right\}\\
&+d^2q\left\{\left(\frac{d^2U}{dq'^2}\right)q + \left(\frac{d^2U}{dp'dq'}\right)p + \left(\frac{d^2U}{dq'dr'}\right)r + \left(\frac{d^2U}{dq'ds'}\right)s\right\}\\
&+d^2r\left\{\left(\frac{d^2U}{dr'^2}\right)r + \left(\frac{d^2U}{dp'dr'}\right)p + \left(\frac{d^2U}{dq'dr'}\right)q + \left(\frac{d^2U}{dr'ds'}\right)s\right\}\\
&+d^2s\left\{\left(\frac{d^2U}{ds'^2}\right)s + \left(\frac{d^2U}{dp'ds'}\right)p + \left(\frac{d^2U}{dq'ds'}\right)q + \left(\frac{d^2U}{dr'ds'}\right)r\right\} = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Von den Grössen $p, q, r, s$ kann man jedoch drei als unabhängig ansehen, mithin sind von den vier Grössen $d^2p$, $d^2q$, $d^2r$,

$d^2s$ drei gleich Null. Die Wahl der abhängigen Veränderlichen bleibt willkürlich. Wenn man daher in der Gleichung (5) die partiellen Differential-Quotienten auf die Werthe $p'$, $q'$, $r'$, $s'$ bezieht, so wird sie erst dann mit der Gleichung (6) identisch, wenn man hat:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dU}{dp'}\right) &= \left(\frac{d^2U}{dp'^2}\right)p + \left(\frac{d^2U}{dp'dq'}\right)q + \left(\frac{d^2U}{dp'dr'}\right)r + \left(\frac{d^2U}{dp'ds'}\right)s,\\
\left(\frac{dU}{dq'}\right) &= \left(\frac{d^2U}{dq'^2}\right)q + \left(\frac{d^2U}{dp'dq'}\right)p + \left(\frac{d^2U}{dq'dr'}\right)r + \left(\frac{d^2U}{dq'ds'}\right)s,\\
\left(\frac{dU}{dr'}\right) &= \left(\frac{d^2U}{dr'^2}\right)r + \left(\frac{d^2U}{dp'dr'}\right)p + \left(\frac{d^2U}{dq'dr'}\right)q + \left(\frac{d^2U}{dr'ds'}\right)s,\\
\left(\frac{dU}{ds'}\right) &= \left(\frac{d^2U}{ds'^2}\right)s + \left(\frac{d^2U}{dp'ds'}\right)p + \left(\frac{d^2U}{dq'ds'}\right)q + \left(\frac{d^2U}{dr'ds'}\right)r.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Aus den Gleichungen (4*) folgt leicht, dass diese Gleichungen nur bestehen können, wenn ist:

$$\left(\frac{dU}{dp'}\right)=0,\ \left(\frac{dU}{dq'}\right)=0,\ \left(\frac{dU}{dr'}\right)=0,\ \left(\frac{dU}{ds'}\right)=0. \quad (8)$$

Wenn diese Gleichungen stattfinden, so haben die geometrischen Oerter (1) und (3) eine Berührung zweiter Ordnung.

## §. 5.

Aus dem Lehrsatze von den homogenen Funktionen folgt ferner:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^3U}{dp'^3}\right)p^3 + \left(\frac{d^3U}{dq'^3}\right)q^3 + \left(\frac{d^3U}{dr'^3}\right)r^3 + \left(\frac{d^3U}{ds'^3}\right)s^3\\
&+3\left(\frac{d^3U}{dp'^2dq'}\right)p^2q + 3\left(\frac{d^3U}{dp'^2dr'}\right)p^2r + 3\left(\frac{d^3U}{dp'^2ds'}\right)p^2s\\
&+3\left(\frac{d^3U}{dp'dq'^2}\right)pq^2 + 3\left(\frac{d^3U}{dp'dr'^2}\right)pr^2 + 3\left(\frac{d^3U}{dp'ds'^2}\right)ps^2\\
&+\ldots \equiv n(n-1)(n-2)\,U=0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt einen geometrischen Ort dritter Ordnung oder dritter Klasse dar, welcher mit der Fläche $U=0$ immer eine Berührung erster Ordnung hat. Er hat aber damit auch eine Berührung zweiter Ordnung, wenn die partiellen Differential-Quotienten erster Ordnung einzeln verschwinden; und auch eine Be-

rührung dritter Ordnung, wenn die partiellen Differential-Quotienten zweiter Ordnung jeder für sich verschwinden. Diese beiden Sätze lassen sich leicht beweisen durch Entwickelungen, welche denen in §. 4. ganz analog sind.

§. 6.

Die in den §§. 4. und 5. gefundenen Resultate lassen sich folgendermassen verallgemeinern:

$$\left(\frac{d^m U}{dp'^m}\right)p^m + \left(\frac{d^m U}{dq'^m}\right)q^m + \left(\frac{d^m U}{dr'^m}\right)r^m + \left(\frac{d^m U}{ds'^m}\right)s^m$$

$$+ m\left(\frac{d^m U}{dp'^{m-1}dq'}\right)p^{m-1}q + \ldots \equiv n(n-1)\ldots\{n-(m-1)\}U=0.$$

Der durch diese Gleichung ausgedrückte Ort hat mit der Fläche $U=0$ immer eine Berührung erster Ordnung. Die Ordnung steigt bis $m$, wenn sämmtliche partielle Differential-Quotienten von der ersten bis $(m-1)$ten Ordnung inclusive jeder für sich verschwinden.

§. 7.

In den folgenden Entwickelungen wollen wir nur die Gleichung (3) näher betrachten und annehmen, dass die Gleichungen (8) stattfinden.

Zuerst wollen wir die Bedeutung dieser Bedingungsgleichungen aufsuchen.

Wenn wir diese Werthe der partiellen Differential-Quotienten erster Ordnung in die Gleichung (2) setzen, so genügen dieser alle beliebigen Werthe der Veränderlichen $p, q, r, s$. Daraus folgt, dass für das Punktcoordinaten-System die Fläche $U$ im Punkte $(p'q'r's')$ mehr als eine Berührungsebene hat; für das Plancoordinaten-System aber, dass in der umhüllenden Ebene $(p'q'r's')$ mehr als ein Berührungspunkt mit der Fläche $U$ liegt.

Ferner, fassen wir die Bedingungsgleichungen rein algebraisch. Wenn die erste abgeleitete Funktion einer auf Null gebrachten algebraischen Gleichung für eine Wurzel derselben verschwindet, so ist diese Wurzel eine doppelte. Also ist $(p'q'r's')$ in dem einen Coordinaten-System ein Doppelpunkt, in dem andern eine Doppelebene.

Demnach drücken die Bedingungsgleichungen aus, dass sich

die Fläche $U$ in einem der in §. 1. bezeichneten besonderen Fälle befindet, mithin eine Singularität aufweist.

Die Bedingungsgleichungen lassen sich noch anders auffassen. Wir haben die vierte Veränderliche nur hinzugefügt, um die Gleichung homogen zu machen. Wir dürfen sie demnach gleich jeder beliebigen Constanten, insbesondere gleich der Einheit setzen. Dann haben wir aber zur Bestimmung der drei übrigen Veränderlichen vier Gleichungen; eine davon ist mithin überflüssig; sie ist eine Bedingungsgleichung, welche befriedigt sein muss, wenn die Fläche eine Singularität besitzen soll. Nicht jede Fläche hat demnach eine Singularität aufzuweisen.

## §. 8.

Die Veränderlichen seien zuerst Punktcoordinaten.

Wir wollen annehmen, die Fläche $U$ sei in dem Doppelpunkte $(p'q'r's')$ von irgend einer Ebene durchschnitten, die Tangente an die Durchschnittscurve im Punkte $(p'q'r's')$ sei bestimmt. Hierauf wollen wir die durchschneidende Ebene um eine Axe drehen, welche in ihr selbst liegt und durch den Punkt $(p'q'r's')$ geht. Wenn wir jedesmal die Tangente an die Durchschnittscurve im Punkte $(p'q'r's')$ bestimmen, so werden diese eine Kegelfläche in der weitesten Bedeutung des Wortes bilden. Denn die Generatrix ist eine gerade Linie und die Directrix ein Punkt.

Die Veränderlichen seien Plancoordinaten.

Die Berührungspunkte in der Doppelebene $(p'q'r's')$ werden dann eine irgendwie gestaltete Curve bilden. Wir behaupten nun, die Gleichung (3) sei der analytische Ausdruck für jene conische Fläche, respective für jene Curve.

## §. 9.

Zur Abkürzung sei:

$$\left(\frac{d^2U}{dp'^2}\right)\equiv A,\quad \left(\frac{d^2U}{dq'^2}\right)\equiv A',\quad \left(\frac{d^2U}{dr'^2}\right)\equiv A'',\quad \left(\frac{d^2U}{ds'^2}\right)\equiv A''';$$

$$\left(\frac{d^2U}{dp'dq'}\right)\equiv B,\quad \left(\frac{d^2U}{dp'dr'}\right)\equiv B',\quad \left(\frac{d^2U}{dq'dr'}\right)\equiv B'';$$

$$\left(\frac{d^2U}{dp'ds'}\right)\equiv C,\quad \left(\frac{d^2U}{dq'ds'}\right)\equiv C',\quad \left(\frac{d^2U}{dr'ds'}\right)\equiv C''.$$

Dadurch nimmt die Gleichung (3) die Form an:

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + A'''s^2 + 2Bpq + 2B'pr + 2B''qr$$
$$+ 2Cps + 2C'qs + 2C''rs \equiv \omega \equiv f(p, q, r, s) = 0.$$

Die Bedingungsgleichungen (7) und (8) werden:

$$\left.\begin{aligned}
Ap + Bq + B'r + Cs &\equiv \tfrac{1}{2}\frac{d\omega}{dp} = 0,\\
A'q + Bp + B''r + C's &\equiv \tfrac{1}{2}\frac{d\omega}{dq} = 0,\\
A''r + B'p + B''q + C''s &\equiv \tfrac{1}{2}\frac{d\omega}{dr} = 0,\\
A'''s + Cp + C'q + C''r &\equiv \tfrac{1}{2}\frac{d\omega}{ds} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Es bezeichne ferner:

$$\omega' = f(p_1, q_1, r_1, s)$$

die Funktion $\omega$, wenn man $p_1$ statt $p$, $q_1$ statt $q$ und $r_1$ statt $r$ setzt.

Die Taylor'sche Reihe gibt uns dann:

$$f(p_1 + p, q_1 + q, r_1 + r, s) = \omega' + \frac{d\omega'}{dp_1}p + \frac{d\omega'}{dq_1}q + \frac{d\omega'}{dr_1}r$$
$$+ \frac{d^2\omega'}{dp_1^2}\cdot\frac{p^2}{2} + \frac{d^2\omega'}{dq_1^2}\cdot\frac{q^2}{2} + \frac{d^2\omega'}{dr_1^2}\cdot\frac{r^2}{2} + \frac{d^2\omega'}{dp_1dq_1}pq + \frac{d^2\omega'}{dp_1dr_1}pr + \frac{d^2\omega'}{dq_1dr_1}qr.$$

Nach dem Satze von den homogenen Funktionen ist:

$$\omega' \equiv \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega'}{dp_1}p_1 + \frac{d\omega'}{dq_1}q_1 + \frac{d\omega'}{dr_1}r_1 + \frac{d\omega'}{ds}s\right).$$

Daraus folgt:

$$f(p_1+p, q_1+q, r_1+r, s) = \tfrac{1}{2}\frac{d\omega'}{dp_1}(p_1+2p) + \tfrac{1}{2}\frac{d\omega'}{dq_1}(q_1+2q) + \tfrac{1}{2}\frac{d\omega'}{dr_1}(r_1+2r)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{d\omega'}{ds}s + \frac{d^2\omega'}{dp_1^2}\frac{p^2}{2} + \frac{d^2\omega'}{dq_1^2}\frac{q^2}{2} + \frac{d^2\omega'}{dr_1}\frac{r^2}{2} + \frac{d^2\omega'}{dp_1dq_1}pq + \frac{d^2\omega'}{dp_1dr_1}pr$$
$$+ \frac{d^2\omega'}{dq_1dr_1}qr.$$

Ferner ist:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\omega'}{dp_1} \equiv Ap_1 + Bq_1 + B'r_1 + Cs,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\omega'}{dq_1} \equiv A'q_1 + Bp_1 + B''r_1 + C's,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\omega'}{dr_1} \equiv A''r_1 + B'p_1 + B''q_1 + C''s,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\omega'}{ds} \equiv A'''s + Cp_1 + C'q_1 + C''r_1.$$

Diese Gleichungen werden jede für sich gleich Null durch die Werthe $p'$, $q'$, $r'$, $s'$, welche man aus den Bedingungsgleichungen (9) findet.

Ferner ist:

$$\frac{d^2\omega'}{dp_1^2} = 2A, \quad \frac{d^2\omega'}{dq_1^2} = 2A', \quad \frac{d^2\omega'}{dr_1^2} = 2A'';$$

$$\frac{d^2\omega'}{dp_1 dq_1} = 2B, \quad \frac{d^2\omega'}{dp_1 dr_1} = 2B', \quad \frac{d^2\omega'}{dq_1 dr_1} = 2B''.$$

Dadurch erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} f(p_1 + p,\ q_1 + q,\ r_1 + r,\ s) = Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 \\ \qquad + 2Bpq + 2B'pr + 2B''qr. \end{array}\right\} \quad (10)$$

Diese Gleichung ist homogen zwischen den drei Veränderlichen $p$, $q$, $r$. Durch die Transformation ist nur der Anfang der Coordinaten in $(p'q'r's')$ verschoben worden, ohne die Richtung der Axen zu ändern.

Die Gleichung (10) stellt nun im System der Punktcoordinaten eine conische Fläche dar, deren Spitze im Anfangspunkte der Coordinaten liegt; im System der Plancoordinaten aber eine ebene Curve, welche in der Ebene $(p'q'r's')$ liegt, von welcher aus die umhüllenden Ebenen gerechnet werden. Es seien nämlich die Veränderlichen zuerst Punktcoordinaten. Die Fläche (10) geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Denn ihre Gleichung enthält kein von den Coordinaten unabhängiges Glied. Ferner, jede Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, schneidet die Fläche (10) in zwei geraden Linien. Es sei nämlich

$$r = mp + nq$$

die Gleichung der schneidenden Ebene. Wenn wir aus dieser

Gleichung und der Gleichung (10) die Veränderliche $r$ eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung, welche zwischen den beiden übrigen Veränderlichen homogen ist. Ohne die Rechnung wirklich auszuführen, finden wir hieraus:

$$\frac{p}{q} = \varkappa \pm \sqrt{\lambda}$$

oder

$$p = (\varkappa \pm \sqrt{\lambda})q.$$

Diese Gleichung stellt ein System von zwei geraden Linien dar, welche entweder reell oder imaginär sind oder zusammenfallen. Mithin ist die Fläche (10) eine conische Fläche.

Sie ist aber auch mit der conischen Fläche identisch, welche in §. 8. besprochen wurde. Denn sie haben dieselbe Spitze; ihre entsprechenden Generatricen fallen zusammen, da sie dieselbe Curve in demselben Punkte berühren.

Es seien ferner die Veränderlichen Plancoordinaten. Dann stellt die Gleichung (10) eine ebene Curve dar. Der durch die Gleichung (10) ausgedrückte geometrische Ort zweiter Klasse hat mit dem durch dieselbe Gleichung ausgedrückten geometrischen Orte zweiter Ordnung eine vollständige Reciprocität. Jedem Punkte der conischen Fläche entspricht eine umhüllende Ebene jenes Ortes zweiter Klasse. Allen Punkten der conischen Fläche, welche in einer geraden Linie liegen, entsprechen umhüllende Ebenen, welche sich in einer und derselben geraden Linie schneiden. Mithin entspricht jeder Generatrix der conischen Fläche eine umhüllende gerade Linie. Ferner alle Generatricen gehen durch denselben Punkt, mithin liegen alle umhüllenden geraden Linien in derselben Ebene. Also stellt die Gleichung (10) im System der Plancoordinaten eine ebene Curve dar, welche in der Ebene $(p'q'r's')$ liegt. Aber diese Curve liegt auch vollständig in der Fläche $U=0$. Denn Fläche und Curve haben eine Berührung zweiter Ordnung. Wenn man daher von der Ebene $(p'q'r's')$ ausgeht, findet man unmittelbar noch zwei umhüllende Ebenen, welche sowohl zur Fläche, als auch zur Curve gehören. Drei sich schneidende Ebenen bestimmen aber einen Punkt. Dieser Punkt, der Durchschnittspunkt der drei auf einander folgenden Ebenen, welche sowohl die Fläche, als auch die Curve umhüllen, gehört mithin zur Fläche und zur Curve. Daraus folgt, dass sämmtliche Punkte der Curve auch in der Fläche liegen. Mithin ist die Curve (10) diejenige Curve, in welcher die Fläche $U$ von der singulären Ebene $(p'q'r's')$ berührt wird.

## §. 10.

Durch ganz analoge Entwickelungen findet man, dass die in §. 5. aufgestellte Gleichung der analytische Ausdruck für den Berührungskegel in dem singulären Punkte oder für die Berührungscurve in der singulären Ebene ist, wenn die partiellen Differential-Quotienten erster und zweiter Ordnung einzeln $=0$ sind.

## §. 11.

Die bisherigen Resultate lassen sich ganz allgemein ausdrücken:

$$\left(\frac{d^m U}{dp'^m}\right)p^m + \left(\frac{d^m U}{dq'^m}\right)q^m + \left(\frac{d^m U}{dr'^m}\right)r^m + \left(\frac{d^m U}{ds'^m}\right)s^m$$

$$+m\left(\frac{d^m U}{dp'^{m-1}q'}\right)p^{m-1}q + m\left(\frac{d^m U}{dp'^{m-1}r'}\right)p^{m-1}r$$

$$+ m\left(\frac{d^m U}{dp'^{m-1}s'}\right)p^{m-1}s + \ldots. = 0.$$

Diese Gleichung ist der allgemeine Ausdruck für den Berührungskegel in dem singulären Punkte oder für die Berührungscurve in der singulären Ebene, wenn sämmtliche partielle Differential-Quotienten von der ersten bis $(m-1)$ten Ordnung inclusive jeder für sich verschwinden.

## §. 12.

Vor Allem wollen wir jetzt die Gleichung (10) in die für unsern Zweck geeignetste Form bringen.

Es bezeichne:

$$f'(p, q, r) \equiv Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2Bpq + 2B'pr + 2B''qr. \quad (11)$$

Ferner:

$$\left.\begin{aligned} f'(p'', q'', r) \equiv \omega'' &\equiv Ap''^2 + A'q''^2 + A''r^2 \\ &+ 2Bp''q'' + 2B'p''r + 2B''q''r. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Aus der Gleichung (12) folgt:

$$f'(p''+p, q''+q, r)$$

$$= \omega'' + \frac{d\omega''}{dp''}p + \frac{d\omega''}{dq''}q + \frac{d^2\omega''}{dp''^2}\frac{p^2}{2} + \frac{d^2\omega''}{dq''^2}\frac{q^2}{2} + \frac{d^2\omega''}{dp''dq''}pq.$$

**Ferner ist:**

$$\omega'' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega''}{dp''}p'' + \frac{d\omega''}{dq''}q'' + \frac{d\omega''}{dr}r\right).$$

**Daraus folgt:**

$$f'(p''+p, q''+q, r) = \tfrac{1}{2}\frac{d\omega''}{dp''}(p''+2p) + \tfrac{1}{2}\frac{d\omega''}{dq''}(q''+2q) + \tfrac{1}{2}\frac{d\omega''}{dr}r$$
$$+ \frac{d^2\omega''}{dp''^2}\frac{p^2}{2} + \frac{d^2\omega''}{dq''^2}\frac{q^2}{2} + \frac{d^2\omega''}{dp''dq''}pq.$$

**Wenn man die Grössen $p''$ und $q''$ so wählt, dass $\frac{d\omega''}{dp''}=0$ und $\frac{d\omega''}{dq''}=0$ ist, so erhält man:**

(13)

$$f'(p''+p, q''+q, r) = \tfrac{1}{2}\frac{d\omega''}{dr}r + \frac{d^2\omega''}{dp''^2}\frac{p^2}{2} + \frac{d^2\omega''}{dq''^2}\frac{q^2}{2} + \frac{d^2\omega''}{dp''dq''}pq.$$

**Aus der Gleichung (12) folgt:**

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\omega''}{dp''} = Ap'' + Bq'' + B'r;$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\omega''}{dq''} = A'q'' + Bp'' + B''r;$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\omega''}{dr} = A''r + B'p'' + B''q'';$$

$$\frac{d^2\omega''}{dp''^2} = 2A, \quad \frac{d^2\omega''}{dq''^2} = 2A', \quad \frac{d^2\omega''}{dp''dq''} = 2B.$$

**Setzt man ferner:**

$$p'' = \alpha r,$$

$$q'' = \beta r,$$

**worin $\alpha$ und $\beta$ unbekannt sind, so erhält man zur Bestimmung von $\alpha$ und $\beta$ die beiden Gleichungen:**

$$Ap'' + Bq'' + B'r = (A\alpha + B\beta + B')r = 0,$$

$$A'q'' + Bp'' + B''r = (A'\beta + B\alpha + B'')r = 0.$$

**Daraus folgt:**

$$\alpha = -\frac{A'B' - BB''}{AA' - B^2}, \quad \beta = -\frac{AB'' - BB'}{AA' - B^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega''}{dr}=\frac{A''(AA'-B^2)-B'(A'B'-BB'')-B''(AB''-BB')}{AA'-B^2}.$$

Wenn man diese Werthe in die Gleichung (13) setzt, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}f'(p''+p,q''+q,r)&=Ap^2+A'q^2+2Bpq\\&+\frac{A''(AA'-B^2)-B'(A'B'-BB'')-B''(AB''-BB')}{AA'-B^2}r\\&\equiv Ap^2+A'q^2+2Bpq+\varrho r^2\equiv f''(p,q)+\varrho r^2.\end{aligned}\right\}(14)$$

Die angewandte Transformation wird unmöglich, wenn $AA'-B^2=0$ ist, weil dann $\alpha$ und $\beta$ unendlich gross werden. Wenn aber nicht gleichzeitig auch $AA''-B'^2=0$ und $A'A''-B''^2=0$ ist, kann man obiges Verfahren doch anwenden, wenn man die Glieder mit den ersten Potenzen von $q$ oder $p$ fortschafft. Gesetzt aber, es verschwinden alle drei Ausdrücke gleichzeitig. Dann findet man:

$$A=\pm\frac{BB'}{B''},\quad A'=\pm\frac{BB''}{B'},\quad A''=\pm\frac{B'B''}{B}.$$

Dann aber wird die Gleichung (12) folgende Gestalt annehmen:

$$B^2B'^2p^2+B^2B''^2q^2\pm2B^2B'B''pq+B'B''r^2\pm2BB'^2B''pr$$
$$\pm2BB'B''^2qr=0$$

oder

$$B^2(B'p\pm B''q)^2\pm B'B''(r\pm2B'p\pm2B''q)r\equiv\mu v^2+tw=0,\quad(15)$$

wo $v$, $t$, $w$ lineare Funktionen von $p$, $q$ und $r$ sind und $\mu$ eine Constante ist. Diese Gleichung werden wir später weiter untersuchen.

Es sei nun:

$$f''(p''',q)\equiv\omega'''\equiv Ap'''^2+A'q^2+2Bp'''q.$$

Daraus folgt:

$$f''(p'''+p,q)=\omega'''+\frac{d\omega'''}{dp'''}p+\frac{d^2\omega'''}{dp'''^2}\frac{p^2}{2}.$$

Nun ist aber:

$$\omega'''\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega'''}{dp'''}p'''+\frac{d\omega'''}{dq}q\right),$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega'''}{dp'''}=Ap'''+Bq,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\omega'''}{dp'''}=A'q+Bp''',$$

$$\frac{d^2\omega'''}{dp'''^2}=2A.$$

Daraus folgt:

$$f''(p'''+p,q)=\tfrac{1}{2}\frac{d\omega'''}{dp'''}(p'''+2p)+\tfrac{1}{2}\frac{d\omega'''}{dq}q+\frac{d^2\omega'''}{dp'''^2}\frac{p^2}{2}.$$

Wir wollen $p'''$ so bestimmen, dass $\frac{d\omega'''}{dp'''}=0$ ist; dann hat man:

$$Ap'''+Bq=0.$$

Es sei ferner $p'''=\alpha'q$. Daraus folgt:

$$A\alpha'q+Bq=0 \quad\text{oder}\quad \alpha'=-\frac{B}{A} \quad\text{und}\quad p'''=-\frac{B}{A}q.$$

Mithin ist:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\omega'''}{dq}q=(A'q+Bp''')q=(A'+B\alpha')q^2=\frac{AA'-B^2}{A}q^2.$$

Also ist:

$$f''(p'''+p,q)=Ap^2+\frac{AA'-B^2}{A}q^2.$$

Also erhält durch diese Umformung die Gleichung (14) folgende Form:

$$Ap^2+\frac{AA'-B^2}{A}q^2\equiv Ap^2+\varkappa q^2+\varrho r^2\equiv\pi p^2+\varkappa q^2+\varrho r^2. \quad (16)$$

Diese Transformation wird unmöglich, wenn $A=0$ ist, weil dann $\alpha'$ unendlich gross wird. Wenn nicht auch $A'$ gleich Null ist, bleibt sie doch anwendbar. Sind aber $A$ und $A'$ gleich Null, so hat die Gleichung (14) die Gestalt: $2Bpq+\varrho r^2=0$, welche Form mit der Form (15) identisch ist. In dem Folgenden werden wir aber sehen, dass die Gleichung (15) in der Gleichung (16) enthalten ist.

## §. 13.

### Zusammenstellung der verschiedenen Gleichungen, welche in der Gleichung $\pi p^2+\varkappa q^2+\varrho r^2=0$ enthalten sind.

#### I.

Wenn die Coefficienten $\pi$, $\varkappa$ und $\varrho$ nicht dasselbe Zeichen haben, so kann die Gleichung auch gebracht werden auf die Form:

$$v^2 + \mu t w = 0,$$

wo $t$, $v$ und $w$ lineare Funktionen von $p$, $q$ und $r$ sind und $\mu$ eine Constante ist.

II.

Wenn die Coeffizienten alle dasselbe Zeichen haben, so erhält sie die Form:

$$a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 = 0.$$

III.

Wenn ein Coeffizient gleich Null ist und die beiden andern verschiedene Zeichen haben, so lässt sie sich auf folgende Form bringen:

$$t.w = 0.$$

IV.

Wenn ein Coeffizient gleich Null ist und die beiden andern dasselbe Zeichen haben, so lässt sie sich auf folgende Form bringen:

$$(t + \alpha w\sqrt{-1})(t - \alpha w\sqrt{-1}) = 0.$$

V.

Wenn zwei Coeffizienten gleich Null sind, so erhält sie die Form:

$$w = \pm 0.$$

§. 14.

**Bedeutung dieser fünf Gleichungen im System der Punktcoordinaten.**

I.

$$v^2 + \mu t w = 0.$$

Diese Gleichung kann durch unendlich viele Werthe der Veränderlichen befriedigt werden, also stellt sie eine conische Fläche in der engern Bedeutung des Wortes dar.

II.

$$a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird nur befriedigt durch das System der Werthe $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$; mithin stellt sie nur einen einzigen Punkt dar.

III.

$$t.w = 0.$$

Diese Gleichung wird nur befriedigt, wenn man setzt $t = 0$ oder $w = 0$; mithin stellt sie ein System von zwei reellen Ebenen dar.

IV.

$$(t + aw\sqrt{-1})(t - aw\sqrt{-1}) = 0.$$

Diese Gleichung wird nur befriedigt, wenn man setzt: $t + aw\sqrt{-1} = 0$ oder $t - aw\sqrt{-1} = 0$; jeder dieser Ausdrücke kann aber nur verschwinden, wenn $t$ und $w$ verschwinden; mithin stellt die Gleichung ein System von zwei imaginären Ebenen dar, welche sich in der reellen geraden Linie $\left\{ \begin{matrix} t = 0 \\ w = 0 \end{matrix} \right.$ schneiden.

V.

$$w = \pm 0.$$

Diese Gleichung stellt dar ein System von zwei reellen zusammenfallenden Ebenen.

§. 15.

**Bedeutung der fünf Gleichungen im System der Plancoordinaten.**

Das Gesetz der Reciprozität überhebt uns der Mühe, zu den Gleichungen selbst zurückzugehen.

I.

Einer reellen conischen Fläche zweiter Ordnung entspricht eine reelle ebene Curve zweiter Klasse im engern Sinne des Wortes.

II.

Einer imaginären Kegelfläche zweiter Ordnung, d. h. einem einzigen Punkte, entspricht eine imaginäre ebene Curve zweiter Klasse, d. h. eine einzige umhüllende Ebene.

III.

Einem System von zwei reellen Ebenen entsprechen zwei reelle Punkte.

IV.

Einem System von zwei imaginären Ebenen, welche sich in einer reellen geraden Linie schneiden, entsprechen zwei imaginäre Punkte, welche in einer reellen geraden Linie liegen.

V.

Einem System von zwei reellen, zusammenfallenden Ebenen entsprechen zwei reelle, zusammenfallende Punkte.

§. 16.

I.

$$\omega_3 + \mu pq + \lambda r^2 = 0$$

sei die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung oder dritter Klasse. $\omega_3$ sei eine homogene Funktion des dritten Grades und $p$, $q$ und $r$ seien homogene Funktionen des ersten Grades.

In dem System der Punktcoordinaten ist nach dem Vorhergehenden die Berührungsebene oder vielmehr sind die Berührungsebenen an die Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten bestimmt durch die Gleichung:

$$\mu pq + \lambda r^2 = 0.$$

Diese Gleichung drückt eine reelle Kegelfläche zweiter Ordnung im engern Sinne aus. Die Fläche läuft also im Anfangspunkte der Coordinaten in eine conische Spitze aus. Sind aber die Veränderlichen Plancoordinaten, so berührt die umhüllende Ebene, deren Coordinaten gleich Null sind, die Fläche in einer reellen ebenen Curve zweiter Klasse im engern Sinne. Die Fläche hat also eine trichterförmige Vertiefung innerhalb dieser Berührungscurve

II.

$$\omega_3 + \frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2} + \frac{r^2}{\gamma^2} = 0.$$

Die Veränderlichen seien zuerst Punktcoordinaten. Der Anfangspunkt der Coordinaten bleibe unverändert. Die Richtung der Axen dagegen wollen wir so verändern, dass

die Ebene $p=0$ mit der Ebene $x=0$,
„ „ $q=0$ „ „ „ $y=0$,
„ „ $r=0$ „ „ „ $z=0$

zusammenfalle. Diese Transformation stört nicht die Homogenität der Gleichung. Die Gleichung der Fläche aber erhält folgende Gestalt:

$$\Omega_3+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{17}$$

wo $\Omega_3$ eine homogene Funktion des dritten Grades zwischen $x$, $y$ und $z$ ist. Die Gleichung der Berührungsebene an die Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten ist:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Diese Gleichung wird nur befriedigt durch das System der Werthe $x=0$, $y=0$, $z=0$; mithin stellt sie nur einen einzigen Punkt dar.

$$z=a'x+b'y$$

sei die Gleichung einer Ebene. Als Gleichung für die Projektion der Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche (17) auf die Ebene $z=0$ findet man:

$$K_3+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(a'x+b'y)^2}{c^2}=0, \tag{18}$$

wo $K_3$ eine homogene Funktion des dritten Grades zwischen $x$ und $y$ ist.

Es sei ferner

$$y=a''x$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Für die Coordinaten von zwei der drei Durchschnittspunkte dieser geraden Linie mit der Curve (18) findet man:

$$x^2=0,\quad y^2=0.$$

Mithin ist dieser Punkt ein Doppelpunkt.

Ferner ist:

$$\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2U}{dx^2}\cdot\frac{d^2U}{dy^2}=\left(\frac{2a'b'}{c^2}\right)^2-\left(\frac{2}{a^2}+\frac{2a'^2}{c^2}\right)\left(\frac{2}{b^2}+\frac{2b'^2}{c^2}\right)$$

$$=-4\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{b'^2}{a^2c^2}+\frac{a'^2}{b^2c^2}\right)<0.$$

Diese Gleichung zeigt einen von der Curve isolirten Punkt an. (Plücker, System der Geometrie. III. Abschn. §. 6.)

Mithin wird die Fläche (17) von jeder durch den Anfangs-

punkt der Coordinaten gehenden Ebene in einer Curve geschnitten, welche in diesem Punkte einen isolirten Doppelpunkt hat. Also muss dieser Punkt ein zur Fläche gehöriger, aber von derselben getrennter Punkt sein. Er lässt sich betrachten als eine zum Punkte zusammengeschrumpfte ellipsoidische Fläche.

Im System der Plancoordinaten ist die Ebene, deren Coordinaten Null sind, eine zur Fläche gehörige, aber von den übrigen umhüllenden Ebenen getrennte umhüllende Ebene. Ihr Berührungspunkt mit der Fläche ist imaginär.

## III.

$$\omega_3 + \mu pq = 0.$$

Die Veränderlichen seien zuerst rechtwinkliche Punktcoordinaten. Den Anfangspunkt der Coordinaten und den Winkel der Axen wollen wir unverändert lassen, die Axe $z$ dagegen so drehen, dass sie mit dem Durchschnitte der beiden Ebenen $p=0$ und $q=0$ zusammenfällt. Dadurch wird die Gleichung der Fläche:

$$\Omega_3 + \lambda(y+\alpha x)(y+\beta x) = 0. \tag{19}$$

Die Gleichung der Berührungsebene an diese Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten ist:

$$(y+\alpha x)(y+\beta x) = 0,$$

welche ein System von zwei reellen Ebenen darstellt.

$$y = ax$$

sei die Gleichung irgend einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Als Gleichung für die Projektion der Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche (19) auf die Ebene $y=0$ erhält man:

$$K_3 + \lambda(a+\alpha)(a+\beta)x^2 = 0. \tag{20}$$

Jede gerade Linie $z = a'x$, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, schneidet diese Curve in drei Punkten, wovon zwei in dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfallen.

Es ist nun aber $\left(\frac{d^2U}{dxdz}\right)^2 - \frac{d^2U}{dx^2}\cdot\frac{d^2U}{dz^2} = 0$ für diesen Punkt, mithin ist er ein Rückkehrpunkt. Die Richtung der Tangente in diesem Punkte wird bestimmt durch die Gleich. $\frac{dz}{dx} = -\frac{2\lambda(a+\alpha)(a+\beta)}{0} = \mp\infty$, jenachdem $(a+\alpha)$ und $(a+\beta)$ dieselben oder verschiedene Zeichen haben. Mithin ändert sich die Richtung der Tangente zweimal,

nämlich wenn $(a+\alpha)$ gleich Null und wenn $(a+\beta)$ gleich Null wird; die Grösse der Aenderung beträgt jedesmal 180°. Bei der jedesmaligen Aenderung geht die Curve (20) in ein System von geraden Linien über, und nachher ist die Oeffnung der Spitze nach der entgegengesetzten Seite hin gerichtet.

Die Veränderlichen seien zweitens Plancoordinaten.

Die singuläre Ebene berührt die Fläche in zwei reellen, nicht zusammenfallenden Punkten. Jede Ebene, welche die Verbindungslinie dieser beiden reellen Berührungspunkte enthält, schneidet die Fläche in einer Curve, welche eine singuläre umhüllende Linie hat. Diese berührt die Curve in zwei reellen Punkten, welche zweien von einander getrennten Zweigen der Curve angehört. Denn hingen diese zusammen, so müsste die umhüllende Linie an eine Grenze kommen, wo sie zurückkehrte. In dieser Grenzlage aber wäre sie eine singuläre Linie. Diese singuläre Linie der Curve würde aber auch eine singuläre Ebene der Fläche bedingen. Dadurch aber hätte die Fläche zwei singuläre Ebenen, was bei einer Fläche dritter Klasse nicht der Fall sein kann. Da nun die singuläre Linie zwei reelle getrennte Zweige der Curve berührt, so muss auch die singuläre Ebene zwei getrennte reelle Theile der Fläche berühren.

## IV.

$$\omega_3 + \mu(p^2 + \lambda^2 q^2) = 0.$$

Die Veränderlichen seien zuerst rechtwinklige Punktcoordinaten. Ohne den Anfangspunkt und den Winkel der Coordinatenaxen zu verändern, wollen wir das ganze System so drehen, dass die Axe $z$ mit dem Durchschnitte der beiden Ebenen $p=0$ und $q=0$ zusammenfällt. Dadurch erhält die Gleichung der Fläche folgende Gestalt:

$$\Omega_3 + \varkappa\{(y+\alpha x)^2 + \nu^2(y+\beta x)^2\} = 0. \qquad (21)$$

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten wird:

$$(y+\alpha x)^2 + \nu^2(y+\beta x)^2 = 0$$

oder

$$(y+\alpha x+\nu(y+\beta x)\sqrt{-1})\,(y+\alpha x-\nu(y+\beta x)\sqrt{-1}) = 0.$$

Diese Gleichung stellt ein System von zwei imaginären Ebenen dar, welche sich in der reellen geraden Linie $\left\{\begin{matrix} y+\alpha x=0 \\ y+\beta x=0 \end{matrix}\right.$ schneiden.

Es sei ferner $y = ax$ die Gleichung einer Ebene. Als Gleichung für die Projektion der Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche (21) auf die Ebene $y=0$ erhält man:

$$K_3 + \varkappa\{(a+\alpha)^2 + \nu^2(a+\beta)^2\}x^2 = 0.$$

Jede gerade Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, schneidet diese Curve in drei Punkten, wovon zwei in den Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfallen. Für diesen Punkt ist ferner:

$$\left(\frac{d^2U}{dxdz}\right)^2 - \frac{d^2U}{dx^2}\cdot\frac{d^2U}{dz^2} = 0.$$

Also ist er ein Rückkehrpunkt.

Die Richtung der Tangente in diesem Punkte wird bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-2\varkappa\{(a+\alpha)^2 + \nu^2(a+\beta)^2\}}{0}.$$

Da der Zähler dieses Bruches aus einem Produkte besteht, wovon der eine Faktor eine Constante und der andere eine Summe von zwei positiven Quadraten ist, so kann er weder sein Zeichen ändern, noch verschwinden. Also haben alle Durchschnittscurven im Anfange der Coordinaten eine Spitze, welche ihre Oeffnung immer nach derselben Seite hin wendet.

Daraus folgt, dass die Fläche selbst im Anfangspunkte der Coordinaten und die Linie $\left\{\begin{array}{l} y+\alpha x=0 \\ y+\beta x=0 \end{array}\right.$ in eine Spitze auslaufen muss, die ihre convexe Seite dieser Linie stets zukehrt.

Die Veränderlichen seien zweitens Plancoordinaten.

Die singuläre Ebene berührt die Fläche in zwei imaginären Punkten, welche in einer reellen geraden Linie liegen. Jede Ebene, welche diese gerade Linie enthält, schneidet die Fläche in einer Curve, welche eine singuläre Linie hat, die die Curve in zwei imaginären Punkten berührt. Also muss die singuläre Linie zwei imaginäre Zweige der Curve berühren, und daraus folgt, dass die singuläre Ebene zwei imaginäre Theile oder Lappen der Fläche berührt, oder auch die Fläche hat eine zugeordnete reelle gerade Linie.

## V.

$$\omega_3 + \mu p^2 = 0.$$

Die Veränderlichen seien wieder zuerst rechtwinkliche Punkt-

coordinaten. Ohne den Anfangspunkt und den Winkel der Coordinatenaxen zu ändern, wollen wir die Axe $z$ so drehen, dass sie in die Ebene $p = 0$ fällt. Dadurch erhält die Gleichung der Fläche folgende Gestalt:

$$\Omega_3 + \lambda(y + \alpha x)^2 = 0. \tag{22}$$

Die Gleichung der Berührungsebene an die Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten wird: $(y + \alpha x)^2 = 0$. Diese Gleichung stellt ein System von zwei reellen, zusammenfallenden Ebenen dar.

Es sei $y = ax$ die Gleichung einer Ebene, welche die Axe $z$ enthält. Als Gleichung für die Projektion der Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche (22) auf die Ebene $y = 0$ erhält man:

$$K_3 + \lambda(a + \alpha)^2 x^2 = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung sehen wir, dass jede Durchschnittscurve im Anfangspunkte der Coordinaten einen Doppelpunkt hat. Dieser Punkt ist ein Rückkehrpunkt. Denn es ist für denselben:

$$\left(\frac{d^2U}{dxdz}\right)^2 - \frac{d^2U}{dx^2}\cdot\frac{d^2U}{dz^2} = 0.$$

Die Richtung der Tangente in dem singulären Punkte wird bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2\lambda(a + \alpha)^2}{0}.$$

Dieser Ausdruck kann sein Zeichen nicht ändern; jedoch wird der Zähler einmal gleich Null, nämlich wenn $a + \alpha = 0$ ist, d. h. wenn die schneidende Ebene mit der Tangentialebene an die Fläche (22) in diesem Punkte zusammenfällt. Also hat jede Durchschnittscurve eine Spitze, deren Oeffnungen alle dieselbe Richtung haben; nur wenn $(a + \alpha)$ verschwindet, geht die Durchschnittscurve in ein System von geraden Linien über.

Es seien die Veränderlichen zweitens Plancoordinaten.

Die singuläre Ebene berührt die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten. Daher schneidet jede Ebene, welche diese beiden Punkte enthält, die Fläche in einer Curve, welche eine singuläre Linie hat, in dieser fallen die beiden Berührungspunkte zusammen; mithin ist dieser ein Wendungspunkt. Also muss auch die singuläre Ebene die Fläche in einem Wendungspunkte berühren.

---

# XXIX.

## Miscellen.

**Schreiben des Herrn Rectors Dr. Nagel zu Ulm an den Herausgeber.**

In dem dritten Hefte des 24sten Bandes des Archivs der Mathematik und Physik macht Herr Professor Steczkowski auf eine Schrift aufmerksam unter dem Titel: Anweisung zum Zirckel und Lineal Gebrauch etc. ohne Jahreszahl. Er kennt den Verfasser nicht und schliesst aus den auf den Kupfertafeln angebrachten ungarischen Städten, dass der Verfasser ein Ungar sei. Ich glaube über den Verfasser sichere Auskunft geben zu können, und vielleicht gestatten Sie dem Folgenden ein Plätzchen in Ihrer Zeitschrift. Es ist für diejenigen Leser derselben geschrieben, welche sich auch für die Literatur der Mathematik interessiren, und möchte auch an und für sich schon einiges historische Interesse darbieten.

Ich besitze in meiner Bibliothek ein altes Buch unter dem sonderbaren Titel: Ertz-Herzogliche Handgriffe dess Zirckels und Linials, oder Ausserwählter Anfang zu denen mathematischen Wissenschaften. Worinnen man durch eine leichte und neue Art ihm einen geschwinden Zutritt zu der Feldmesserey und andern daraus entspringenden Wissenschaften machet. Beschrieben von Dero Röm. Kayserl. Majestät bestellten Feld- und Land-Ingenieure des Königreichs Böheim, Ober-Wachtmeistern etc. **Anthoni Ernst Burckhard von Birckenstein.** Samt einem Anhang oder Beschreibung derer in den geometrischen Kupffer-Figuren beygefügten Ungarischen Städte, Vestungen und Schlösser, unter welchen nicht wenige, so bisshero in keinen Reiss- und Land-Beschreibungen dess Königreichs Ungarn vor Augen gestellet worden. Mit Röm. Kayserl. Majest. Befreyung. Augspurg, gedruckt und verlegt durch Jacob Koppmeyer, anno M.DC.LXXXIX.

Das Privilegium ist ausgestellt von Kaiser Leopold am 18. Januar 1689 auf 8 Jahre, und der Verfasser des Buchs, Burckhard, ist darin betitelt Obrist-Lieutenant und Oberingenieur.

Das Buch ist gewidmet dem Ertz-Herzogen zu Oesterreich etc. dem Durchleuchtigsten Grossmächtigsten Königlichen Prinzen und Herrn Josepho. Es ist diess der spätere Kaiser Joseph I. Burckhard war nach der Dedication von Kaiser Leopold zum Lehrer der Kriegswissenschaften für den genannten Ertzherzog er-

nannt worden. Eine Frucht dieses Unterrichts ist die obengenannte Schrift, die schon desswegen den Titel: Ertz-Herzogliche Handgriffe etc. führt, noch mehr aber, weil die Zeichnungen des Buchs „von der Ertz-Herzoglichen Durchlaucht mit eigener Hand so schön als künstlich mit dem Zirckel und Linial verfertiget" sind, und seine Ertz-Herzogliche Durchlaucht, Ihro Kayserl. Majestät Glorwürdiger Erb-Printz mit hocherleuchtetem Verstand und Kunstartiger Feder durch Aufreisung dieser Figuren den Grund der mathematischen Wissenschaften geleget.

Daher sagt auch Burckhard in der Dedication, freilich mit einem hohen Grade von Schmeichelei: Ich mache es gleich denen Buchtruckern, welche jederzeit ihre Nahmen unten an das Werk zu setzen pflegen, wodurch ihnen der Nahmen eines Verfassers (nicht ohne Fehler) unterweilen zugeschrieben wird. Also, Gnädigster Herr, dieses Buchs, so ich Eurer Durchleucht unterthänigst zu überreichen mich unterfange, seyn sie der Verfasser selbsten etc.

In dem Buche ist in der That eine via regia zur Mathematik versucht; denn Alles sind blosse Handgriffe, ohne dass irgendwo die geringste Spur eines Beweises zu finden wäre, und besteht wohl hauptsächlich darin die auf dem Titel bemerkte neue und leichte Art, ihm einen geschwinden Zutritt zu der Feldmesserey etc. zu machen.

Auf jeder Kupfertafel ist eine ungarische Stadt etc. unterhalb der geometrischen Zeichnung abgebildet, einmal nach dem Zeitgeschmack überhaupt, dann aber wohl insbesondere desswegen, weil in der Vorrede der Ertzherzog Joseph, dem das Buch gewidmet ist, schon als zum König von Ungarn ernannt erscheint, so dass man also aus diesem Umstande nicht zu dem Schlusse berechtigt ist, der Verfasser selbst sei ein Ungar gewesen, worauf auch der Name nicht im mindesten hindeutet, der auf einen Deutschen als Verfasser schliessen lässt.

Das Buch zerfällt in folgende Abschnitte:

**Kurzverfasste Beschreibung derer Vestungen und Schlösser, mit welchen die geometrische Kupfer-Figuren dieser Ertz-Herzoglichen Handgriffe gezieret. 44 Seit.**
**Register. 2 Seiten.**

Das von Herrn Prof. Steczkowski angeführte Buch ist offenbar nichts anderes, als eine spätere Ausgabe des von mir beschriebenen Originalwerkes ohne Jahreszahl und ohne Nennung des Verfassers, und zwar mit verallgemeinertem Titel, indem auf demselben statt der „Ertz-Herzoglichen Handgriffe" ausdrücklich bemerkt ist, die Schrift sei zum Gebrauch sowohl vor die Jugend als Professionisten und Handwerker bestimmt. Die Identität beider Bücher — vielleicht mit einigen Erweiterungen in letzterem, worüber nur eine genauere Vergleichung entscheiden könnte — ergibt sich zunächst aus der offenbaren Gleichheit der Kupferstiche, daraus, dass beide Werke in 6 Bücher eingetheilt sind, vor Allem aber aus der von Herrn Steczkowski p. 312. des Archivs gegebenen Probe. Denn dieselbe Aufgabe ist auch in meinem Buche die siebente des dritten Buchs und daselbst ganz buchstäblich gleichlautend bis auf die Orthographie hinaus, in letzterer hie und da etwas älter, indem es z. B. immer bei mir Lini statt Linie heisst; auch die Anordnung ist genau dieselbe, indem der Text genau Reihe für Reihe so entspricht, dass die auf die Kupfertafel bezüglichen Buchstaben am Ende jeder Zeile, und daher sämmtlich unter einander stehen. Die Figur ist ebenfalls die nämliche, wie die im Archiv Taf. X. Fig. 1. abgedruckte, nur ist das Dreizehneck wirklich eingeschrieben.

Um den Lesern noch ein kurzes Bild der auf solchen Tafeln weiter gezeichneten Figuren zu geben, bemerke ich schliesslich, dass unter der eben erwähnten geometrischen Figur die Abbildung des Schlosses Strezen sich befindet, von welchem die Erklärung (S. 171.) sagt: Strezen oder Streczen ist ein festes ungarisches Castell, so laut David Frölichs Bericht in christlicher Gewalt. Beinahe jedes dieser Bilder enthält als Staffage im Vordergrunde irgend eine Volksscene, und so bemühen sich hier zwei Ungarn, ein gefallenes Pferd aufzurichten, indem der eine am Schwanze, der andere am Zaume zieht, und letzterer zugleich zur Beförderung des Aufstehens gewaltig mit der Peitsche zuhaut.

---

## Berichtigungen.

Seite 240. Zeile 11 v. o. statt wohl lies sowohl.
„ 251. „ 10 v. o. statt eine der ersten Differenzen lies eine der Differenzen.
„ 252. „ 11 v. u. statt $l'$ lies $l$.
„ 254. „ 9 v. o. (in dem Ausdruck für $\frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}$) statt $\frac{\Delta'^2}{6\Delta''^2}$ lies $\frac{\Delta'^2}{2\Delta''^2}$.
„ 257 (ob. im mittl. Quadrat) statt $\lg.(1+\frac{\Delta'\Delta'''}{\Delta''^2})$ lies $\lg.(1+\frac{\Delta_1\Delta'''}{\Delta''^2})$.
„ 259. Zeile 1 v. o. statt $\lg.5=0{,}6987$ lies $\lg.5=0{,}69897$.
„ 260. (unten im vorletzten Quadrat) statt $0{,}43708._n$ lies $0{,}43708_n$.
„ 260. „ „ „ „ „ $9{,}07004._n$ „ $9{,}07004$.

---

# XXX.

## Die Bewegungserscheinungen des Kreisels, des rollenden Rades und der aus gezogenen Gewehren geworfenen Geschosse,

erläutert vom

Herrn Baurath Dr. *Hermann Scheffler*

zu Braunschweig.

---

Ob die Erscheinungen des Kreisels schon irgendwo wissenschaftlich erläutert worden, ist mir unbekannt. Die Thatsache steht übrigens fest, dass über jene Erscheinungen im grossen Publikum nur unklare und irrthümliche Vorstellungen obwalten, und deshalb werden die nachfolgenden Bemerkungen nicht ohne Interesse sein.

1. Der um die Axe $AB$ rotirende Kreisel $MN$ (Taf. IV. Fig. 1.) verhält sich gegen alle diejenigen Kräfte, welche nur eine Fortschrittsbewegung seines Schwerpunktes zu erzeugen streben, ebenso wie ein ruhender Körper, weshalb wir die Einwirkung solcher Kräfte hier ausser Acht lassen. Kräfte dagegen, welche eine Umdrehungsbewegung um den Schwerpunkt zu erzeugen streben, veranlassen Erscheinungen, welche von denen eines ruhenden Körpers sehr verschieden sind. Diese Erscheinungen sind übrigens nichts Anderes, als das Resultat der Komposition, welche nach mechanischen Gesetzen zwischen den Schwungkräften des Kreisels und den ferner darauf angebrachten Kräften stattfindet, und die Kreiselbewegung modifizirt, eine Komposition, welche durch folgende einfache Betrachtung stets leicht konstruirt werden kann.

Die im rotirenden Kreisel angehäufte Bewegungsgrösse kann wie der Effekt eines Kräftepaares von bestimmtem Momente

angesehen werden, dessen Axe $AB$ ist. Zur Fixirung der Begriffe werden wir im Folgenden stets annehmen, dass die Axe eines Kräftepaares nur auf derjenigen Seite seiner Drehungsebene errichtet sei, von welcher die Drehung als eine Bewegung von rechts nach links erscheint (in obiger Figur also auf der Seite $CB$) und werden wir diese Seite durch einen Punkt in der fraglichen Axe markiren. Ausserdem repräsentire behuf mathematischer Konstruktion des Kräftepaares die Länge $CB$ das Moment desselben.

Jede Einwirkung, welche nur eine Umdrehungsbewegung um den Schwerpunkt (keine Fortschrittsbewegung) zur Folge haben soll, kann nur von einem Kräftepaare ausgehen. Wir haben es hier also überhaupt nur mit Kräftepaaren und insbesondere mit der Aufsuchung der Resultante zu thun, welche sich aus der Komposition des in dem Kreisel lebenden Kräftepaares mit irgend einem anderen Kräftepaare ergeben.

Diese Resultante ergibt sich stets mit Leichtigkeit, wenn man die so eben näher charakterisirte Axe des dem Kreisel innewohnenden Kräftepaares nach dem Parallelogramme der Kräfte zusammensetzt, indem sich hierdurch die Axe des resultirenden Kräftepaares darstellt, welche nicht bloss die Drehungsrichtung, sondern auch die Intensität dieses Paares erkennen lässt.

2. Nehmen wir nun zunächst an, die untere Spitze $A$ des Kreisels werde festgehalten, und er selbst stehe schief, wie Taf. IV. Fig. 2. zeigt. Das vertikal abwärts wirkende Gewicht $DC$ des Kreisels und die vertikal aufwärts gerichtete Gegenwirkung $EA$ am Stützpunkte bilden jetzt ein zweites Kräftepaar, welches eine Umdrehungsbewegung um die horizontale Axe $CF$ zu erzeugen strebt. Setzt man dieses Paar mit dem im Kreisel selbst lebenden und durch seine Axe $CB$ repräsentirten Kräftepaares zusammen, so ergibt sich ein neues Paar, dessen Axe $CG$ ist. Hieraus folgt, dass der Kreisel, weit entfernt zu fallen, sich vielmehr so stellt, dass seine Axe $AH$ parallel zu $CG$ wird, welche letztere Linie, wenn die Intensität $CF$ klein genug gegen $CB$ ist, gegen den Horizont dieselbe Neigung hat, wie die frühere Rotationsaxe $CB$. Da nun die Schwere kontinuirlich einwirkt und in einem unendlich kleinen Zeitraume auch nur eine unendlich kleine Bewegung erzeugt; so ergibt sich, dass die Axe $AB$ des Kreisels in Folge der Schwere in einer Kegeloberfläche herumgeführt wird, deren Axe vertikal steht. Je steiler der Kreisel anfangs stand, desto geringer ist die Wirkung der Schwere oder das Moment des Kräftepaares $DC$, $EA$, desto kleiner also $CF$

und desto schwächer die Bewegung in der letzteren Kegelfläche. Je mehr aber die Axe *AB* des Kreisels geneigt war, desto stärker wird die Schwere sein und desto rascher durchläuft die Axe des Kreisels die Kegelfläche. Ausserdem erkennt man, dass diese Bewegung in der Kegelfläche um so schwächer ist, je grösser *CB*, also je grösser das Moment des im Kreisel lebenden Kräftepaares ist, d. h. je rascher derselbe um seine eigene Axe rotirt.

Wie Reibungen und Luftwiderstände den Kreisel affiziren, sein Sinken veranlassen und seine Bewegung endlich vernichten, ferner wie die bei der Bewegung in der Kegelfläche auftretende Zentrifugalkraft die Wirkung der Schwere verstärkt, wird man sich leicht vergegenwärtigen.

3. Stellen wir den Kreisel aufrecht auf eine horizontale Fläche, so wird derselbe allen Kräften, welche ihn seitlich zu bewegen streben, mit einer gewissen Energie widerstehen, weil diese Kräfte unter Konkurrenz der am Fusse des Kreisels stattfindenden Reibung nicht eine einfache Fortschrittsbewegung des Schwerpunktes, sondern daneben fast immer eine Drehung um diesen Schwerpunkt in vertikaler Ebene, also eine Richtungsveränderung der Rotationsaxe veranlassen, welcher das im Kreisel lebende Trägheitsmoment widerstrebt.

Wenn der Kreisel durch irgend eine Ursache momentan schief zu stehen kommt (Taf. IV. Fig. 3.), so wirkt die Schwere wie sub Nr. 2. auf ihn ein. Da aber jetzt der Fusspunkt des Kreisels nicht ganz frei und auch nicht ganz fest ist, indem die Reibung ihn affizirt, so spaltet sich die Wirkung der Schwere. In Folge dieser Reibung ergibt sich die Neigung zu der sub Nr. 2. beschriebenen Drehung der Axe *AB* um die durch *A* gehende Vertikale von rechts nach links. Da aber der Fusspunkt bei der hüpfenden Bewegung des Kreisels auf der unteren Fläche spielt, so weicht die Axe *AB* dergestalt aus, dass sie mit dem ganzen Kreisel in einer konischen Fläche rotirt, und dass die Spitze *A* eine Kurve *AJ* von rechts nach links herum beschreibt.

Bei dieser schrägen Stellung der Axe *AB* gegen die Unterlagsfläche erzeugt die Rotation des Kreisels um diese Axe theils in Folge der Elastizität der Stoffe, theils in Folge der Unebenheiten und der unvollkommenen Symmetrie des Kreisels heftige Stösse von oben nach unten gegen die Fläche, welche diese Fläche von unten nach oben zurückgibt. Diese Stösse affiziren die Umdrehungsbewegung des Kreisels, wie die Schwere, weshalb sie oft den Kreisel aus einer fast ganz vertikalen und ruhigen Lage plötzlich in eine starke Seitenbewegung versetzen; theils aber

schleudern diese Stösse den Kreisel in die Höhe und bewirken, wenn seine Rotation noch energisch genug ist, dass der Schwerpunkt sich wieder hebt und die Axe aus der schiefen Stellung wieder in die vertikale übergeht.

4. Stellt man den Kreisel mit vertikaler Richtung seiner Axe auf eine geneigte Fläche oder neigt man die sub Nr. 3. betrachtete horizontale Fläche, auf welcher der Kreisel aufrecht steht, so verharret er in dieser vertikalen Stellung, setzt sich aber in eine Fortschrittsbewegung. Denn die Stösse, welche ihm die Fläche von der Seite des spitzen Winkels her ertheilt, wirken auf den Kreisel, wie vorhin die Schwere, und treiben ihn seitwärts in der Richtung $AJ$ (Taf. IV. Fig. 4.), wie wenn die Fläche horizontal, die Axe $AB$ aber gegen dieselbe geneigt wäre. Im Uebrigen geht jetzt die Fortschrittsbewegung nahezu in gerader horizontaler Linie $AJ$ vor sich, weil bei der Bewegung in der Kurve $AK$ die damit verbundene konische Bewegung der Axe $AB$ dem Kreisel eine immer spitzer werdende Neigung gegen die Fläche und dem Schwerpunkte eine Bewegung mit ungleichmässiger Steigung ertheilen, also auf mehrfache Widerstände stossen würde. Wenn die Reibung in Folge der hüpfenden Bewegung des Kreisels sehr klein ist, entsteht auch wohl gleichzeitig ein Sinken an der geneigten Ebene herab, in Folge dessen die Bahn $AJ$ nicht horizontal bleibt, sondern sich abwärts neigt.

Normal auf die geneigte Fläche gestellt, beginnt der Kreisel durch die Wirkung der Schwere einen Kurvenlauf von rechts nach links herum. Hierbei kommt jedoch seine Axe immer steiler zu stehen, der Einfluss der Schwere vermindert sich also, während die derselben entgegenwirkenden Seitenstösse der geneigten Fläche sich verstärken. Demnach geht der Kreisel allmählig in die vertikale Stellung über, indem er eine Linie wie $AKJ$ verfolgt (Taf. IV. Fig. 5.), welche je nach der Kraft und dem Gewichte des Kreisels, sowie nach der Neigung und Elastizität der Unterlagsfläche vor dem Uebergange in den geradlinigen Theil $KJ$ Schlingen bildet, oder nicht.

5. Wird die Rotationsaxe $AB$ horizontal und die Drehungsebene vertikal $MN$ auf eine horizontale Fläche gestellt, so ergibt sich das rollende Rad, welches im normalen Zustande eine geradlinige Bahn verfolgt.

Sobald sich die Ebene des Rades aus irgend einer Veranlassung nach Taf. IV. Fig. 6. neigt, so dass die Axe $CB$ die horizontale Fläche in $F$ trifft, erzeugt die Schwere ein Kräftepaar mit der Axe $CD$. Wenn $CE$ die Resultante von $CB$ und $CD$

ist und man zieht *FG* parallel zu *EC*, so erkennt man, dass die Axe des Rades in die Lage *FG* übergehen und das Rad selbst im Kreise von rechts nach links herum um den Punkt *F* laufen wird.

Bekäme das Rad dagegen eine Neigung nach Taf. IV. Fig. 7., so würde dasselbe den Kreis um den Punkt *F* von links nach rechts durchlaufen.

6. Stellt man den Kreisel nach Taf. IV. Fig. 8. mit seiner oberen und unteren Spitze in einen Ring *AB*, welcher mit einem Stiele *AD* versehen und bei *D* durch ein Charnier mit dem horizontalen Hebelarme *DG* verbunden ist, setzt darauf den bei *E* an dem Hebelarme befestigten vertikalen Zapfen in eine Hülse, wodurch der Kreisel um die Axe *AB*, der Ring *AB* um die horizontale Axe bei *D* und das Ganze um die vertikale Axe bei *E* drehbar wird, so hat man ein, dem Vernehmen nach von Magnus als mechanisches Kuriosum konstruirtes Instrument vor sich.

Das Gewicht des Kreisels *C* bewirkt jetzt nach den sub Nr. 2. gegebenen Erläuterungen, dass das ganze Instrument sich von rechts nach links um die vertikale Axe *E* dreht. Je stärker die Rotationsbewegung des Kreisels ist und je steiler seine Axe steht, desto schwächer ist diese Drehung und umgekehrt.

Wenn man die Drehung um die vertikale Axe zu beschleunigen sucht, so involvirt der hierauf verwandte Impuls, weil ein Uebergang der Axe *AB* des Kreisels in die benachbarte Lage einer Drehung von rechts nach links um eine in der Ebene *EDB* liegende und auf *AB* nach oben perpendikular stehende Axe entspricht, die Wirkung eines Kräftepaares mit der Axe *CG* in Taf. IV. Fig. 9. Die Resultante *CH* von *CB* und *CG* steht steiler als *CB*, und daraus folgt, dass der Kreisel sich hebt, indem der Ring sich um *D* aufwärts bewegt.

Sucht man dagegen die Bewegung um die vertikale Axe *E* zu verzögern, so sinkt der Kreisel herab, indem der Ring um *D* sich abwärts bewegt. Hieraus ist klar, dass die Reibung an der Axe *E*, welche eine retardirende Kraft ist, ein allmähliges Sinken des Kreisels herbeiführt, während gleichzeitig in Folge der sich verlangsamenden Rotationsbewegung des Kreisels die Geschwindigkeit um die vertikale Axe *E* zunimmt.

Hängt man den Hebel *DG* am Punkte *G* so auf, dass er eine vertikale Drehungsaxe bildet, so rotirt der Ring mit dem Kreisel nach Taf. IV. Fig. 10. um diese Axe in rechtläufiger Bewegung

von rechts nach links, gleichviel, ob die Axe $AB$ des Kreisels nach oben oder nach unten geneigt ist.

Hängt man dagegen diesen Hebel mittelst zweier Zapfen $G$ (Taf. IV. Fig. 11.) so auf, dass derselbe sich mit dem Ringe $AB$ nur um eine horizontale Axe $G$ drehen kann, und versetzt ihn dann in eine pendulirende Bewegung, so hebt und senkt sich dabei abwechselnd der Ring um das Charnier $D$ dergestalt, dass die Axe $AB$ des Kreisels eine konische Fläche in umgekehrter Richtung von links nach rechts durchläuft.

7. Werfen wir den Kreisel, mit der Spitze voran, durch die Luft, so haben wir das aus einem gezogenen Gewehre geschleuderte Geschoss.

Ein solches Projektil beharret in seiner geradlinigen Bewegung mit einer weit grösseren Festigkeit, als ein Geschoss ohne Rotation, weil das in ihm lebende Trägheitsmoment einem jeden Impulse, welcher eine Drehung seiner Rotationsaxe zu bewirken strebt, einen gewissen Widerstand entgegensetzt. Wenn aber ein solcher Impuls sich geltend macht, was besonders bei den Spitzkugeln geschehen kann, indem dieselben durch Seitenwind, sowie auch bei dem parabolischen Falle ihres Schwerpunktes durch den Widerstand der Luft am Vordertheile anders, als am Hintertheile affizirt werden, was natürlich eine Verdrehung der Rotationsaxe bewirkt, so ist nach Obigem leicht zu erkennen, dass ein solcher Seitenstoss zunächst eine Verdrehung der Rotationsaxe in vertikaler Richtung, nach oben oder unten und hierauf in Folge des nun gegen die Langseite des Geschosses wirkenden Luftwiderstandes auch eine Ablenkung des Schwerpunktes in derselben vertikalen Richtung nach sich zieht.

Drehkräfte dagegen, welche in vertikalen Ebenen wirken, wie z. B. der Luftwiderstand gegen die Langseite einer Spitzkugel bei einem stark gekrümmten Bogenschusse, veranlassen eine Verdrehung der Spitze und sodann auch eine Ablenkung der ganzen Kugel aus ihrer Bahn in einer Seitenrichtung nach rechts oder links.

Hieraus erhellet auch, wie die fortgesetzte Wirkung solcher Kräfte dem Schwerpunkte der Kugel unter Umständen eine spiralförmige Bahn verleihen könne.

# XXXI.

## Elementare Herleitung der Schwingungsdauer des mathematischen Pendels.

Von

Herrn *Julius Weingarten*,

Assistenten der Mathematik am Königl. Gewerbe-Institute zu Berlin.

---

Die Schwierigkeit, welche sich der elementaren Auflösung des Problems: die Zeit zu finden, in welcher ein materieller Punkt, der sich mit bekannter variabler Geschwindigkeit auf einer Curve bewegt, ein gewisses Stück derselben zurücklegt, darbietet, liegt offenbar in der vorausgesetzten Veränderlichkeit der Geschwindigkeit des betrachteten Punktes. Dieselbe ist allerdings sofort dadurch gehoben, dass man die Bewegung jenes Punktes für so kleine Zeitintervalle verfolgt, für welche jene vorausgesetzte Veränderlichkeit unwirksam bleibt; allein derartige Betrachtungen scheinen für Anfänger oder für die der höheren Analysis Unkundigen nicht verständlich zu sein, und das vielleicht mit gutem Grund. In der That lässt sich aber jene Betrachtung durch eine andere, der Natur der Sache ebenso angemessene, die sich zugleich für eine phoronomische Darstellung eignet, und eine für Laien grössere Anschaulichkeit besitzt, ersetzen.

---

Es bewege sich auf der Curve $mn$ (Taf. V. Fig. 1.) der Punkt $p$ mit der variablen Geschwindigkeit $v$. Es soll die Zeit gefunden werden, in welcher er das Stück $nm$ derselben zurücklegt.

Denkt man den Punkt $p$ während seiner Bewegung parallel der beliebig gerichteten Linie $nn_1$ beleuchtet, so wird es offen-

bar stets möglich sein, eine andere Curve $n_1 m_1$ so zu ziehen, dass der bei dieser Beleuchtung entstehende Schatten $p_1$ des Punktes $p$ sich auf jener Curve mit einer constanten Geschwindigkeit $c$ bewegt. Bezeichnen wir nun die Länge des Stückes $n_1 m_1$ durch $l$, die Zeit, in welcher $p$ von $n$ bis $m$, also $p_1$ sich von $n_1$ bis $m_1$ bewegt, durch $T$, so wird offenbar

$$T = \frac{l}{c},$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist, falls die Curve $n_1 m_1$ angegeben werden kann. Es sei nunmehr der Einfachheit wegen $nn_1$ horizontal gewählt. Da nun die beiden beweglichen Punkte $p$ und $p_1$ in gleichen Zeiten gleiche vertikale Wege durchlaufen, so müssen ihre vertikalen Geschwindigkeiten gleich sein, was die Bedingung ergiebt, dass zu jeder Zeit

$$v \sin\varphi = c \sin\varphi_1,$$

wo $\varphi$ der Winkel, welchen die Geschwindigkeit, das heisst die Tangente in $p$, $\varphi_1$ der Winkel, den die Tangente in $p_1$ mit der Horizontalen bildet. Diese Gleichung definirt die Curve $n_1 m_1$ vollständig.

## I. Anwendung auf das Cycloïdenpendel.

Auf dem Cycloïdenbogen $\alpha\beta$ (Taf. V. Fig. 2.) falle ein materieller Punkt $p$, der in $m$ seine Bewegung ohne anfängliche Geschwindigkeit beginnt. Schlägt man über der anfänglichen Höhe $a$ des fallenden Punktes einen Halbkreis, so ist dieser eine Curve, auf welcher sich bei der Bewegung von $p$ der Schatten dieses Punkts constant bewegt, falls die Beleuchtung horizontal ist.

In der That ist die Geschwindigkeit von $p$, in der Stellung $p$, das heisst $v$, gleich $\sqrt{2gh}$, und die Bedingung der gleichen Vertikalbewegung von $p$ und $p_1$ giebt wie oben

$$v \sin\varphi = c \sin\varphi_1.$$

Nun ist bekanntlich, wenn $r$ die Länge des Halbmessers des Erzeugungskreises der Cycloïde,

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{a-h}{2r}} \quad \text{(s. unten die Anmerkung)}$$

und ferner

$$\sin\varphi_1 = \frac{\gamma}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{a}\sqrt{h(a-h)},$$

**wodurch:**

$$\sqrt{2gh}\,.\sqrt{\frac{a-h}{2r}} = c\,.\,\frac{2}{a}\sqrt{h(a-h)}.$$

**Hieraus folgt:**

$$c = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{g}{r}},$$

**d. h. die Geschwindigkeit des Schattens $p_1$ ist in der That constant und gleich $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}$.**

**Ist nun $T$ die Zeit, in welcher der Punkt $p$ von $m$ nach $\beta$ gelangt, oder diejenige, in welcher $p_1$ den Halbkreis $\frac{a\pi}{2}$ zurücklegt, so wird**

$$T\frac{a}{2}\sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{a}{2}\pi$$

**oder**

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

**welcher Werth die halbe Schwingungszeit des Cycloïdenpendels angiebt. Hieraus ergiebt sich die Eigenschaft der Cycloïde als Tautochrone.**

**Auf gleiche Weise findet man die Zeit, in welcher der fallende Punkt von $m$ aus in die Lage $p$ gelangt zu:**

$$t = \text{arc}\left(\cos = \frac{2a-h}{a}\right).\sqrt{\frac{r}{g}},$$

**wie anderweitig bekannt.**

**Anmerkung. Diese Formel ergiebt sich leicht auf folgendem Wege.**

**Eine Cycloïde wird bekanntlich von einem bestimmten Punkte der Peripherie eines Kreises beschrieben, wenn derselbe, ohne zu gleiten, auf einer geraden Linie rollt.**

**Es sei (Taf. V. Fig. 3.) *AB* die angenommene Gerade, *m* der die Cycloïde beschreibende Punkt, der durch Rollen des Kreises *omo'* in seine jetzige Lage gekommen ist, so wird im Momente**

des Weiterrollens offenbar eine Drehung des Kreises um den Punkt $o$ stattfinden, der Punkt $m$ sich also in senkrechter Richtung gegen $om$ fortbewegen. Die Linie $om$ ist also eine Normale gegen die Cycloïde, woraus sich $\sin\varphi$, d. h. der Sinus des Winkels, den die Tangente in $m$ an die Cycloïde mit $AB$ bildet, sehr leicht zu

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{y}{2r}}$$

ergiebt, da $\varphi$ wegen des Obigen gleich $\angle moo'$ sein wird. $y$ hat dieselbe Bedeutung wie früher $a-h$.

## II. Kreispendel.

Fällt der bewegliche Punkt auf einem Kreisbogen $mp\beta$ vom Radius $l$ (Taf. V. Fig. 4.), so wird die Bewegung seines Schattens $p_1$ auf dem wie vorher über der anfänglichen Fallhöhe gezeichneten Halbkreise nicht mehr gleichförmig sein. Allein wenn die Schwingungen des Pendels nur klein sind, so wird dieser Umstand mit grosser Annäherung stattfinden, wie man sofort sehen wird.

Bedeutet wie oben $c$ die Geschwindigkeit des Schattens $p_1$ auf dem über $a$ geschlagenen Halbkreise, so giebt die Identität der vertikalen Bewegungen wiederum:

$$\sqrt{2gh}.\sin\varphi = c\sin\varphi_1.$$

Nun ist aber

$$\sin\varphi_1 = \frac{2}{a}\sqrt{h(a-h)}.$$

Ferner ist

$$a-h = l - l\cos\varphi = 2l\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

also

$$\sqrt{a-h} = \sqrt{2l}.\sin\frac{\varphi}{2},$$

wodurch sich die obige Gleichung in

$$\sqrt{2g}.\sin\varphi = c.\frac{2}{a}.\sqrt{2l}.\sin\frac{\varphi}{2}$$

oder in

$$c = a\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\frac{\varphi}{2}$$

verwandelt. Es ist daher die Geschwindigkeit $c$ nicht constant, liegt aber offenbar zwischen den Grenzen

$$a\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und} \quad a\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\frac{\alpha}{2},$$

wo $\alpha$ die anfängliche Pendelelongation bedeutet. Diese beiden Grenzen fallen für kleine $\alpha$, d. h. für kleine Schwingungen, zusammen, da ihr Unterschied

$$2a\sqrt{\frac{g}{l}}\,.\,\sin^2\frac{\alpha}{4}$$

von der zweiten Ordnung ist.

Für diesen Fall ist also offenbar

$$c = a\sqrt{\frac{g}{l}}$$

und, wie oben, $T$, die Zeit einer halben Pendelschwingung:

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

woraus man sieht, dass ein Kreispendel für kleine Schwingungen isochron ist.

Im Allgemeinen sind aber für grössere Schwingungen jene beiden Grenzen nicht als zusammenfallend anzusehen. In diesem Falle können wir aber annähernd für $c$ das arithmetische Mittel zwischen jenen beiden Grenzen annehmen, was, wie man weiss, für kleinere Elongationen um so mehr gestattet ist. Es ist alsdann

$$c = a\sqrt{\frac{g}{l}}\,.\,\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$= a\sqrt{\frac{g}{l}}\,.\cos^2\frac{\alpha}{4} = a\sqrt{\frac{g}{l}}\,.\,\{1-\sin^2\frac{\alpha}{4}\},$$

und folglich

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,.\,\frac{1}{1-\sin^2\frac{\alpha}{4}},$$

wofür man auch, indem man $\frac{\alpha}{4}$ statt $\sin\frac{\alpha}{4}$ schreibt, was wegen der vorausgesetzten Kleinheit von $\alpha$ zulässig ist;

$$T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{16}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1+\frac{\alpha^2}{16}}{1-\frac{\alpha^4}{16.16}}$$

erhält.

Da ferner die Grösse $\frac{\alpha^4}{16.16}$ durchaus nicht influirt, so folgt

$$T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot(1+\frac{\alpha^2}{16})$$

als eine zweite Näherungsformel für die halbe Schwingungszeit des mathematischen Pendels.

Hätte man statt des Halbkreises über $a$ eine Curve gezeichnet, welche durch die Bedingung

$$\sin\varphi_1=\frac{2}{a}\sqrt{\frac{2h(a-h)(2l-a+h)}{l}}$$

definirt wird, so wäre auf dieser Curve die Bewegung des Schattens von $p$ gleichförmig geworden, und man hat für die Geschwindigkeit dieser Bewegung:

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

gefunden. Bezeichnet man die Länge jener Curve durch $\frac{ak}{2}$, so ist die halbe Schwingungszeit des Pendels genau:

$$T=k\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Allein die Grösse $k$ lässt sich elementar nicht weiter entwickeln, sondern nur durch Reihen oder in Gestalt eines elliptischen Integrales angeben, wie diess in der Natur der Sache selbst liegt.

---

Die vorhergehenden Betrachtungen scheinen mir geeignet, in die Lehrbücher der Physik, in denen die Beweise derartiger Formeln meistens fehlen, aufgenommen werden zu können, wesshalb ich mir erlaubte, dieselben hier mitzutheilen. Ich will nur noch bemerken, dass man auf ganz elementare Art z. B. die Keplerschen Gesetze und alle einfachen dynamischen Aufgaben zu behandeln im Stande ist, ohne sich der Betrachtung des Unendlichkleinen zu bedienen.

# XXXII.

## Die Bahn der Quotiente oder Curve aus zwei Brennpunkten, mit Fahrstrahlen von beständigem Verhältnisse.

Von

Herrn Archivars-Assistenten *Riedl von Leuenstern*

zu Wien.

---

1. Es seien auf der gegebenen Geraden $(AF)$ (Taf. V. Fig. 5.) die Punkte $f$ und $B$ bestimmt, so dass $(Bf)=\varphi$, $(BF)=\varphi q$, $\varphi q > \varphi$ werde, und wir wollen $F$ und $f$ als Brennpunkte, $\varphi q$ und $\varphi$ als Fahrstrahlen für den Scheitel $B$, dabei $q$ als beständigen Quotienten der veränderlichen Fahrstrahlen betrachten, nämlich:

$$(D_1F)=\varphi_1 q,\quad (D_1f)=\varphi_1,$$

$$(D_2F)=\varphi_2 q,\quad (D_2f)=\varphi_2,$$

u. s. f. bis

$$(AF)=\varphi_n q=(AB)+\varphi q$$

und

$$(Af)=\varphi_n=(AB)-\varphi.$$

Wenn nun die Punkte $D$, $D_1$, $D_2$, $D_3 \ldots . D_n$ oder $A$, und so jenseits der Axe $(AB)$ wieder zurück bis $B$, in einer Krummen liegen, also $(DB)$, $(D_1B)$, $(D_2B) \ldots .$ deren Sehnen sind, so behaupte ich erstens, dass **die beiden Winkel einander gleich sind, welche jede solche Sehne, z. B. $(D_1B)$, mit den beiden zu ihr gehörigen Fahrstrahlen $\varphi_1 q$ und $\varphi_1$ bildet**, d. i. $(BD_1F)=(BD_1f)$. Zieht man nämlich $(Be)$ in gleicher Richtung mit $(FD_1)$ und eben so $(fg)$ parallel mit $(BD_1)$, wobei

sich die Durchschnittspunkte $p_1$ und $m$, wie auch die Längenwerthe:

$$(p_1m) = \alpha, \quad (Bm) = \beta,$$
$$(D_1m) = \gamma, \quad (fm) = \delta,$$
$$(D_1p_1) = \lambda, \quad (cp_1) = \varkappa,$$
$$(fp_1) = \mu, \quad (cf) = \theta$$

feststellen, so werden die Winkel:

$$(BD_1f) = (D_1fg)$$

und

$$(BD_1F) = (D_1BE);$$

es wird aber auch:

$$\varphi_1 q : (\gamma + \delta) = \varphi q : \varphi = (\alpha + \beta);$$

ferner:

$$\alpha : \delta = \gamma : \beta;$$

daher:

$$\gamma + \delta = \alpha + \beta,$$
$$\beta = \gamma,$$
$$\alpha = \delta,$$

und die Winkel:

$$(D_1fg) = (D_1Be) = (BD_1F) = (BD_1f).$$

2. Aus diesem folgt unmittelbar:

$$(cp_1f) = (cfp_1) = (cD_1B) = (cBD_1)$$

und

$$\lambda = \varphi, \quad \varkappa = \theta;$$

und so für jeden Punkt $D_2$, $D_3 \dots D_n$ oder $A$:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_n = (p_nA) = \varphi,$$
$$\varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa_n = (p_nc) = \theta;$$

es ist also:

$$(Ac) = \lambda + \varkappa = \theta + \varphi = (Bc) = (D_1c) = (D_2c) = (D_4c) = \tfrac{1}{2}(AB),$$

und die Punkte $B$, $D$, $D_1$, $D_2 \dots$ bis $A$, dann eben so jenseits wieder zurück bis $B$, liegen sämmtlich in einer **Kreislinie**.

Indem sich die Natur dieser Krummen auf solche Weise bekannt gibt, so wird ihre weitere Erforschung überflüssig.

3. Es seien $f$ und $F$ als Brennpunkte und zwischen ihnen $B$ als Scheitel in beliebigen Entfernungen gegeben, wobei $(Bf)<(BF)$; zu finden den Mittelpunkt $c$ und Halbmesser $(Bc)$ eines Kreises, in dessen Peripherie alle durch die beiden Fahrstrahlen mit beständigem Quotienten bestimmten Punkte liegen.

Ich nenne

$$(fA)=x, \quad (BA)=2r=\varphi+x, \quad (FA)=\varphi q+\varphi+x;$$

so gibt:

$$\varphi q:\varphi=(\varphi q+\varphi+x):x$$

$$x=\frac{\varphi q+\varphi}{q-1}$$

und

$$(Bc)=r=\frac{\varphi q}{q-1}.$$

Zur metrischen Darstellung (Taf. V. Fig. 6.) wird

$$r=\frac{\varphi^2 q}{\varphi q-\varphi}$$

genommen, dann

$$(\varphi q-\varphi):\varphi=\varphi q:r.$$

Aus den bekannten Punkten $f$, $B$, $F$ bestimmen sich $a$, $g$, $h$, indem man $(aB)=(Bf)$, $(aF)=(Fg)$ und die Senkrechte $(gh)=(Bf)$ macht. Es wird dann die Linie $(hF)$ verlängert, bis sie in $c'$ die Senkrechte auf $B$ trifft, worauf $(Bc')=(Bc)=r$ und der verlangte Kreis sich findet.

4. Soll aber aus dem gegebenen Kreise, dann dem Orte $(Bf)=\varphi$ des innern Brenpunktes der äussere $(BF)=\varphi q$ gesucht werden, oder umgekehrt, so ist für den äussern, $F$:

$$\varphi q=\frac{r\varphi}{r-\varphi},$$

für den innern, $f$:

$$\varphi=\frac{r\varphi q}{r+\varphi q},$$

und für den Quotienten:

$$q = \frac{r}{r-\varphi}.$$

Die Zeichnung gibt aus den bekannten Punkten $c$, $B$ und einer gewählten Sehne $(DB)$ unmittelbar den Ort beider Brennpunkte, indem man aus $D$ einen Bogen $F'B'f'$ zieht und $(F'B') = (B'f')$ macht; die Schenkel $(Df')$ und $(DF')$ schneiden den verlängerten Durchmesser $(cg)$ in $f$ und $F$.

# XXXIII.

## Ueber die Bestimmung der Drehungswinkel an Messinstrumenten, die mit einem beweglichen Spiegel versehen sind, welcher das Bild einer feststehenden Scale in einem Fernrohr erscheinen lässt.

Von

Herrn Professor J. Stegmann

an der Universität zu Marburg.

Bei physikalischen Untersuchungen, welche die genaue Beobachtung kleiner Drehungswinkel verlangen, um daraus einen Schluss auf die Grösse der diese Veränderungen hervorrufenden Kräfte herzuleiten, bedient man sich häufig mit bestem Erfolge jener Spiegelvorrichtung, die zuerst durch das Gauss'sche Magnetometer allgemein bekannt geworden ist. Es wird nämlich an demjenigen Theile des Apparats, welcher um eine feste (meistens vertikale) Umdrehungsaxe drehbar ist, ein ebener Spiegel angebracht und in grösserer oder geringerer Entfernung ein Fernrohr und ein mit einer Scale versehener Stab so aufgestellt, dass man das vom Spiegel reflektirte Bild der Scale im Fernrohr beobach-

len kann. Die Scale, als eine gerade Linie aufgefasst, soll perpendikulär gegen eine Ebene gestellt werden, welche man parallel zur Umdrehungsaxe durch die optische Axe des Fernrohrs (genauer zu reden durch die Collimations-Linie) legen kann. Im Brennpunkte des Oculars dieses letztern befindet sich ein Faden, der ebenfalls senkrecht zur Richtung der Scale sein soll, so dass er in der eben gedachten, mit der Umdrehungsaxe parallelen Ebene liegt, welche wir der Kürze wegen die Visirebene nennen wollen. Sobald nun in Folge einer kleinen Drehung der Spiegel successiv andere Stellungen einnimmt, so wird von dem gedachten Faden das Bild der Scale allmählig in andern Theilungspunkten durchschnitten, und es kommt dann darauf an, aus der Anzahl der Scalentheile ($=x$), welche durch den Faden hindurchgelaufen sind, die Grösse des Drehungswinkels ($=\psi$) zu bestimmen.

Wir legen dieser Untersuchung, um sie in der erforderlichen Allgemeinheit durchzuführen, weder die Voraussetzung zu Grunde, dass die Umdrehungsaxe in der Ebene des Spiegels selbst, noch dass sie mit dieser Ebene parallel liege; wir nehmen vielmehr an, dass die Spiegelebene gegen die Umdrehungsaxe unter einem Winkel $\theta$ geneigt sei, so dass, wenn die Axe vertikal steht, der Neigungswinkel der Spiegelebene gegen die Horizontalebene gleich $(90^0-\theta)$ ist. Obschon bei den praktischen Anwendungen in der Regel der Winkel $\theta$ von Null nicht sehr verschieden sein mag, so kann er doch manchmal auch eine merkliche Grösse besitzen. Was die Richtung der Umdrehungsaxe anbelangt, so wollen wir uns um grösserer Anschaulichkeit willen dieselbe als vertikal vorstellen, die Entwickelungen gelten aber, wie man sogleich einsehen wird, für jede beliebige Lage.

Wenn nun bei irgend einer Stellung des drehbaren Theils des Apparats durch die Drehungsaxe eine auf der Ebene des Spiegels senkrechte Ebene gelegt wird, so erhält man als Durchschnitt mit der nöthigenfalls erweiterten Spiegelebene eine Gerade, welche sich mit der Axe unter dem Winkel $\theta$ schneidet. Durch Rotation dieser Geraden entsteht eine gemeine Kegelfläche, an welcher die (nöthigenfalls erweiterte) Ebene des Spiegels fortwährend, bei jeder während der Drehung erreichten Stellung, eine tangirende Ebene ist. Eine Normale des Spiegels ist daher, bei jeder Stellung des Spiegels, parallel mit den längs einer bestimmten Kegelseite auf die Kegelfläche zu errichtenden und durch die Umdrehungsaxe laufenden Normallinien. Diese letzteren, oder wenn man lieber will ihre Horizontalprojectionen, können nach jeder Richtung des Horizonts gezogen werden, also auch parallel zur Visirebene. Es lässt sich daher, indem man eine mit der

Visirebene parallele Ebene durch die Umdrehungsaxe legt und die durch diese Ebene bestimmte Erzeugungslinie der Kegelfläche in's Auge fasst, eine solche Lage des Spiegels construiren, dass die Visirebene senkrecht auf ihm steht. Diese Position betrachten wir im Folgenden als die Anfangsstellung, von welcher aus die Drehung beginnen soll.

In Taf. V. Fig. 7., worin $S$ das Seherohr, $AaMm$ eine ebene Tafel und $TU$ die darin gezeichnete Scale bedeutet, ist die so eben erwähnte Kegelfläche durch $OKEke$ vorgestellt worden. Zwei verschiedene Positionen des Spiegels sind in $Dd$, $Ji$ angedeutet, von denen die erstere die Anfangsstellung bedeuten möge, so dass die Visirebene $SDd$ senkrecht sowohl auf der Spiegelebene, wie auf der Tafel $AaMm$ steht. Die Kegelseiten, längs welchen die Kegelfläche von den erweiterten Spiegelebenen tangirt wird, sind $Ee$ für die erste, $Kk$ für die andere Stellung.

Nehmen wir nun die Drehungsaxe zur Axe der $Z$ und die durch die Drehungsaxe parallel zur Visirebene gelegte Ebene $ZOEe$ zur Ebene der $ZY$ an, so dass zum Ursprung der Coordinaten vorerst noch ein beliebiger Punkt der Drehungsaxe gewählt werden möge, die positive Axe der $Y$ aber nach vorne, d. h. nach der Seite, wo das Fernrohr aufgestellt ist, gezogen werden soll. Alsdann wird die Visirebene durch eine Gleichung von der Form

$$x = a$$

bestimmt. Die Constante $a$ wird in der Figur, da $Dd$ die Durchschnittslinie der Visirebene mit dem in der Anfangsstellung befindlichen Spiegel, ferner $Bb$ diejenige in der Tafel zu ziehende Gerade, deren Bild mit dem Faden im Seherohr zusammenfällt, und $Aa$ die Durchschnittslinie der Ebene $ZOEeY$ mit der Tafel bedeuten soll, durch $AB = ab = DE = de$ angegeben.

Um für eine beliebige Position $Ji$, sobald eine Drehung um einen Winkel $EOK = \psi$ Statt gefunden hat, die Gleichung der Spiegelebene, so wie ihrer Durchschnittslinie $Ji$ mit der Visirebene zu finden, bezeichnen wir durch $b$ das von der Ebene des Spiegels in seiner Anfangsstellung abgeschnittene Stück $OE$, wobei es sich von selbst versteht, dass dieser Constanten $b$ unter Umständen ein negativer Werth zu ertheilen ist, und bemerken, dass dann allgemein von der Ebene des Spiegels auf den Coordinatenaxen $OX$, $OY$, $OZ$ bezüglich die Stücke

$$\frac{b}{\sin\psi}, \quad \frac{b}{\cos\psi}, \quad -\frac{b}{\operatorname{tang}\theta}$$

abgeschnitten werden. Die Drehung $\psi$ bringen wir hierbei als positiv oder als negativ in Rechnung, je nachdem sie in demselben Sinne, wie wenn man die positive Axe der $Y$ nach der positiven Axe der $X$ hin drehen wollte, oder im entgegengesetzten Sinne vor sich geht. Was den Winkel $\theta$ anbelangt, so haben wir den Fall zu Grunde gelegt, dass die auf der Spiegelebene nach dem Auge des Beobachters hin zu ziehende Normallinie mit der Richtung der positiven $Z$ einen stumpfen Winkel bilde. Wäre dieser Winkel spitz, so müsste $\theta$ in den folgenden Entwickelungen als eine negative Grösse genommen werden. — Demnach ist

$$(1)\qquad x\sin\psi + y\cos\psi - z\,\mathrm{tang}\,\theta = b$$

die Gleichung der Spiegelebene; und die Durchschnittslinie $Ji$ ist durch das System der zwei Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a, \\ y\cos\psi - z\,\mathrm{tang}\,\theta = b - a\sin\psi \end{cases}$$

bestimmt.

Es handelt sich jetzt darum, durch $Ji$ eine Ebene $JiMm$ zu construiren, welche mit der Ebene des Spiegels denselben Neigungswinkel bildet, wie die Visirebene $JiS$, und welche also diejenigen Lichtstrahlen enthält, die durch Reflexion in die Visirebene gelangen. Die in irgend einem Punkte von $Ji$ auf die Spiegelebene zu errichtende Normale, welche parallel und gleichgerichtet mit einem von $O$ auf die Kegelseite $Kk$ zu fällenden Perpendikel laufen würde, bildet mit den Richtungen der positiven Coordinatenaxen drei Winkel, deren Cosinus zu Folge (1) durch

$$\frac{\sin\psi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\,\theta^2}},\quad \frac{\cos\psi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\,\theta^2}},\quad \frac{-\mathrm{tang}\,\theta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\,\theta^2}},$$

d. h.

$$(3)\qquad \sin\psi\cos\theta,\quad \cos\psi\cos\theta,\quad -\sin\theta$$

angegeben werden. Andererseits ist die in einem Punkte von $Ji$ auf die Visirebene zu errichtende Normallinie, als eine mit $OX$ gleichgerichtete Gerade, gegen die Coordinatenaxen unter Winkeln geneigt, deren Cosinus 1,0,0 sind. Daher giebt

$$\sin\psi\cos\theta$$

den Cosinus des spitzen Neigungswinkels der Visirebene gegen die Spiegelebene an. Stellen wir uns die

Gleichung der Ebene $JiMm$, welche mit der Spiegelebene denselben Neigungswinkel bilden soll, einstweilen durch

$$x + By + Cz + D = 0$$

vor, so muss nach der bekannten Regel der analytischen Geometrie erstens die Gleichung

$$(4)\qquad \pm\frac{\sin\psi\cos\theta + B\cos\psi\cos\theta - C\sin\theta}{\sqrt{1+B^2+C^2}} = \sin\psi\cos\theta,$$

und zweitens, weil in der fraglichen Ebene die Gerade (2) enthalten ist, das System der zwei Bedingungsgleichungen

$$(5)\qquad a + B\frac{b - a\sin\psi}{\cos\psi} + D = 0,$$

$$(6)\qquad B\frac{\tang\theta}{\cos\psi} + C = 0$$

erfüllt sein. Wird (4) quadrirt und für $C$ der aus (6) zu entnehmende Werth eingesetzt, wodurch sich

für $B\cos\psi\cos\theta - C\sin\theta$ der Werth $\dfrac{B(\cos\psi^2\cos\theta^2 + \sin\theta^2)}{\cos\psi\cos\theta}$

und für $B^2 + C^2$ „ „ $\dfrac{B^2(\cos\psi^2\cos\theta^2 + \sin\theta^2)}{\cos\psi^2\cos\theta^2}$

ergiebt, so erhält man

$$2\sin\psi\cdot\frac{B(\cos\psi^2\cos\theta^2 + \sin\theta^2)}{\cos\psi} + \frac{B^2(\cos\psi^2\cos\theta^2 + \sin\theta^2)^2}{\cos\psi^2\cos\theta^2}$$
$$= \frac{B^2(\cos\psi^2\cos\theta^2 + \sin\theta^2)}{\cos\psi^2\cos\theta^2}.\sin\psi^2\cos\theta^2,$$

d. h.

$$2B\tang\psi + B^2\left(1 + \frac{\tang\theta^2}{\cos\psi^2}\right) = B^2\tang\psi^2,$$

oder, nach Multiplikation mit $\cos\psi^2$,

$$B\sin 2\psi + B^2(\mathrm{tg}\,\theta^2 + \cos 2\psi) = 0.$$

Diese Gleichung kann erstens durch $B=0$ befriedigt werden. Dazu gehört zufolge (6) $C=0$. Die Gleichung (4) wird dann eine identische; aus (5) fliesst aber $D=-a$, und man gelangt mittelst dieser Bestimmungen zur Gleichung

$$x - a = 0,$$

d. h. zur Visirebene. Diese ist in der That die eine der beiden Ebenen, welche sich durch *Ji* unter dem besprochenen Neigungswinkel gegen die Spiegelebene legen lassen. Für die andere, nämlich die gesuchte Ebene *JiMm*, besteht demnach die Bedingung

$$\sin 2\psi + B(\operatorname{tg}\theta^2 + \cos 2\psi) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$B = -\frac{\sin 2\psi}{\operatorname{tg}\theta^2 + \cos 2\psi},$$

also mit Zuziehung von (6):

$$C = \frac{2\operatorname{tg}\theta \sin\psi}{\operatorname{tg}\theta^2 + \cos 2\psi},$$

und da sich zufolge (5) die gesuchte Gleichung in der Form

$$(x-a) + B\left(y - \frac{b - a\sin\psi}{\cos\psi}\right) + Cz = 0$$

schreiben lässt, so erhält man definitiv:

$$(7)\quad (x-a)(\operatorname{tg}\theta^2 + \cos 2\psi) - \left(y - \frac{b - a\sin\psi}{\cos\psi}\right)\sin 2\psi + 2z\operatorname{tg}\theta\sin\psi = 0.$$

Wenn nun die Tafel *AaBbMm*, welche wir uns als Erweiterung des schmalen Streifens *TU* denken, worin sich die Theilstriche der Scale befinden, als eine solche Ebene aufgefasst werden müsste, welche parallel zur Umdrehungsaxe, etwa im Abstande $y = k$ aufgestellt wäre; so würde man, indem man an die Stelle von $y$ in (7) die Constante $k$ einsetzte, eine Gleichung für die Gerade *Mm* finden, worin die beiden Variablen $x$, $z$ vorkommen, und welche, weil der veränderliche Winkel $\psi$ in den Coefficienten auftritt, sofort erkennen lässt, dass sämmtliche Geraden *Mm* keineswegs mit einander und mit *Bb* parallel bleiben, sondern bei wachsendem $\psi$ unter immer schieferem Winkel die Scale *TU* durchschneiden. — Anders verhält es sich aber, wenn wir annehmen, die Tafel sei parallel zur Ebene des Spiegels in dessen Anfangsstellung. Alsdann hat dieselbe offenbar die Gleichung

$$\frac{y-k}{z} = \operatorname{tang}\theta,$$

wobei $k$ die auf der Axe der $Y$ abgeschnittene Strecke $OY$ bedeutet. Führt man den hieraus fliessenden Werth $k + z\operatorname{tang}\theta$ für $y$ in (7) ein, so erhält man sofort:

$$(8)\quad \begin{aligned}(\operatorname{tg}\theta^2+\cos 2\psi)(x-a)+2\operatorname{tg}\theta\sin\psi(1-\cos\psi).z\\ =2(k\cos\psi-b+a\sin\psi)\sin\psi\end{aligned}$$

als Gleichung der in der Ebene der Tafel gelegenen Geraden $Mm$. Bei den Beobachtungen, zu welchen die hier in Rede stehenden Messinstrumente benutzt werden, bleiben die durch $\psi$ angegebenen Drehungen sehr klein, so dass das Produkt $\sin\psi(1-\cos\psi)$ im Verhältniss zur Einheit eine unmerkliche Grösse wird, folglich auch der Coefficient von $z$ in vorstehender Gleichung im Verhältniss zum Coefficienten von $x$ verschwindet. In demselben Maasse aber, wie der Quotient aus den genannten Coefficienten abnimmt, nähert sich die Gerade $Mm$, deren Gleichung durch (8) angegeben wird, dem Parallelismus mit $Aa$. — Bei den praktischen Anwendungen pflegt man freilich hauptsächlich nur dafür Sorge zu tragen, dass die Latte, welche die Scale trägt, rechtwinklig zur Visirebene stehe, und achtet nicht weiter auf die so eben besprochene andere Bedingung, durch welche erzielt würde, dass die Bilder der beobachteten Theilstriche mit dem Faden des Oculars im Momente ihres Durchgangs möglichst genau zusammenfallen. Wenn man nämlich die vordere Wand der Latte als eine vertikale, d. h., allgemeiner zu reden, als eine mit der Umdrehungsaxe parallele Ebene aufstellt, so entspricht dies strenge genommen nur der Voraussetzung, dass Winkel $\theta$ gleich Null sei. Allein in Anbetracht der geringen Grösse der durch $\psi$ gemessenen Elongationen, so wie der unbedeutenden Länge der einzelnen Theilstriche, wird es in der That auf diesen Umstand gar nicht ankommen.

Wir haben bis hierher den Anfangspunkt der Coordinaten $Z$ in der Umdrehungsaxe unbestimmt gelassen. Sehen wir jetzt von der Länge der einzelnen Theilstriche ganz ab, betrachten die Scale also als eine L i n i e und nehmen denjenigen Punkt $O_1$, worin die durch diese Gerade senkrecht auf die Umdrehungsaxe zu legende (horizontale) Ebene die Umdrehungsaxe schneidet, zum Ursprung der Coordinaten, setzen also, um den Durchschnittspunkt der Geraden $Mm$ mit der Scale zu bestimmen, $z=0$; so erhalten wir

$$(9)\quad (\operatorname{tg}\theta^2+\cos 2\psi)(x-a)-2(k\cos\psi-b+a\sin\psi)\sin\psi=0.$$

Hierin bedeutet jetzt $k$ den k ü r z e s t e n A b s t a n d d e r S c a l e v o n d e r U m d r e h u n g s a x e. Um aber die Constante $b$, d. h. das von der erweiterten Ebene des Spiegels auf der Axe der $Y$, nämlich $O_1A$, abgeschnittene Stück durch die am Apparate unmittelbar zu messenden Grössen auszudrücken, denken wir uns

durch den Mittelpunkt des Spiegels eine auf der Umdrehungsaxe perpendikuläre Ebene gelegt, bezeichnen deren Abstand von der durch die Scale gelegten Ebene der $XY$ mit $H$, den Abstand des Mittelpunkts des Spiegels von der Umdrehungsaxe, d. h. den Radius des von jenem Mittelpunkte beschriebenen Kreisbogens mit $r$, und den Winkel, welchen $r$ bei der Anfangsstellung des Spiegels mit der Richtung der positiven $Y$ bildet, mit $\omega$, so dass $\sin\omega = \frac{a}{r}$ ist. Offenbar besteht dann die Relation

$$b = r\cos\omega - H\operatorname{tang}\theta,$$

d. h.

$$b = -H\operatorname{tang}\theta \pm \sqrt{r^2 - a^2}, \tag{10}$$

worin man die Wurzelgrösse mit dem oberen oder unteren Vorzeichen zu nehmen hat, je nachdem $\omega$ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist. Selbstverständlich erhält $H$ einen negativen Werth, so bald der durch diese Zahl gemessene Abstand von $O_1$ an gerechnet nach der Richtung der negativen $Z$ fällt.

Aus der Gleichung (9) ist nun, indem man $x$ als die durch unmittelbare Beobachtung gefundene Zahl ansieht, das zugehörige $\psi$ zu bestimmen. Zu einem für die Praxis brauchbaren Näherungswerth muss man aber in Anbetracht der geringen Grösse der Drehung, welche vom Ruhestande aus nach der einen, wie nach der andern Seite hin nicht wohl mehr als 7° bis 8° beträgt, schon dadurch gelangen, dass man den Sinus und Cosinus nach den Potenzen von $\psi$ entwickelt und alle mit $\psi^2$ multiplicirten Glieder vernachlässigt; oder auch dadurch, dass man

$$\operatorname{tang}\theta^2\cos 2\psi \text{ statt } \operatorname{tang}\theta^2, \text{ so wie } b\cos\psi \text{ statt } b$$

setzt und das Glied $-2a\sin\psi^2$ unbeachtet lässt. Auf diese Art reducirt sich Gleichung (9) in

$$\frac{x-a}{\cos\theta^2}\cos 2\psi - (k-b)\sin 2\psi = 0$$

und liefert den Werth

$$\operatorname{tang} 2\psi = \frac{x-a}{(k-b)\cos\theta^2}. \tag{11}$$

Um den Grad der Genauigkeit zu erfahren, welchen diese Formel verspricht, oder, falls es nöthig wird, die hinzuzufügende Correction zu bestimmen, kann man auf die gewöhnliche Weise verfahren. Bezeichnet $F(\psi)$ den linken Theil der Gleichung (9), $F'(\psi)$ die erste Derivirte, so dass

$$F(\psi) = (x-a)\operatorname{tg}\theta^2 + x\cos 2\psi - k\sin 2\psi + 2b\sin\psi - a,$$

$$F'(\psi) = -2[x\sin 2\psi + k\cos 2\psi - b\cos\psi]$$

ist, bezeichnet ferner $\psi_1$ den mittelst (11) berechneten Werth von $\psi$, und $\Delta\psi_1$ die hinzuzufügende Correction, so dass $F(\psi_1+\Delta\psi_1)=0$ werden soll; so hat man näherungsweise

$$\Delta\psi_1 = -\frac{F(\psi_1)}{F'(\psi_1)}.$$

Ohne Mühe findet man nun, indem man für $x$ seinen Werth substituirt,

$$F(\psi_1) = 2b(1-\cos\psi_1)\sin\psi_1 + 2[(k-b)\sin\theta^2\operatorname{tg}2\psi_1 - a]\sin\psi_1^2,$$

$$F'(\psi_1) = -2\left(\frac{k-b}{\cos 2\psi_1}(1-\sin\theta^2\sin 2\psi_1^2) - b(\cos\psi_1 - \cos 2\psi_1) + a\sin 2\psi_1\right);$$

daher erhält $\Delta\psi_1$ den Werth

(12)

$$\frac{b(1-\cos\psi_1)\sin\psi_1 + [(k-b)\sin\theta^2\operatorname{tg}2\psi_1 - a]\sin\psi_1^2}{(k-b)\sec 2\psi_1(1-\sin\theta^2\sin 2\psi_1^2) - b(\cos\psi_1 - \cos 2\psi_1) + a\sin 2\psi_1}.$$

In den praktischen Anwendungen pflegt sowohl $a$, d. h. der Abstand der Visirebene von der Umdrehungsaxe, als auch der Abstand des Mittelpunkts des Spiegels von der Umdrehungsaxe, welchen wir oben $r$ genannt hatten und von welchem die Constante $b$ abhängt, im Verhältniss zu $k$ nur eine kleine Grösse zu sein. Wenn nämlich das Millimeter als Einheit genommen wird, so wird $k$ etwa 2000 bis 3000 oder noch grösser sein, der Radius $r$ aber etwa zwischen den Gränzen 0 und 150, endlich $a$ zwischen 0 und 50 liegen. Unter diesen Umständen wird der Werth der eben berechneten Correction $\Delta\psi_1$ unmerklich von

$$\frac{b(1-\cos\psi_1)\sin\psi_1 + (k-b)\sin\theta^2\operatorname{tg}2\psi_1\sin\psi_1^2}{(k-b)\sec 2\psi_1}$$

differiren. Diese Grösse zerfällt in die Summe

$$\frac{b}{k-b}(\sec\psi_1 - 1).\tfrac{1}{4}\sin 4\psi_1 + \sin\theta^2\sin 2\psi_1\sin\psi_1^2,$$

in welcher augenscheinlich sowohl der eine als der andere Bestandtheil bei dem Wachsen von $\psi_1$ zunimmt. Sobald man daher

nach (11) das Maximum bestimmt hat, welches $\psi_1$, d. h $\frac{1}{2}\text{Arctang}\frac{x-a}{(k-b)\cos\theta^2}$ erreichen kann, und welches offenbar dann eintritt, wenn man $(x-a)$ möglichst gross, also etwa gleich der halben Länge der Scale annimmt; so wird man sich, indem man diesen Werth von $\psi_1$ in die eben entwickelte Formel für $\varDelta\psi_1$ einführt, leicht überzeugen, ob die fragliche Correction im Verhältniss zu $\psi_1$ und mit Rücksicht auf die Fehlergränzen der beobachteten Zahlen überhaupt noch in Erwägung zu ziehen sei, oder ob sie gänzlich verschwinde. Im letzteren Falle ist man sicher, dass bei dem Rechnen nach der Formel (11) kein merkbarer Fehler begangen werden könne. Und wenn überdies die Winkel $2\psi$ so klein bleiben, dass man statt der Tangente den Bogen selbst setzen darf, ohne die zu hoffende Genauigkeit zu beeinträchtigen, so dient statt (11) die einfachere Formel

$$(13) \qquad \psi = \frac{x-a}{2(k-b)\cos\theta^2}.$$

Die Ebene des Spiegels in seiner Anfangsstellung schneidet auf der durch $O_1$ gezogenen Axe der $Y$ das Stück $b$ ab; die Ebene dagegen, welche wir oben die Tafel genannt haben und welche parallel zu dem in seiner Anfangsstellung befindlichen Spiegel durch die Scale gelegt werden sollte, schneidet auf derselben Coordinatenaxe die Strecke $O_1A = k$ ab. Das zwischen jenen zwei Ebenen liegende Stück der Axe der $Y$ hat daher die Länge $(k-b)$; und da dasselbe mit der Richtung einer auf den genannten Parallelebenen senkrechten Geraden den Winkel $\theta$ bildet, so folgt, dass $(k-b)\cos\theta$ den Abstand der Tafel von der Ebene des Spiegels bei dessen Anfangsstellung angiebt. Bezeichnen wir diesen Abstand mit $c$ und setzen $x'$ statt $x-a$, so dass $x'$ den Abstand der Geraden $Mm$ von der bei der Anfangsstellung im Faden des Oculars erscheinenden Geraden $Bb$ bedeutet, d. h. das vom Anfangspunkt $C$ an gezählte und bis zu demjenigen Theilstrich reichende Stück der Scale, welcher durch das Fernrohr gerade abgelesen wird; so verwandelt sich (11) und (13) in

$$(14) \qquad \text{tang}\, 2\psi = \frac{x'}{c\cos\theta} \quad \text{resp.} \quad \psi = \frac{x'}{2c\cos\theta}.$$

Es wächst also $x'$ proportional mit der Drehung $\psi$.

Wird die Länge eines Scalentheils als Einheit zur Ausmessung von $x$ und $c$ angenommen, und soll der einem Scalentheile $(x' = 1)$ zugehörige Drehungswinkel in Secunden $(= n)$ bestimmt

werden, so dass $\psi = \frac{n}{\varrho}$ zu setzen ist, unter $\varrho$ die Zahl 206264,8 verstanden, so zieht man aus (14) den Werth:

$$(15) \qquad n = \frac{\varrho}{2c\cos\theta}.$$

Die Formeln (14) und (15) sind für die specielle Voraussetzung $\theta = 0$ in der Praxis längst bekannt. Ihre Herleitung in der hier vorliegenden allgemeineren Gestalt erscheint indessen vielleicht beachtungswerth, da wir in Betreff der Constanten $k$, $a$, $b$, $\theta$ durchaus keine besonderen Voraussetzungen zu machen genöthigt waren.

Ueber die Art, wie die Constante $c\cos\theta$ aus andern an den Apparat unmittelbar zu messenden Grössen zu bestimmen sei, dürfte es unnöthig sein, noch in Details einzugehen. Wenn z. B. diejenige Ebene, die durch die Scale und den Mittelpunkt des Spiegels bei dessen Anfangsstellung zu legen ist, gegen die Horizontalebene unter einem Winkel $\gamma$ geneigt *), die Neigung der optischen Axe des Fernrohrs gegen die Horizontalebene aber $= \alpha$ ist, und wenn man den in horizontaler Richtung gemessenen Abstand des Spiegelmittelpunkts von einer durch die Scale gelegten Vertikalebene $= h$ setzt, so braucht man nur die im Mittelpunkt des Spiegels zu errichtende Normallinie in's Auge zu fassen, deren Neigung gegen die Horizontalebene, unter Voraussetzung einer vertikalen Umdrehungsaxe, durch unsern Winkel $\theta$ angegeben wird, um sofort einzusehen, dass

$$\text{entweder} \quad \cos\theta = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) \quad \text{oder} \quad \cos\theta = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

dass aber diesen zwei Fällen entsprechend

$$\text{entweder} \quad c = \frac{h}{\cos\gamma}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma) \quad \text{oder} \quad c = \frac{h}{\cos\gamma}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma)$$

sei. Allgemein ist also

$$c\cos\theta = \frac{h}{\cos\gamma}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma).$$

---

*) Der hier folgenden Bezeichnung und Formel hat sich Herr Professor Wilhelm Weber in einer seiner neuesten Abhandlungen bedient.

# XXXIV.

# Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, aus den Grundprinzipien der Statik abgeleitet.

Von

Herrn Doctor *Zernikow*,

Lehrer an der Königlichen Provinzial-Gewerbeschule zu Erfurt.

---

Man hat in der Statik gewisse Grundsätze aufgestellt, welche als Stützpunkte für die Entwickelung der übrigen Lehren dieser Wissenschaft dienen. Diese sind:

1. der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, oder
2. der Satz vom Hebel, oder
3. der Satz von der schiefen Ebene.

In den meisten Fällen wird der Satz vom Parallelogramm der Kräfte den Grundlehren der Statik als Basis unterbreitet.

Einige Mathematiker nehmen diesen Satz geradezu als Grundsatz, ohne Beweis, als richtig an; andere geben einen Beweis dafür.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist beweisfähig; aber man muss dann einen anderen Satz, etwa einen einfachen Fall des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte, zur Grundlage des Beweises nehmen.

Da schon durch den Satz vom Parallelogramm der Kräfte allein die Probleme der Statik der mathematischen Behandlung zugänglich gemacht werden, so erscheint es mehr wünschenswerth, wenn man von einem anderen einfachen Satz, dessen Wahrheit leicht in die Augen springt, ausgeht, um die Richtigkeit des Satzes

vom Parallelogramm der Kräfte, in seiner grossen Allgemeinheit, durch Beweis darzulegen, statt den Satz vom Parallelogramm der Kräfte als Grundsatz ohne Beweis als richtig anzunehmen. Nach Entwickelung der Grundprinzipien der Statik in der Weise, wie dies in der Schrift: „Theorie der Statik, gegründet auf die Principien der Dynamik, von Zernikow. Erfurt bei Villaret" ausführlich angegeben ist, wird hier ein Beweis für den Satz vom Parallelogramm der Kräfte mitgetheilt werden, der gleichzeitig darthut, dass das Prinzip der lebendigen Kräfte auch in der Statik als das Grundprinzip dieser Wissenschaft angesehen werden muss.

### Prinzipien des Gleichgewichtes.

Jede Ursache, welche im Stande ist, einen Körper in Bewegung zu setzen, nennt man eine Kraft. Von den Erscheinungen, welche durch die Wirkungen der Kräfte hervorgerufen werden, sind zu bemerken:

1. der Druck oder Zug, den jede Kraft auf einen Körper ausübt;
2. die Geschwindigkeit, welche ein Körper durch die Einwirkung einer Kraft in der Zeiteinheit gewinnt;
3. die Quantität (lebendige Kraft), welche an einen Körper übertragen wird, der durch die Einwirkung einer Kraft eine gewisse Geschwindigkeit erlangt hat.

Wenn eine Kraft auf einen Körper wirkt, dann übt sie immer einen Zug, wenn es eine anziehende Kraft ist, einen Druck, wenn es eine abstossende Kraft ist, auf den Körper aus.

Die unter 1. angeführte Erscheinung wird daher immer auftreten, so lange und so oft eine Kraft auf einen Körper einwirkt.

In Folge des Drucks oder Zuges erwirbt ein Körper, wenn er nicht genugsam gehindert ist, in der Zeiteinheit eine gewisse Geschwindigkeit und in Folge dessen ein gewisses Kraftquantum, welches ihm wieder entzogen werden muss, ehe er ganz zur Ruhe kommt. Ist ein Körper genugsam gehindert, d. h. ist der Druck oder Zug, der in Folge der Wirkung einer Kraft auf ihn ausgeübt wird, gleich dem Widerstand, dem Druck oder Zug, der in entgegengesetzter Richtung ausgeübt wird, so erwirbt der Körper in Folge der Einwirkung dieser Kraft keine Geschwindigkeit, er bleibt in Ruhe, wenn er in Ruhe war, und das Kraftquantum welches an seine Materie übertragen wird, ist Null.

Die unter 2. und 3. aufgezählten Erscheinungen werden daher nicht auftreten, so lange und so oft Kräfte gleichen Druck nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper ausüben, d. i. so lange und so oft ein Körper unter der Einwirkung von Kräften in Ruhe bleibt.

Von Kräften, die so auf einen Körper wirken, dass dieser dabei in Ruhe bleibt, sagt man, sie halten sich im Gleichgewicht; darum können die unter 2. und 3. aufgezählten Erscheinungen bei Kräften, die sich im Gleichgewicht halten, nicht auftreten.

Wenn ein Körper die Geschwindigkeit Null gewinnt, so bleibt er im Zustande der Ruhe, wenn er in Ruhe war. Der vorige Satz gilt daher auch in seiner Umkehrung: Wenn die unter 2. und 3. aufgezählten Erscheinungen nicht stattfinden, dann müssen Kräfte, welche so auf einen Körper wirken, sich im Gleichgewicht halten.

Etwas, das nicht ist, ist algebraisch ausgedrückt immer gleich Null; darum werden für Kräfte, die sich im Gleichgewicht halten, immer die drei Gleichungen bestehen:

a) der Druck oder Zug, welcher in Folge der Wirkung der einen Kräfte nach einer Richtung hin entsteht, ist gleich dem Druck oder Zug, welcher in Folge der Wirkung der anderen Kräfte in gerade entgegengesetzter Richtung hervorgebracht wird;

b) die algebraische Summe der Geschwindigkeiten, welche die Kräfte für irgend eine Richtung erzeugen, ist gleich Null;

c) die algebraische Summe der Kraftquantitäten (lebendigen Kräfte), welche durch die Einwirkung der Kräfte an den in Angriff genommenen Körper übertragen wird, ist gleich Null.

Den Satz a) findet man oft so ausgesprochen: Wirkung (Druck) und Gegenwirkung (Widerstand) sind immer gleich.

Alle Schriftsteller nehmen diesen Satz entweder stillschweigend als richtig an oder führen ihn als richtig auf; aber niemals hat man in der Statik auf die unter b) und c) angeführten Bedingungen Rücksicht genommen.

Wenn bei gleichgewichthaltenden Kräften die Zunahme der Geschwindigkeit und der lebendigen Kraft eines Körpers unausgesetzt Null ist, so ist dies ein bestimmtes und charakteristisches Kennzeichen für diese Kräfte; denn Null ist etwas ganz Bestimm-

tes. Man kann in der Statik etwas, das unausgesetzt Null ist, unberücksichtigt lassen, aber wenn man auf die Ursachen des Gleichgewichtszustandes Acht giebt, wird man das Auftreten dieser Bedingungen nicht ignoriren, sondern besser calculiren.

## Von den Eigenschaften der Mittelkraft.

Eine Kraft, welche die vereinte Wirkung mehrerer Kräfte ersetzt, nennt man die Mittelkraft; diese heissen Seitenkräfte. Nothwendig muss die Wirkung der Mittelkraft in allen Stücken dieselbe Erscheinung hervorrufen, welche durch die Seitenkräfte hervorgebracht werden würde. Darum muss die Mittelkraft:

$\alpha$) denselben Druck oder Zug für irgend eine Richtung ausüben, den die Seitenkräfte für dieselbe Richtung hervorbringen würden;

$\beta$) dieselbe Geschwindigkeit, in derselben Zeit und in derselben Richtung erzeugen, welche durch die Seitenkräfte hervorgebracht werden würde;

$\gamma$) dieselbe Kraftquantität (lebendige Kraft) in derselben Zeit an den Körper übertragen, die durch die Seitenkräfte übertragen werden würde.

Es werden sich daher immer, den unter $\alpha$), $\beta$), $\gamma$) aufgezählten Bedingungen gemäss, drei Gleichungen bilden lassen, welche diese Gesetze algebraisch ausgedrückt enthalten. Diese drei Gleichungen werden zur näheren Bestimmung der Mittelkraft immer ausreichen.

## Von der Intensität (der Geschwindigkeit), der Intensität einer bestimmten Wirkung (dem Zug oder Druck), für eine bestimmte Kraft.

Am einfachsten und am sichersten gelangt man von ganz bestimmten Voraussetzungen aus zu bestimmten Resultaten. Hier soll deshalb zunächst eine Beschränkung eingeführt werden. Wir werden, wenn von Kraft die Rede ist, immer an eine Kraft mit ganz bestimmten Eigenschaften denken. Als eine solche Kraft werden wir die Kraft wählen, mit welcher die einzelnen Moleküle jedes Körpers begabt sind, vermöge welcher jedes Körpertheilchen unausgesetzt alle übrigen anzieht und von allen anderen angezogen wird.

In besonderen Fällen erhält diese Kraft die Namen Cohäsion, Adhäsion, Schwerkraft, Gravitation.

Die Wirkungen dieser Kräfte sind am häufigsten, am besten beobachtet und am meisten bekannt.

Als Repräsentanten für diese Klasse wollen wir die Schwerkraft wählen.

Die Schwerkraft ist die Kraft, vermöge welcher die Moleküle eines Körpers von den Molekülen des Erdkörpers angezogen werden. Für einen bestimmten Ort wirkt die Schwerkraft mit unabänderlich gleichbleibender Intensität. In Folge der Wirkung der Schwerkraft entsteht für jeden Körper ein bestimmter Zug, um in lothrechter Richtung nach dem Mittelpunkt der Erde hinzufallen. Dieser Zug bleibt unabänderlich gleich, der angezogene Körper mag sich bewegen oder nicht.

Wenn ein Körper an der Bewegung gehindert ist, so entsteht in Folge dieses Zuges ein Druck gegen das Hinderniss; dieser Druck wird sein Gewicht genannt. Zug, Druck und Gewicht sind drei gleiche und gleichartige Grössen.

Wenn ein Körper an der Bewegung nicht gehindert ist, so entsteht in Folge des durch die Schwerkraft ausgeübten Zuges in der Zeitsekunde eine bestimmte Geschwindigkeit. Die Ursache, der Zug, muss daher zur Wirkung, zur Geschwindigkeit, immer in einem bestimmten Verhältnisse stehen, und umgekehrt: die Folge des Zuges, die Geschwindigkeit, muss zur Ursache, zum Zug oder Gewicht, und beide müssen als Folgen der Wirkung der Schwerkraft zu dieser in einem bestimmten Verhältniss stehen.

Da jedes Massentheilchen eines Körpers in Folge der Schwerkraft angezogen wird, so wächst der Zug, das Gewicht, mit der Masse des Körpers; aber da jedes Massentheilchen für sich an Geschwindigkeit gewinnen muss, so ist die Geschwindigkeit von der Masse des angezogenen Körpers unabhängig.

Da die Intensität der Schwerkraft nach den Newton'schen Gesetzen von der Masse des anziehenden Erdkörpers und von der räumlichen Entfernung allein abhängig ist; da die Geschwindigkeit, welche ein Körper in der Sekunde gewinnt, nur von diesen Factoren und in derselben Weise abhängig ist: so soll die in der Sekunde gewonnene Geschwindigkeit das Maass für die Intensität der Schwerkraft genannt werden.

Da die Schwerkraft mit derselben Intensität auf alle Moleküle eines Körpers wirkt, so wird der Zug, das Gewicht eines Kör-

pers, als die erste Folge dieser Wirkung 1) zur Intensität, d. i zur Geschwindigkeit, 2) zur Anzahl der Moleküle, d. i. zur Masse, in einem bestimmten Verhältniss stehen.

Bezeichnet $P$ das Gewicht in Pfunden, $M$ die Masse, $g$ die Geschwindigkeit der ersten Sekunde in Fussen, so wird man die Masseneinheit immer so gewählt denken können, dass zwischen den Zahlen $P$, $M$, $g$ nicht bloss die Beziehung $P$ proportional $M.g$, sondern dass die Gleichung

$$P = M.g$$

stattfindet.

Durch diese Gleichung ist die Masseneinheit und die Zahl $M$ immer bestimmt. Man findet aus ihr:

$$M = \frac{P}{g}.$$

Der Zug, das Gewicht eines Körpers, entsteht durch die Wirkung der Schwerkraft auf einen Körper von bestimmter Masse; wir werden dies immer als das Maass der Intensität der Wirkung auf einen bestimmten Körper auffassen.

Da ein Körper in Folge des Zuges nach und nach, indem er einen gewissen Raum durchläuft, eine gewisse Geschwindigkeit erwirbt, während die Schwerkraft in allen Punkten des Weges anziehend auf ihn einwirkt, so ist ersichtlich, dass die gewonnene Geschwindigkeit nur dann vernichtet werden kann, wenn in entgegengesetzter Richtung ein Druck oder Zug für eine gewisse Strecke Weges ausgeübt wird. Diese Grösse nennt man Kraftquantität, lebendige Kraft, Leistung, Arbeit, Arbeitsmoment.

## Von der Krafteinheit.

Wir haben die Ursache der Bewegung Kraft genannt. Zu jeder Verrichtung, Veränderung, Production ist Kraft erforderlich. Alle technische, künstliche und literarische Erzeugnisse können nur durch Anwendung von Kraft hervorgebracht werden. Wegen der allgemeinen Anwendung, die von den Kräften gemacht wird, hat sich für die Einheit der Kraftquantität ein bestimmter Begriff gebildet, dessen Existenz wir an einigen Beispielen näher bezeichnen und dann allgemein bestimmen wollen. Die Kraft, welche angewendet werden muss, um einen Zapfen abzudrehen, schätzt man 1) nach dem Druck, den man anwenden muss, um den Drehspan abzureissen, und 2) nach der Länge des Weges, auf welcher der Drehspan abgerissen werden soll, und setzt bei

homogenem Material die Kraft gleich dem Product aus Druck und Weg.

Die Kraft, welche angewendet werden muss, um einen Wagen auf einer horizontalen Bahn fortzuschaffen, schätzt man 1) nach dem Druck, den man anwenden muss, um in jedem Punkte des Weges den Reibungswiderstand zu überwinden, und 2) nach der Länge der Bahn, und setzt bei constantem Widerstand die Kraft gleich dem Product aus Druck und Weg.

Die Kraft, welche angewendet werden muss, um ein Gewicht auf eine gewisse Höhe zu heben, schätzt man 1) nach dem Druck, welchen man anwenden muss, um in allen Punkten des Weges den Zug der Schwerkraft, das Gewicht, zu überwinden, und 2) nach der Länge des Weges, und setzt die Kraft gleich dem Product aus Druck und Weg.

Die Kraft, welche angewendet werden muss, um über einen Gegenstand ein Werk zu schreiben, schätzt man 1) nach der Intensität der Wirkung für jede Zeile und 2) nach der Anzahl der Zeilen, und setzt bei Schriften über denselben Gegenstand die Kraft gleich dem Product aus beiden u. s. w.

Das Product aus Druck und Weg ist es, was man Kraftquantität, lebendige Kraft, Leistung, Arbeit, Arbeitsmoment nennt.

Denkt man in jenem Product den Druck in Pfunden, den Weg in Fussen ausgedrückt, so nennt man die bei der Multiplication erzeugte Einheit Fusspfund (Fss.-Pfd.), und setzt die Kraft, welche nöthig ist, den Druck von $p$ Pfd. in allen Punkten eines Weges von $h$ Fss. Länge zu überwinden, $= p.h$ Fss.-Pfd.

## Bestimmung der Kraftquantität aus Masse und Geschwindigkeit.

Jede Ursache, welche im Stande ist, einen Druck von 1 Pfd. auf allen Punkten eines Weges von 1 Fss. Länge zu überwinden, ist eine Kraftquantität von 1 Fss.-Pfd., und jede Ursache, welche im Stande ist, einen Druck von $p$ Pfd. auf allen Punkten eines Weges von $h$ Fss. Länge zu überwinden, ist eine Kraftquantität von $p.h$ Fss.-Pfd. Denkt man einen Körper von $p$ Pfd. Gewicht, der sich mit der Anfangsgeschwindigkeit $v$ lothrecht nach aufwärts bewegt, so wird dieser Körper eine gewisse Höhe $h$ erreichen, ehe er seine Geschwindigkeit ganz verliert und in Ruhe kommt.

Diese Höhe $h$ ist von der Anfangsgeschwindigkeit $v$ und von der Verzögerung für jede Sekunde, $g$, abhängig.

Nach bekannten Gesetzen für die gleichmässig verzögerte Bewegung hat man:

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

Die Kraftquantität, welche an der Materie des Körpers von $p$ Pfd. Gewicht, der sich mit der Geschwindigkeit $v$ so bewegt, haftet, ist daher =

$$p.h \text{ Fusspfund;}$$

oder, wenn statt $h$ der Werth $\frac{v^2}{2g}$ gesetzt wird, =

$$\frac{pv^2}{2g} \text{ Fusspfund.}$$

Wird statt $\frac{p}{g}$ die Masse des Körpers, $m$, gesetzt, so erhält man die Kraftquantität

$$\frac{mv^2}{2} \text{ Fusspfund.}$$

Da es gleichgiltig ist, ob ein Körper mit der Geschwindigkeit $v$ sich lothrecht aufwärts oder sonst nach irgend einer Richtung hin bewegt, weil man jedesmal die Richtung der Bewegung ohne Verlust für die Geschwindigkeit verändern kann, so ist jeder Körper von der Masse $m$, der sich mit der Geschwindigkeit $v$ bewegt, als im Besitze einer Kraftquantität von $\frac{mv^2}{2}$ Fss.-Pfd. anzusehen.

Nach Allem diesen hat man, wenn $g$ die Geschwindigkeit bezeichnet, welche ein Körper von der Masse $m$ unter der Einwirkung der Schwerkraft in der Sekunde gewinnt, die Intensität der Schwerkraft $= g$ Fuss; der Zug, welchen die Schwerkraft ausübt, $= m.g$ Pfund; die Kraftquantität, welche die Schwerkraft in der Sekunde erzeugt, $= \frac{mg^2}{2}$ Fss.-Pfd.

Grundsatz. Kann die Masse $m$ sich nur auf der unzerreissbaren geraden Linie $AB$ (Taf. IV. Fig. 12.) bewegen, wirkt rechtwinklich dazu eine Kraft $K$, so wird in keinerlei Richtung Bewegung erfolgen.

Da $m$ sich in der Richtung der geraden Linie nicht bewegt,

d. i. die Geschwindigkeit Null erlangt, so ist der Druck oder Zug für diese Richtung ebenfalls gleich Null, und die Kraftquantität, welche an $m$ in der Sekunde übertragen wird, ist ebenfalls gleich Null.

Der Satz gilt auch umgekehrt: Bewegt sich die Masse $m$ in Folge der Einwirkung einer Kraft nicht, so muss die Richtung der Kraft zur Richtung der geraden Linie rechtwinklich sein.

Hieraus folgt: Da $K$ auf die Bewegung der Masse $m$ in der Richtung der Linie $AB$ nicht einwirkt, so muss $m$ der Einwirkung einer anderen Kraft $K'$, die in der Richtung von $AB$ wirkt, ungehindert folgen, gerade so, als wenn $K$ nicht vorhanden wäre; d. i. zwei solche rechtwinklich zu einander wirkende Kräfte stören sich einander nicht.

## Von der Zerlegung der Geschwindigkeit, des Druckes und der Kraftquantität nach zwei auf einander normal stehenden Richtungen.

Es ist eine gerade Linie $AB$ (Taf. IV. Fig. 13.) gegeben, und eine Masse $m$, die sich nur in der Richtung von $AB$ bewegen kann. Eine Kraft $K$ wirkt, unter dem Winkel $\alpha$ gegen $AB$ geneigt, auf die Masse $m$ ein. Es soll die Geschwindigkeit, der Druck, die Kraftquantität in der Richtung $AB$ bestimmt werden.

Die Intensität der Kraft $K$ sei $= g$ Fuss. Der Druck von $K$ auf $m$ ist $= m.g$ Pfd. Das Kraftquantum, welches $K$ an $m$ in einer Sekunde überträgt, ist $= \frac{mg^2}{2}$ Fss.-Pfd. Diese drei Werthe sind immer auf die Richtung $CE$ der wirkenden Kraft zu beziehen.

Die Masse $m$ kann der Kraft $K$ nicht ungehindert folgen, darum wird die Geschwindigkeit $g'$, mit welcher die Bewegung auf der Linie $AB$ erfolgt, immer geringer sein als $g$. Daher kann man die Kraft $K$ in zwei Theile zerlegt denken, von denen der eine allein auf Bewegung in der Richtung von $AB$, gerade so wie vorhin angegeben, wirkend, der andere nicht auf Bewegung für diese Richtung wirkend angenommen werden muss. Der Theil von $K$, der nicht auf Bewegung wirkt, muss rechtwinklich zu $AB$ wirkend angenommen werden; beide Theile stören sich gegenseitig nicht.

Sind $K'$ und $K''$ diese Theile von $K$, dann hat man

$$\text{I.}\quad K = K' + K''.$$

Es sei

| | | |
|---|---|---|
| die Intensität für $K'$ | $= g'$ Fuss, | in der Richtung von $AB$; |
| der Druck von $K'$ auf $m$ | $= mg'$ Pfund, | |
| die Kraftquantität, welche $K'$ an $m$ in d. Sekunde abgiebt, | $= \frac{mg'^2}{2}$ Fss.-Pfd. | |
| die Intensität von $K''$ | $= g''$ Fuss, | in der Richtung $CD$, rechtwinklich zu $AB$. |
| der Druck von $K''$ auf $m$ | $= mg''$ Pfund, | |
| die Kraftquantität, welche $K''$ an $m$ in d. Sekunde abgiebt, | $= \frac{mg''^2}{2}$ Fss.-Pfd. | |

Der für die Bewegung auf $AB$ verloren gehende Theil von $K$, d. i. $K''$, muss immer so wirkend gedacht werden, dass er in der Richtung von $CD$ eine Quantität Kraft von $\frac{mg''^2}{2}$ Fss.-Pfd. an die Masse $m$ in einer Sekunde überträgt, wenn $AB$ nicht vorhanden wäre, gerade so wie der andere Theil $K'$ die Quantität $\frac{mg'^2}{2}$ in der Richtung von $AB$ erzeugt.

Da $K = K' + K''$, so muss die Quantität der Wirkung von $K$ gleich sein der Summe der Quantitäten von $K'$ und $K''$.

Daher hat man:

$$\frac{mg^2}{2} = \frac{mg'^2}{2} + \frac{mg''^2}{2},$$

oder, reducirt:

$$\text{II.} \quad g^2 = g'^2 + g''^2.$$

Die Geschwindigkeit $g'$ ist immer abhängig von $g$ und dem Winkel $\alpha$, die Geschwindigkeit $g''$ ist, in derselben Weise, abhängig von $g$ und dem Winkel $\beta$.

Man kann daher setzen:

$$g' = g \cdot f(\alpha),$$

unter $f$ irgend eine Function verstanden;

$$g'' = g f(\beta),$$

unter $f$ dieselbe Function verstanden.

Werden diese Werthe in II. eingesetzt, so erhält man:

$$g^2 = g^2 f^2_{(\alpha)} + g^2 f^2_{(\beta)},$$

oder reducirt:

$$1 = f^2_{(\alpha)} + f^2_{(\beta)}.$$

Durch diese Gleichung ist die Function $f$ bestimmt; denn da $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, so folgt $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Wird dies eingesetzt, so entsteht:

$$1 = f_{(\alpha)} + f^2_{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

Für jeden gegebenen Fall ist $\alpha$ bekannt, darum ist die Funktion $f$ in dieser Gleichung allein unbekannt. Da $f$ in der zweiten Potenz vorkommt, wird man zwei Werthe für $f$ finden, welche dieser Gleichung Genüge leisten. Aus der Trigonometrie ist bekannt, dass diese beiden Werthe für $f$ Cosinus und Sinus sind. Nimmt man zu der Gleichung noch eine zweite, so ergiebt sich, für den Fall $\alpha = 0$,

$$g' = g f_{(0)} = g,$$

folglich ist

$$f_{(0)} = 1.$$

Mit Rücksicht auf diese Bestimmung bleibt der Cosinus für $f$ allein giltig.

Darum hat man:

$$g' = g \cos \alpha, \qquad g'' = g \cos \beta,$$

$$mg' = mg \cos \alpha, \qquad mg'' = mg \cos \beta,$$

$$\frac{mg'^2}{2} = \frac{mg^2 \cos^2 \alpha}{2}, \qquad \frac{mg''^2}{2} = \frac{mg^2 \cos^2 \beta}{2};$$

d. i.: aus der Geschwindigkeit und dem Druck für eine Richtung erhält man die Geschwindigkeit und den Druck für eine andere Richtung, wenn man mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt; die Kraftquantität wird zerlegt, wenn man mit dem Quadrat des Cosinus vom eingeschlossenen Winkel multiplicirt.

Zu den beiden Gleichungen

$$1 = f^2_{(\alpha)} + f^2_{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

und

$$f_{(0)} = 1$$

lässt sich noch fügen $f_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$; denn wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, wird die Geschwindigkeit der Bewegung für diesen Fall gleich Null. Aus

$$g' = g f_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$$

folgt, da $g$ nicht nothwendig $= 0$ ist:

$$f_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0.$$

Diese Gleichungen führen bei Anwendung der Differentialrechnung dahin, dass man für $f$ eine Reihe erhält, welche der Reihe für den Cosinus entspricht.

Wird die erste Gleichung nach $\alpha$ differentiirt, so erhält man

$$f_{(\alpha)} \cdot f'_{(\alpha)} = f_{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \cdot f'_{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}.$$

Unter $f'$ ist der erste Differentialquotient zu verstehen. Hieraus folgt, wenn man $\alpha = 0$ setzt:

$$f_{(0)} \cdot f'_{(0)} = f_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cdot f'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Hieraus folgt, mit Rücksicht auf die beiden anderen Gleichungen:

$$f'_{(0)} = 0.$$

Man setze

$$f'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = n.$$

Aus der Figur ist ersichtlich, dass für $\alpha = 0$ $f_{(\alpha)}$ ein Maximum wird, nämlich $= 1$. Daher hat man nach den Bestimmungen über Maxima:

$$f_{(0)} = 1, \quad f'_{(0)} = 0, \quad f''_{(0)} = -.$$

$f'_{(\alpha)}$ wächst, wenn $\alpha$ kleiner wird, und fällt, wenn $\alpha$ grösser wird. Bei $f_{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ ist es umgekehrt. Darum ist $f'_{(\alpha)}$ stets — und $f'_{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ stets +.

Aus $f_{(0)} \cdot f'_{(0)} = f_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cdot f'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ lässt sich bilden:

$$\frac{f_{(0)}}{f'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{f_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{f'_{(0)}}.$$

Da Zähler und Nenner des letzten Quotienten einzeln gleich Null sind, so folgt:

$$1)\quad \frac{f_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{f'_{(0)}} = \frac{0}{0},$$

und daher auch:

$$2)\quad \frac{f_{(0)}}{f'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{0}{0}.$$

Wird zur Bestimmung der Werthe $\frac{0}{0}$ Zähler und Nenner differentiirt, so entsteht: wenn man den ersten Quotienten differentiirt und gleich dem zweiten setzt, dann den zweiten so differentiirt und gleich dem ersten setzt, und endlich wenn man 1) und 2) differentiirt und diese Werthe gleich setzt, nach einander:

$$\frac{f'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{f''_{(0)}} = \frac{f_{(0)}}{f'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}}, \quad \frac{f'_{(0)}}{f''_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{f_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{f'_{(0)}}, \quad \frac{f'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{f''_{(0)}} = \frac{f'_{(0)}}{f''_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}};$$

oder, wenn man die Nenner fortschafft:

$$\text{I.}\quad f'^2_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = f_{(0)} \cdot f''_{(0)}, \quad f'^2_{(0)} = f_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cdot f''_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \quad f'_{(0)} \cdot f''_{(0)} = f'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cdot f''_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Da $f'_{(0)} = 0$, $f'_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = n$ ist, so muss $f''_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$ sein.

Die letzte Gleichung ist daher mit der $f_{(0)} \cdot f'_{(0)} = f_{(\frac{\pi}{2})} \cdot f'_{(\frac{\pi}{2})}$ symmetrisch; es sind hier wie dort zwei Factoren gleich Null. In derselben Weise fortoperirend wird man daher zu folgenden Gleichungen gelangen:

$$\text{II.}\quad f''^2_{(\frac{\pi}{2})} = f'_{(0)} \cdot f'''_{(0)},\quad f''^2_{(0)} = f'_{(\frac{\pi}{2})} \cdot f'''_{(\frac{\pi}{2})},\quad f''_{(0)} \cdot f'''_{(0)} = f''_{(\frac{\pi}{2})} \cdot f'''_{(\frac{\pi}{2})}$$

und

$$\text{III.}\quad f'''^2_{(\frac{\pi}{2})} = f''_{(0)} \cdot f''''_{(0)},\quad f'''^2_{(0)} = f''_{(\frac{\pi}{2})} \cdot f''''_{(\frac{\pi}{2})},\quad f'''_{(0)} \cdot f''''_{(0)} = f'''_{(\frac{\pi}{2})} \cdot f''''_{(\frac{\pi}{2})},$$

u. s. w.

Man findet aus der ersten Gleichung der Gruppe I., da $f'_{(\frac{\pi}{2})} = n$, $f_{(0)} = 1$ ist,

$$f''_{(0)} = n^2,$$

und da das Vorzeichen früher bestimmt war,

$$f''_{(0)} = -n^2;$$

aus der dritten Gleichung der Gruppe I., da die Factoren der linken Seite die Vorzeichen $--$ haben, und das Vorzeichen von $f'_{(\frac{\pi}{2})} = +$ ist, das Vorzeichen von $f''_{(\frac{\pi}{2})} = +$.

Man findet aus der ersten Gleichung der Gruppe II. das Vorzeichen für $f'''_{(0)} = +$; aus der dritten Gleichung dieser Gruppe das Vorzeichen für $f'''_{(\frac{\pi}{2})} = \frac{-.+}{+} = -$, und den Werth für $f'''_{(0)} = 0$; aus der zweiten Gleichung dieser Gruppe $f'''_{(\frac{\pi}{2})} = n^3$; darum ist mit Rücksicht auf das Vorzeichen $f'''_{(\frac{\pi}{2})} = -n^3$.

Man findet aus der ersten Gleichung der Gruppe III.:

$$f''''_{(0)} = \frac{f'''^2_{(\frac{\pi}{2})}}{f''_{(0)}};$$

oder, für $f''_{(0)}$ aus der ersten Gleichung der Gruppe I. der Werth gesetzt:

$$f''''_{(0)} = \frac{f'''^2_{(\frac{\pi}{2})}}{f'^2_{(\frac{\pi}{2})}} \cdot f_{(0)} = \left\{ \frac{f'''_{(\frac{\pi}{2})}}{f'_{(\frac{\pi}{2})}} \right\}^2 \cdot f_{(0)} = \left( \frac{-n^3}{n} \right)^2 = n^4$$

u. s. w.

Man erhält, so fortfahrend, folgende Reihe:

| | |
|---|---|
| $f_{(0)} = 1,$ | $f_{(\frac{\pi}{2})} = 0,$ |
| $f'_{(0)} = 0,$ | $f'_{(\frac{\pi}{2})} = n,$ |
| $f''_{(0)} = -n^2,$ | $f''_{(\frac{\pi}{2})} = 0,$ |
| $f'''_{(0)} = 0,$ | $f'''_{(\frac{\pi}{2})} = -n^3,$ |
| $f''''_{(0)} = n^4,$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | |

Wenn man $f_{(\alpha)}$ nach der Maclaurin'schen Reihe entwickelt, so ist:

$$f_{(\alpha)} = f_{(0)} + \alpha f'_{(0)} + \frac{\alpha^2}{2!} f''_{(0)} + \frac{\alpha^3}{3!} f'''_{(0)} + \frac{\alpha^4}{4!} f''''_{(0)} + \ldots,$$

oder, wenn man die entwickelten Werthe setzt:

$$f_{(\alpha)} = 1 - \frac{(\alpha n)^2}{2!} + \frac{(\alpha n)^4}{4!} - \ldots,$$

dies ist die Reihe für $\cos(\alpha n)$.

Zur Bestimmung der Constanten $n$ hat man, da $f_{(\frac{\pi}{2})} = \cos(n \cdot \frac{\pi}{2}) = 0$ ist: $n$ ist eine ungerade ganze Zahl.

Da $g' = g \cos(\alpha n)$ ist, entsteht, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2 \cdot n}$ gesetzt wird, $g' = g \cos\frac{\pi}{2}$, und da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, so folgt $g' = 0$. Ist aber $g' = 0$,

so lässt sich schliessen, der Winkel $\alpha$, welchen die Richtungen von $g'$ und $g$ einschliessen, muss ein rechter sein, d. i.

$$\frac{\pi}{2.n}=\frac{\pi}{2}, \text{ oder } 3\frac{\pi}{2}, \text{ oder } 5.\frac{\pi}{2}, \ldots.$$

Hieraus folgt, da $n$ eine positive ungerade ganze Zahl sein muss,

$$n=1.$$

Daher hat man $f_{(\alpha)} = \cos\alpha$. Das ist der Satz.

## Von der geometrischen Behandlung der Statik.

Der eben bewiesene Satz von der Zerlegung der Druckwirkungen ist, wie aus der Herleitung erhellet, von dem Satz der Zerlegung der Geschwindigkeiten gar nicht verschieden. Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf dieselbe Masse, so werden ihre Druckwirkungen, als Producte aus Masse mal Beschleunigung aufgefasst, sich genau so wie die Beschleunigungen verhalten. Da die Beschleunigungen immer durch Linien ausgedrückt werden können, so lassen sich die Druckwirkungen von Kräften, die auf dieselbe Masse wirken, ebenfalls durch Linien repräsentirt denken: dergestalt, dass Veränderungen, welche mit diesen Linien durchgeführt werden, sich immer als Veränderungen deuten lassen, die mit den Druckwirkungen vorgenommen sind, und umgekehrt. Hieraus ist ersichtlich, dass die Lösung der in der Statik vorkommenden Aufgaben in geometrischer Weise ausgeführt werden kann.

Nach dem eben gegebenen Satze wird ein Druck, durch eine Linie dargestellt, den Druck für eine andere Richtung liefern, wenn man mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt, d. i. wenn man die Projection der ersten Linie auf die andere nimmt.

Der eben gegebene Satz wird bei jeder Zerlegung und Reduction der Druckwirkungen auf eine andere Richtung angewendet; aber er kann auch bei der Zusammensetzung der Kräfte verwendet werden und führt unmittelbar zu dem Satze:

## Vom Parallelogramm der Kräfte.

Bezeichnet (Taf. IV. Fig. 14.) $a$ die Intensität und $AB$ die Richtung einer Kraft, $b$ die Intensität und $AC$ die Richtung einer

anderen Kraft, welche beide auf die Masse $m$ im Punkte $A$ einwirken: dann ist die Richtung und Intensität der Mittelkraft durch die Diagonale des Parallelogramms bestimmt, welches sich aus den gegebenen Stücken bilden lässt.

Die Masse $m$ im Punkte $A$ wird, in Folge der Einwirkung beider Kräfte, weder ganz in der Richtung von $AB$, noch ganz in der Richtung von $AC$ fortbewegt; sie wird eine mittlere Richtung, etwa die $AD$, einschlagen. Wird dies zugegeben, so bezeichnet $AD$ zugleich die Richtung der Mittelkraft. Ist $AE$ rechtwinklich zu $AD$, bezeichnet man die Intensität der Mittelkraft in der Richtung von $AD$ mit $c$, zerlegt

$$a \text{ in } a' \text{ und } a'',$$

$$b \text{ in } b' \text{ und } b'',$$

die auf die Richtungen $AE$ und $AD$ zu beziehen sind, dann hat man, da $m$ sich von $A$ aus in der Richtung von $AD$ fortbewegen würde, also keine Neigung hat, rechts oder links abzuweichen:

$$a' = b',$$

und ferner:

$$c = a'' + b''.$$

Es ist

$$a' = a\cos(\mathrm{R} - \beta) = a\sin\beta, \quad b' = b\cos(\mathrm{R} - \alpha) = b\sin\alpha;$$

$$a'' = a\cos\beta, \qquad b'' = b\cos\alpha.$$

Wird dies eingesetzt, so entsteht:

$$\text{I.} \quad a\sin\beta = b\sin\alpha,$$

$$\text{II.} \quad c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Da $\alpha + \beta$ gegeben, also bekannt ist, so wird aus der Gleichung I. sich immer der Winkel $\alpha$ und $\beta$ bestimmen lassen, und dadurch wird die Richtung der Mittelkraft bestimmt. Kennt man durch diese Operation $\alpha$ und $\beta$, so wird durch die Gleichung II. die Intensität der Mittelkraft bestimmt, und somit Alles, was in Frage gezogen werden kann.

Wird $AB$ gleich der Intensität $a$, $AC$ gleich der Intensität $b$, $AD$ gleich der Intensität $c$ gemacht, so lässt sich nachweisen, dass $ABCD$ ein Parallelogramm und $AD$ dessen Diagonale ist. Denn setzt man diese Werthe in die Gleichungen I. und II., so entsteht:

$$1)\quad AB.\sin\beta = AC.\sin\alpha,$$

$$2)\quad AD = AB.\cos\beta + AC.\cos\alpha.$$

Nimmt man die Richtung von $AD$ der Gleichung 1) und die Länge von $AD$ der Gleichung 2) gemäss und zieht $BD$, dann erhält man aus Dreieck $ABD$:

$$3)\quad AB.\sin\beta = BD.\sin\alpha',$$

$$4)\quad AD = AB.\cos\beta + BD.\cos\alpha'.$$

Aus 1) und 3) folgt: $AC.\sin\alpha = BD.\sin\alpha'$. Aus 2) und 4) folgt: $AC.\cos\alpha = BD.\cos\alpha'$. Durch Division erhält man hieraus:

$$\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\alpha',$$

folglich

$$\alpha = \alpha';$$

durch Substitution dieser Werthe erhält man:

$$AC = BD.$$

Da die Linien $AC$ und $BD$ gleich und wegen $\alpha = \alpha'$ auch parallel sind, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm und $AD$ dessen Diagonale. Was zu beweisen war.

Wir haben die Intensitäten der Kräfte durch die Geschwindigkeiten, welche sie in der Sekunde erzeugen (die Beschleunigungen) ausgedrückt; wenn man mit $m$ multiplicirt, so erhält man die Druckwirkungen, welche bei der Zerlegung und Zusammensetzung denselben Gesetzen unterworfen sind.

---

In der Mechanik hat man es nur mit den Wirkungen der Kräfte zu thun; die Ursachen lässt man immer ganz unberücksichtigt. Hierin liegt schon, man darf irgend eine beliebige Kraft als Ursache denken, und dies haben wir hier gethan, indem wir eine Kraft von ganz bestimmten Eigenschaften als wirkende Ursache annahmen. Die früher bezeichnete Beschränkung ist daher mehr eine genaue Bestimmung, die dazu dient, den Zusammenhang von Ursache und Wirkung unausgesetzt klar übersehen zu können. Wird daher statt der Schwerkraft eine andere, eine Dampf-, Wasser- oder Windkraft als wirkende Ursache genommen, dann wird bei der Zusammensetzung, Zerlegung und Reduction des Druckes, der Geschwindigkeit, der lebendigen Kraft Nichts durch eine solche Voraussetzung geändert.

Es ist bei diesen Kräften bequemer und darum gebräuchlicher, unmittelbar den Druck, welchen sie gegen die Flächeneinheit ausüben, durch Manometer oder Hydrometer zu bestimmen.

Ist $P$ der Gesammtdruck, $m$ die Masse des in Bewegung zu setzenden Körpers, dann lässt sich, weil $P$ Pfd. immer gleich $P$ Pfd. sind, indem man bloss auf die Wirkung Rücksicht nimmt, eine anziehende Kraft denken, welche denselben Druck auf dieselbe Masse in der schon bezeichneten Weise ausübt, und man hat:

die Intensität dieser Kraft $g = \frac{P}{m}$,

ihren Druck $= P$,

die Kraftquantität per Sekunde $= \frac{mg^2}{2}$.

Dies sind Werthe, die, wie früher gezeigt, behandelt, jede Zerlegung, Zusammensetzung und Reduction erlauben. Ein Druck wird sich daher wie jeder Druck, eine Intensität wie jede Intensität, und eine Kraftquantität wie jede andere Kraftquantität behandeln lassen.

In der Statik ist fast immer nur auf die Druckwirkungen, welche durch die Einwirkungen der Kräfte entstehen, Rücksicht genommen, immer hat man nur von diesen, als von den einzigen Wirkungen der Kräfte gesprochen, und hat dies so weit ausgedehnt, dass man einen Druck Kraft nannte und für eine Kraft nahm, und umgekehrt. Nichts rechtfertigt eine solche Annahme oder Bezeichnung, denn bei Körpern, die sich unter der Einwirkung von Kräften im Gleichgewicht befinden, ist ihre Gesammtwirkung nach Aussen, ihr Druck, ihre Geschwindigkeit und ihre lebendige Kraft gleichzeitig Null.

Die hier ausgeführte Behandlung steht jener Auffassung nicht blos deshalb entgegen, weil hier Druck von Kraft stets unterschieden worden, oder deshalb, weil der Druck nicht als die einzige Wirkung einer Kraft bezeichnet worden ist, sondern hauptsächlich deshalb, weil als Krafteinheit das Fusspfund und nicht das Pfund angenommen ist. Die Consequenzen, die aus dieser Annahme fliessen, sind vielleicht nach der hier verfolgten Richtung hin neu, aber die Annahme ist alt. Der Satz vom Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten beruht in der That auf der Annahme, dass die Krafteinheit das Fusspfund sei, und lässt sich am Einfachsten beweisen, indem man dies zugiebt.

# XXXV.

# Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten und die allgemeinen Bedingungsgleichungen der Ruhe und der Bewegung.

Von

dem Herausgeber.

## I.

## Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 1.

Wenn an einem beliebigen Punkte $A$ im Raume nach drei von demselben ausgehenden, nicht in einer Ebene liegenden Richtungen $AX$, $AY$, $AZ$, welche die 180° nicht übersteigenden Winkel $XAY$, $YAZ$, $ZAX$ mit einander einschliessen, drei Kräfte $P$, $Q$, $R$ wirken, so kann zwischen diesen drei Kräften, insofern sie nicht sämmtlich verschwinden, niemals Gleichgewicht Statt finden, oder, wie man dies auch allenfalls ausdrücken kann, dieselben können nur dann im Gleichgewichte sein, wenn $P=0$, $Q=0$, $R=0$ ist.

Denn verschwände auch nur eine dieser drei Kräfte nicht, so würde man dieselben, wie mittelst des Satzes von dem Parallelogramme der Kräfte auf der Stelle erhellet, immer auf eine nicht verschwindende Resultirende zurückführen können, und dieselben würden also nicht im Gleichgewichte sein, wie doch, insofern wir den letzten obigen Ausdruck unsers Satzes festhalten, vorausgesetzt wurde.

Wir wollen nun annehmen, dass durch einen beliebigen Punkt
$A$ im Raume drei auf einander senkrecht stehende Axen der $x$,
, $z$ gelegt seien, von denen einer jeden ein positiver und ein ne-
ativer Theil beigelegt wird. Ferner sollen an dem Punkte $A$ drei
räfte wirken, deren Richtungen entweder mit den positiven oder
egativen Theile der drei Axen zusammenfallen, die im ersten
alle selbst als positiv, im zweiten Falle als negativ betrachtet,
nd mit Rücksicht hierauf durch $P$, $Q$, $R$ bezeichnet werden sollen.
st dann $\mathfrak{R}$ die Resultirende dieser drei Kräfte, welche wir stets
ls positiv oder vielmehr absolut auffassen, und nehmen wir an,
ass die Richtung derselben mit den positiven Theilen der Axen
er $x$, $y$, $z$ respective die 180° nicht übersteigenden Winkel $\varphi$,
, $\chi$ einschliesst, so kann man die Kraft $\mathfrak{R}$ bekanntlich immer
ach den Axen der $x$, $y$, $z$ in drei Kräfte oder Composanten zer-
gen, deren auch die Vorzeichen dieser Composanten gehörig be-
ücksichtigende analytische Ausdrücke offenbar in völliger Allge-
einheit $\mathfrak{R}\cos\varphi$, $\mathfrak{R}\cos\psi$, $\mathfrak{R}\cos\chi$ sind. Da nun ferner offenbar
$-\mathfrak{R}\cos\varphi$, $-\mathfrak{R}\cos\psi$, $-\mathfrak{R}\cos\chi$ die nach den Axen der $x$, $y$, $z$
enommenen Composanten der Aequipollenten der drei Kräfte $P$,
$Q$, $R$ sind, so sind die sechs Kräfte $P$, $Q$, $R$ und $-\mathfrak{R}\cos\varphi$,
$-\mathfrak{R}\cos\psi$, $-\mathfrak{R}\cos\chi$ unter einander im Gleichgewichte. Diese sechs
räfte können aber, wie sich von selbst versteht, auf die drei
ich in den Axen der $x$, $y$, $z$ wirkenden Kräfte $P-\mathfrak{R}\cos\varphi$,
$Q-\mathfrak{R}\cos\psi$, $R-\mathfrak{R}\cos\chi$ zurückgeführt werden, welche drei Kräfte
lglich auch unter einander im Gleichgewichte sind. Daher ist
ach dem oben bewiesenen Satze:

$$P-\mathfrak{R}\cos\varphi=0,\quad Q-\mathfrak{R}\cos\psi=0,\quad R-\mathfrak{R}\cos\chi=0;$$

lglich immer

$$\mathfrak{R}\cos\varphi=P,\quad \mathfrak{R}\cos\psi=Q,\quad \mathfrak{R}\cos\chi=R;$$

ei Relationen, von denen wir sogleich im folgenden Paragraphen
eiteren Gebrauch machen werden.

## §. 2.

Auf einen beliebigen Punkt $A$ im Raume mögen jetzt nach
liebigen Richtungen hin beliebige Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

rken. Von dem Punkte $A$ aus denken wir uns eine beliebige
rade Linie $AB$ gezogen, schneiden auf derselben von dem

Punkte $A$ an ein beliebiges Stück $AM$ ab, und fällen von dem Punkte $M$ auf die Richtungen der Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

oder auf die Verlängerungen dieser Richtungen über den Punkt $A$ hinaus die Perpendikel

$$MN,\ MN_1,\ MN_2,\ MN_3,\ MN_4,\ldots.;$$

so werden die Fusspunkte dieser Perpendikel auf den geraden Linien, in denen die in Rede stehenden Kräfte wirken, von dem Punkte $A$ an gewisse Stücke

$$AN,\ AN_1,\ AN_2,\ AN_3,\ AN_4,\ldots.$$

abschneiden, welche wir als positiv oder negativ betrachten, jenachdem sie auf den Richtungen der entsprechenden Kräfte selbst, oder auf deren Verlängerungen über den Punkt $A$ hinaus liegen, und mit Rücksicht hierauf die Projectionen der Linie $AM$ auf den Richtungen der Kräfte nennen, und durch

$$p,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ldots.$$

bezeichnen wollen.

Durch den Punkt $A$ als Anfangspunkt legen wir nun drei auf einander senkrecht stehende Axen der $x$, $y$, $z$, und bezeichnen die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die Richtungen der Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

mit den positiven Theilen dieser Axen einschliessen, respective durch

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3;\ldots.$$

Zerlegen wir dann jede Kraft nach den drei angenommenen Axen in drei Composanten, so sind die analytischen Ausdrücke der in der Axe der $x$ wirkenden Composanten:

$$P\cos\alpha,\quad P_1\cos\alpha_1,\quad P_2\cos\alpha_2,\quad P_3\cos\alpha_3,\ldots.;$$

die analytischen Ausdrücke der in der Axe der $y$ wirkenden Composanten sind:

$$P\cos\beta,\quad P_1\cos\beta_1,\quad P_2\cos\beta_2,\quad P_3\cos\beta_3,\ldots.;$$

und eben so sind endlich die analytischen Ausdrücke der in der Axe der $z$ wirkenden Composanten:

$$P\cos\gamma,\quad P_1\cos\gamma_1,\quad P_2\cos\gamma_2,\quad P_3\cos\gamma_3,\ldots.$$

Hiernach lassen sich also die Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4, \ldots.$$

auf die drei in den Axen der $x$, $y$, $z$ wirkenden Kräfte

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots.,$$

$$P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 + \ldots.,$$

$$P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + P_3\cos\gamma_3 + \ldots.$$

zurückführen; und bezeichnen wir nun die Resultirende der Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4, \ldots.$$

durch $R$, die 180° nicht übersteigenden Winkel aber, welche die Richtung dieser Resultirenden mit den positiven Theilen der drei Axen einschliesst, durch $\varphi$, $\psi$, $\chi$, so haben wir nach dem, was in §. 1. bewiesen worden ist, offenbar die drei folgenden Gleichungen:

$$R\cos\varphi = P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots.,$$

$$R\cos\psi = P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 + \ldots.,$$

$$R\cos\chi = P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + P_3\cos\gamma_3 + \ldots..$$

Augenscheinlich ist es nun verstattet, den positiven Theil irgend einer der drei Axen mit der aus dem Obigen bekannten Linie $AB$ zusammenfallen zu lassen. Wählen wir dazu etwa die Axe der $x$, so haben wir von jetzt an nur noch die Gleichung

$$R\cos\varphi = P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots.$$

zu betrachten.

Multipliciren wir diese Gleichung mit der Linie $AM$, welche wir von jetzt an der Kürze wegen durch $L$ bezeichnen wollen, so erhalten wir die Gleichung:

$$R.L\cos\varphi = P.L\cos\alpha + P_1.L\cos\alpha_1 + P_2.L\cos\alpha_2 + P_3.L\cos\alpha_3 + \ldots.$$

Weil nun aber offenbar in völliger Allgemeinheit

$$p = L\cos\alpha,\quad p_1 = L\cos\alpha_1,\quad p_2 = L\cos\alpha_2,\quad p_3 = L\cos\alpha_3, \ldots.$$

und, wenn wir die mit ihrem gehörigen Vorzeichen genommene Projection der Linie $AM$ oder $L$ auf der Linie, in welcher die Kraft $R$ wirkt, durch $r$ bezeichnen,

$$r = L\cos\varphi$$

ist; so erhält die obige Gleichung, wenn man in dieselbe diese Grössen einführt, die Gestalt:

$$Rr = Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + P_4p_4 + \ldots ,$$

welche Gleichung offenbar für jede Lage und Grösse der durch $L$ bezeichneten Linie gilt. Hieraus lässt sich jetzt Folgendes schliessen.

Wenn der Punkt $A$ ein völlig freier Punkt ist und sich in Ruhe befindet, d. h. in diesem Falle, wenn die an dem Punkte $A$ wirkenden Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind, so muss $R=0$, also nach dem Obigen für jede Lage und Grösse der Linie $L$

$$Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + P_4p_4 + \ldots = 0$$

sein.

Wenn der Punkt $A$ genöthigt ist, auf einer Fläche zu bleiben, und sich in Ruhe befindet, so muss offenbar jederzeit die Richtung der Kraft $R$ auf dieser Fläche senkrecht stehen, wenn diese Kraft nicht verschwindet. Nimmt man nun, was offenbar verstattet ist, die Linie $L$ in der die in Rede stehende Fläche in dem Punkte $A$ berührenden Ebene an, so ist jederzeit $r=0$, und folglich nach dem Obigen wieder

$$Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + P_4p_4 + \ldots = 0,$$

wenn man nur, wie gesagt, die Linie $L$ rücksichtlich ihrer Lage, wobei ihre Grösse ganz willkührlich ist, auf die angegebene Weise annimmt.

Wenn der Punkt $A$ auf einer Linie zu bleiben genöthigt ist und sich in Ruhe befindet, so ergiebt sich durch ein ganz ähnliches Raisonnement wie vorher, dass auch in diesem Falle

$$Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + P_4p_4 + \ldots = 0$$

ist, wenn man nur die übrigens beliebig lange Linie $L$ in der, die in Rede stehende Linie oder Curve in dem Punkte $A$ berührenden Geraden annimmt.

§. 3.

Wir denken uns jetzt ein System von Punkten

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots ,$$

welche in einer solchen Verbindung unter einander stehen, dass eine gegenseitige Wirkung dieser Punkte, oder vielmehr der an denselben wirkenden Kräfte, deren Resultirende für die einzelnen Punkte wir der Reihe nach durch

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots .$$

bezeichnen wollen, auf einander möglich ist. Die Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem sollen respective durch

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3; \quad x_4, y_4, z_4; \ldots$$

bezeichnet werden.

Giebt man diesem Systeme, welches wir als ursprünglich in Ruhe sich befindend annehmen, eine unendlich kleine Drehung, die an sich völlig willkührlich ist, jedoch mit den Bedingungen, denen das System unterworfen worden ist, vereinbar und insofern möglich sein muss, so nennt man die unendlich kleinen geraden Linien, welche die primitiven und secundären Oerter der einzelnen Punkte des Systems mit einander verbinden, die virtuellen Geschwindigkeiten dieser Punkte.

Wenn Punkte des Systems auf Flächen oder Linien zu bleiben genöthigt sind, so werden deren virtuelle Geschwindigkeiten offenbar mit desto grösserer Genauigkeit in die diese Flächen oder Linien in den in Rede stehenden Punkten berührenden Ebenen oder geraden Linien hinein fallen, je kleiner die dem Systeme gegebene Drehung ist, eine Bemerkung, welche man im Folgenden stets wohl vor Augen behalten muss.

Die Projectionen der virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$$

auf den Richtungslinien der an denselben wirkenden Kräfte

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$$

wollen wir mit Rücksicht auf die in dem vorhergehenden Paragraphen gegebenen Bestimmungen respective durch

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$$

bezeichnen.

Fassen wir nun allgemein zwei beliebige Punkte des Systems, die durch $A_m$ und $A_n$ bezeichnet werden mögen, in's Auge, so soll die Wirkung, welche auf den Punkt $A_m$ der Punkt $A_n$ ausübt,

durch $W_{m,n}$, also auf ähnliche Art die Wirkung, welche auf den Punkt $A_n$ der Punkt $A_m$ ausübt, durch $W_{n,m}$ bezeichnet werden. Die Projection der virtuellen Geschwindigkeit des Punktes $A_m$ auf der Richtungslinie der Kraft $W_{m,n}$ wollen wir durch $w_{m,n}$, und eben so die Projection der virtuellen Geschwindigkeit des Punktes $A_n$ auf der Richtungslinie der Kraft $W_{n,m}$ durch $w_{n,m}$ bezeichnen.

Die beiden Kräfte $W_{m,n}$ und $W_{n,m}$ kann man sich als zwei in der die Punkte $A_m$ und $A_n$ verbindenden geraden Linie herrschende Spannungen vorstellen, welche nothwendig einander gleich und entgegengesetzt sein müssen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, das System offenbar nicht in völliger Ruhe sein könnte, wie doch vorausgesetzt wurde. Zugleich wird es dabei offenbar immer verstattet sein, die Wirkung $W_{m,n}$ von $A_n$ auf $A_m$ als in der Linie $A_mA_n$ von $A_m$ nach $A_n$, die Wirkung $W_{n,m}$ von $A_m$ auf $A_n$ als in der Linie $A_mA_n$ von $A_n$ nach $A_m$ hin gerichtet anzunehmen, wobei immer

$$W_{m,n}=W_{n,m}$$

ist, welche Gleichung bald nachher weitere Anwendung finden wird.

Weil nun jeder der Punkte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots.$$

unsers Systems für sich in Ruhe ist, so haben wir, die vorher eingeführten Bezeichnungen in Anwendung bringend, nach dem vorhergehenden Paragraphen die folgenden, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner die dem Systeme gegebene Drehung ist, geltenden Gleichungen:

$$P_1p_1+W_{1,2}w_{1,2}+W_{1,3}w_{1,3}+W_{1,4}w_{1,4}+W_{1,5}w_{1,5}+\ldots.=0,$$
$$P_2p_2+W_{2,1}w_{2,1}+W_{2,3}w_{2,3}+W_{2,4}w_{2,4}+W_{2,5}w_{2,5}+\ldots.=0,$$
$$P_3p_3+W_{3,1}w_{3,1}+W_{3,2}w_{3,2}+W_{3,4}w_{3,4}+W_{3,5}w_{3,5}+\ldots.=0,$$
$$P_4p_4+W_{4,1}w_{4,1}+W_{4,2}w_{4,2}+W_{4,3}w_{4,3}+W_{4,5}w_{4,5}+\ldots.=0,$$
$$P_5p_5+W_{5,1}w_{5,1}+W_{5,2}w_{5,2}+W_{5,3}w_{5,3}+W_{5,4}w_{5,4}+\ldots.=0,$$

u. s. w.

also, wenn man diese Gleichungen sämmtlich zu einander addirt, und dabei die aus dem Vorhergehenden bekannte, allgemein gültige Gleichung

$$W_{m,n}=W_{n,m}$$

überall gehörig berücksichtigt, die folgende Gleichung, deren Fort-

schreitungsgesetz in ihren einzelnen Gliedern sogleich von selbst in die Augen fallen wird:

$$\left.\begin{array}{l} P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + P_4p_4 + P_5p_5 + \ldots \\ \quad + W_{1,2}(w_{1,2} + w_{2,1}) \\ \quad + W_{1,3}(w_{1,3} + w_{3,1}) \\ \quad + W_{1,4}(w_{1,4} + w_{4,1}) \\ \quad + W_{1,5}(w_{1,5} + w_{5,1}) \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ \quad + W_{2,3}(w_{2,3} + w_{3,2}) \\ \quad + W_{2,4}(w_{2,4} + w_{4,2}) \\ \quad + W_{2,5}(w_{2,5} + w_{5,2}) \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ \quad + W_{3,4}(w_{3,4} + w_{4,3}) \\ \quad + W_{3,5}(w_{3,5} + w_{5,3}) \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ \quad + W_{4,5}(w_{4,5} + w_{5,4}) \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{array}\right\} = 0.$$

Dass auch diese Gleichung nur mit desto grösserer Genauigkeit gilt, je kleiner die dem Systeme gegebene Drehung ist, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

Weil jede Bewegung in einer bestimmten Zeit vor sich geht, so wird man auch bei der unserem Systeme gegebenen unendlich kleinen Drehung die Vorstellung der Zeit, in welcher dieselbe vor sich gegangen ist, nicht von sich abzuweisen im Stande sein. Wir wollen daher jetzt die Coordinaten eines jeden Punktes unsers Systems in einer bestimmten Lage desselben im Raume als Functionen der Zeit betrachten, welcher diese Lage unsers Punktes im Raume entspricht; und bezeichnen wir nun durch $t$ die Zeit, deren Endpunkte der Anfang der unserem ursprünglich in Ruhe befindlichen Systeme gegebenen Drehung entspricht, so werden wir überhaupt die Coordinaten $x_m$, $y_m$, $z_m$ des Punktes $A_m$ als Functionen von $t$ zu betrachten haben; wenn aber ferner $\Delta t$ die Zeit bezeichnet, während welcher die dem Systeme ertheilte Drehung vor sich ging, so werden $x_m + \Delta x_m$, $y_m + \Delta y_m$, $z_m + \Delta z_m$ die Coordinaten

des Punktes im Raume sein, welchen am Ende der Zeit $t+\Delta t$ der Punkt $A_m$ des Systems einnimmt. Bezeichnen wir nun die Entfernung der Punkte $A_m$ und $A_n$ des Systems von einander durch $E_{m,n}$ oder, was hier dasselbe ist, durch $E_{n,m}$, das von dem durch die Coordinaten $x_m+\Delta x_m$, $y_m+\Delta y_m$, $z_m+\Delta z_m$ bestimmten Punkte auf die Verbindungslinie der Punkte $A_m$ und $A_n$ bei der ursprünglichen Lage des Systems gefällte Perpendikel aber durch $\overline{\omega}$, so erhellet mittelst einer sehr einfachen geometrischen Betrachtung, deren Anstellung füglich dem Leser anheim gestellt bleiben kann, auf der Stelle, dass mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner die dem Systeme ertheilte Drehung ist, sonst aber in völliger Allgemeinheit,

$$E_{m,n}-w_{m,n}$$
$$=\sqrt{(x_m+\Delta x_m-x_n)^2+(y_m+\Delta y_m-y_n)^2+(z_m+\Delta z_m-z_n)^2-\overline{\omega}^2}$$

oder

$$-w_{m,n}$$
$$=\sqrt{(x_m+\Delta x_m-x_n)^2+(y_m+\Delta y_m-y_n)^2+(z_m+\Delta z_m-z_n)^2-\overline{\omega}^2}-E_{m,n},$$

also auch

$$-\frac{w_{m,n}}{\Delta t}$$
$$=\frac{\sqrt{(x_m+\Delta x_m-x_n)^2+(y_m+\Delta y_m-y_n)^2+(z_m+\Delta z_m-z_n)^2-\overline{\omega}^2}-E_{m,n}}{\Delta t}$$

ist.

Lässt man nun $\Delta t$ sich der Null nähern, lässt man also die dem Systeme ertheilte Drehung immer kleiner und kleiner werden, so ergiebt sich hieraus, mit Hülfe einer bekannten Bezeichnung, die folgende in aller Strenge gültige Gränzengleichung:

$$-\operatorname{Lim}\frac{w_{m,n}}{\Delta t}$$
$$=\operatorname{Lim}\frac{\sqrt{(x_m+\Delta x_m-x_n)^2+(y_m+\Delta y_m-y_n)^2+(z_m+\Delta z_m-z_n)^2-\overline{\omega}^2}-E_{m,n}}{\Delta t},$$

bei welcher, wie bei allen späterhin noch vorkommenden Gränzengleichungen, man sich immer vorzustellen hat, dass $\Delta t$ sich der Null nähere, was hier ein für alle Mal bemerkt wird.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$E'^2_{m,n}=(x_m+\Delta x_m-x_n)^2+(y_m+\Delta y_m-y_n)^2+(z_m+\Delta z_m-z_n)^2,$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$-\operatorname{Lim}\frac{w_{m,n}}{\Delta t}=\operatorname{Lim}\frac{\sqrt{E'^2_{m,n}-\overline{\omega}^2}-E_{m,n}}{\Delta t}$$

oder

$$-\operatorname{Lim}\frac{w_{m,n}}{\Delta t}=\operatorname{Lim}\frac{E'_{m,n}\sqrt{1-\left(\frac{\overline{\omega}}{E'_{m,n}}\right)^2}-E_{m,n}}{\Delta t}.$$

Da wir nun die Drehung des Systems, also auch $\overline{\omega}$, beliebig klein annehmen können, so wird sich immer voraussetzen lassen, dass der Bruch unter dem Wurzelzeichen kleiner als die Einheit ist, und wir werden uns also die Wurzelgrösse nach dem Binomischen Lehrsatze jederzeit in eine convergirende Reihe entwickelt denken können. Setzen wir demzufolge

$$\sqrt{1-\left(\frac{\overline{\omega}}{E'_{m,n}}\right)^2}=1-\frac{\overline{\omega}}{E'_{m,n}}\,\Omega,$$

so wird $\Omega$ offenbar in allen Gliedern $\overline{\omega}$ als Factor enthalten, und also, immer die Convergenz der Reihe festgehalten, eine Grösse sein, welche für $\overline{\omega}=0$ verschwindet, oder sich vielmehr, wenn $\overline{\omega}$ sich der Null nähert, gleichfalls der Null nähert. Nach dem Obigen ist nun, alles Dieses vorausgesetzt,

$$-\operatorname{Lim}\frac{w_{m,n}}{\Delta t}=\operatorname{Lim}\frac{E'_{m,n}(1-\frac{\overline{\omega}}{E'_{m,n}}\Omega)-E_{m,n}}{\Delta t}$$

oder

$$-\operatorname{Lim}\frac{w_{m,n}}{\Delta t}=\operatorname{Lim}\frac{E'_{m,n}-E_{m,n}-\overline{\omega}\Omega}{\Delta t},$$

also

$$-\operatorname{Lim}\frac{w_{m,n}}{\Delta t}=\operatorname{Lim}\frac{E'_{m,n}-E_{m,n}}{\Delta t}-\operatorname{Lim}\Omega\,.\operatorname{Lim}\frac{\overline{\omega}}{\Delta t}.$$

Weil nun, wenn $\Delta t$ sich der Null nähert, auch $\overline{\omega}$ sich der Null nähert, so ist nach dem Obigen

$$\operatorname{Lim}\Omega=0,$$

und folglich, insofern $\frac{\overline{\omega}}{\Delta t}$ sich einer endlichen Gränze nähert, wenn $\Delta t$ sich der Null nähert, d. h. nicht in's Unendliche wächst, wenn $\Delta t$ sich der Null nähert, auch

$$\operatorname{Lim}\Omega.\operatorname{Lim}\frac{\overline{\omega}}{\Delta t}=0.$$

Dieser Schluss wird freilich nicht gerechtfertigt sein, wenn $\frac{\overline{\omega}}{\Delta t}$ in's Unendliche wächst, indem $\Delta t$ sich der Null nähert. Ob dies der Fall ist, wird sich bei der grossen Allgemeinheit dieser Betrachtungen natürlich niemals entscheiden lassen, und es scheint in der That gerade dieser Punkt eine schwache Stelle der vorliegenden Betrachtungen zu sein *). Indess lässt sich allerdings

*) Poisson, dem die in dieser Abhandlung gegebene Darstellung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten nachgebildet ist, ohne dabei jedoch auf alle Eigenthümlichkeit zu verzichten, sagt im Traité de Mécanique. Tome I. Paris 1811. p. 247. an der hierher gehörenden Stelle: „en négligeant le carré $\overline{na}^2$, qui est infiniment petit du second ordre," wo $\overline{na}$ mit unserm obigen $\overline{\omega}$ übereinstimmt, eine Schlussweise, die nach unseren Ansichten über diese Dinge freilich nicht so geradezu und ohne Weiteres zu billigen ist, und die wir daher auch im Obigen uns nicht erlaubt haben, indem wir vielmehr bestrebt gewesen sind, überall auf strenge Gränzen-Betrachtungen zurück zu gehen. Der oben im Texte berührte Umstand macht sich aber eigentlich bei allen ganz allgemeinen Betrachtungen der Differentialrechnung geltend, und wird sehr mit Unrecht von den meisten Schriftstellern über diese Wissenschaft ganz vernachlässigt, nur von sehr wenigen in gebührender Weise hervorgehoben, wie es insbesondere in für Anfänger bestimmten Lehrbüchern unbedingt erforderlich ist. Nehmen wir nur z. B. einmal die bekannte Elementarformel der Differentialrechnung

$$\frac{\partial.pq}{\partial x}=q\frac{\partial p}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial x},$$

wo bekanntlich $p$, $q$ als Functionen von $x$ zu betrachten sind. Der Beweis dieser Formel ist folgender. Nach der Differenzenrechnung ist

$$\Delta.pq=(p+\Delta p)(q+\Delta q)-pq,$$

also

$$\Delta.pq=q\Delta p+p\Delta q+\Delta p\Delta q,$$

und folglich

$$\frac{\Delta.pq}{\Delta x}=q\frac{\Delta p}{\Delta x}+p\frac{\Delta q}{\Delta x}+\Delta p\frac{\Delta q}{\Delta x}$$

oder

$$\frac{\Delta.pq}{\Delta x}=q\frac{\Delta p}{\Delta x}+p\frac{\Delta q}{\Delta x}+\Delta q\frac{\Delta p}{\Delta x};$$

sagen, dass der in Rede stehende Fall, wenn nämlich $\frac{\varpi}{\Delta t}$ in's Unendliche wächst, wenn $\Delta t$ sich der Null nähert, doch immer nur als ein bei der besonderen dem Systeme gegebenen unendlich

---

also, wenn man, $\Delta x$ sich der Null nähern lassend, zu den Gränzen übergeht:

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta . pq}{\Delta x} = q\,\text{Lim}\,\frac{\Delta p}{\Delta x} + p\,\text{Lim}\,\frac{\Delta q}{\Delta x} + \text{Lim}\,\Delta p . \text{Lim}\,\frac{\Delta q}{\Delta x}$$

oder

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta . pq}{\Delta x} = q\,\text{Lim}\,\frac{\Delta p}{\Delta x} + p\,\text{Lim}\,\frac{\Delta q}{\Delta x} + \text{Lim}\,\Delta q . \text{Lim}\,\frac{\Delta p}{\Delta x}.$$

Schliessen wir nun unsere fernere Betrachtung nur an die erste dieser beiden Formeln an, so ist natürlich, die Stetigkeit der Functionen überall vorausgesetzt, $\text{Lim}\,\Delta p = 0$, und folglich auch

$$\text{Lim}\,\Delta p . \text{Lim}\,\frac{\Delta q}{\Delta x} = 0,$$

insofern sich nämlich, wenn $\Delta x$ sich der Null nähert, $\frac{\Delta q}{\Delta x}$ einer endlichen Gränze nähert und nicht etwa in's Unendliche wächst, d. h. nach den Begriffen der Differentialrechnung, insofern es einen endlichen völlig bestimmten Differentialquotienten von $q$ in Bezug auf $x$ als veränderliche Grösse wirklich giebt. Dies vorausgesetzt, ist also nach dem Obigen

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta . pq}{\Delta x} = q\,\text{Lim}\,\frac{\Delta p}{\Delta x} + p\,\text{Lim}\,\frac{\Delta q}{\Delta x},$$

und folglich, weil nach den Begriffen der Differentialrechnung

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \text{Lim}\,\frac{\Delta q}{\Delta x} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \text{Lim}\,\frac{\Delta . pq}{\Delta x} = \frac{\partial . pq}{\partial x}$$

ist:

$$\frac{\partial . pq}{\partial x} = q\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial x},$$

welches die obige Fundamentalformel der Differentialrechnung zur Differentiation eines Products ist. Man sieht, dass diese ganze Betrachtung nur unter der Voraussetzung gilt, dass es, um in den Ausdrücken der Diffential-rechnung zu reden, einen endlichen völlig bestimmten Differentialquotienten von $q$, und ebenso auch von $p$, d. h. endliche völlig bestimmte Gränzen, denen $\frac{\Delta q}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ sich nähern, wenn $\Delta x$ sich der Null nähert, wirklich giebt. Und etwa behaupten oder beweisen, wohl gar als sich von selbst verstehend annehmen zu wollen, dass es für jede Function einen Differential-

kleinen Drehung eintretender Ausnahmefall zu betrachten sein würde; und da die Art dieser Drehung an sich ganz willkührlich ist, indem dieselbe nur mit den Bedingungen, welchen das System unterworfen worden ist, vereinbar und in Folge derselben möglich sein soll, so wird sich die Drehung im Allgemeinen immer so angeordnet denken lassen, dass der in Rede stehende Ausnahmefall nicht eintritt, und dass man also immer

$$\operatorname{Lim} \Omega . \operatorname{Lim} \frac{\overline{\omega}}{\Delta t} = 0$$

zu setzen, sich wird berechtigt halten dürfen, woraus dann weiter nach dem Obigen

$$-\operatorname{Lim} \frac{w_{m,n}}{\Delta t} = \operatorname{Lim} \frac{E'_{m,n} - E_{m,n}}{\Delta t}$$

folgt, wo

$$E_{m,n} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2}$$

und

$$E'_{m,n} = \sqrt{(x_m + \Delta x_m - x_n)^2 + (y_m + \Delta y_m - y_n)^2 + (z_m + \Delta z_m - z_n)^2}$$

ist.

Bezeichnen wir nun der Kürze wegen den Differentialquotienten der Grösse

$$E_{m,n} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2},$$

insofern in derselben bloss die Grössen $x_m, y_m, z_m$ als veränderlich betrachtet werden, durch

$$\frac{\partial_m E_{m,n}}{\partial t},$$

so ist, weil

$$E'_{m,n} - E_{m,n} = \sqrt{(x_m + \Delta x_m - x_n)^2 + (y_m + \Delta y_m - y_n)^2 + (z_m + \Delta z_m - z_n)^2}$$
$$- \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2}$$

---

quotienten nothwendig wirklich geben müsse, wie wohl früher hin und wieder geschehen ist: das wird doch wohl, insofern die betreffende Function nicht gewissen besondern Bedingungen unterworfen wird, schwerlich heut zu Tage einem Mathematiker noch einfallen!! Man möge diese Bemerkungen entschuldigen, die hier nur deshalb gemacht worden sind, um nachzuweisen, dass derselbe Umstand, auf den wir oben bei dem Beweise des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten aufmerksam gemacht haben, uns im Wesentlichen auch schon bei'm ersten Eintritt in die Differentialrechnung begegnet.

st, offenbar

$$\frac{\partial_m E_{m,n}}{\partial t} = \mathrm{Lim}\frac{E'_{m,n} - E_{m,n}}{\varDelta t},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$-\mathrm{Lim}\frac{w_{m,n}}{\varDelta t} = \frac{\partial_m E_{m,n}}{\partial t} \text{ oder } \mathrm{Lim}\frac{w_{m,n}}{\varDelta t} = -\frac{\partial_m E_{m,n}}{\partial t},$$

und natürlich ganz eben so in ähnlicher Bezeichnung:

$$\mathrm{Lim}\frac{w_{n,m}}{\varDelta t} = -\frac{\partial_n E_{m,n}}{\partial t},$$

wobei man sich aus dem Obigen zu erinnern hat, dass natürlich $E_{m,n} = E_{n,m}$ ist. Also ist

$$\mathrm{Lim}\frac{w_{m,n}}{\varDelta t} + \mathrm{Lim}\frac{w_{n,m}}{\varDelta t} = -\frac{\partial_m E_{m,n}}{\partial t} - \frac{\partial_n E_{m,n}}{\partial t},$$

und folglich, weil nach den Lehren der Differentialrechnung bekanntlich

$$\frac{\partial E_{m,n}}{\partial t} = \frac{\partial_m E_{m,n}}{\partial t} + \frac{\partial_n E_{m,n}}{\partial t}$$

ist, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedürfen wird:

$$\mathrm{Lim}\frac{w_{m,n}}{\varDelta t} + \mathrm{Lim}\frac{w_{n,m}}{\varDelta t} = -\frac{\partial E_{m,n}}{\partial t}.$$

Dividirt man jetzt die oben gefundene, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner die dem Systeme gegebene Drehung ist, geltende Hauptgleichung durch $\varDelta t$, und geht, indem man $\varDelta t$ sich der Null nähern lässt, zu den Gränzen über, so erhält man offenbar die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}
P_1\,\mathrm{Lim}\frac{p_1}{\Delta t}+P_2\,\mathrm{Lim}\frac{p_2}{\Delta t}+P_3\,\mathrm{Lim}\frac{p_3}{\Delta t}+P_4\,\mathrm{Lim}\frac{p_4}{\Delta t}+\ldots\\
+W_{1,2}(\mathrm{Lim}\frac{w_{1,2}}{\Delta t}+\mathrm{Lim}\frac{w_{2,1}}{\Delta t})\\
+W_{1,3}(\mathrm{Lim}\frac{w_{1,3}}{\Delta t}+\mathrm{Lim}\frac{w_{3,1}}{\Delta t})\\
+W_{1,4}(\mathrm{Lim}\frac{w_{1,4}}{\Delta t}+\mathrm{Lim}\frac{w_{4,1}}{\Delta t})\\
+W_{1,5}(\mathrm{Lim}\frac{w_{1,5}}{\Delta t}+\mathrm{Lim}\frac{w_{5,1}}{\Delta t})\\
\text{u. s. w.}\\
+W_{2,3}(\mathrm{Lim}\frac{w_{2,3}}{\Delta t}+\mathrm{Lim}\frac{w_{3,2}}{\Delta t})\\
+W_{2,4}(\mathrm{Lim}\frac{w_{2,4}}{\Delta t}+\mathrm{Lim}\frac{w_{4,2}}{\Delta t})\\
+W_{2,5}(\mathrm{Lim}\frac{w_{2,5}}{\Delta t}+\mathrm{Lim}\frac{w_{5,2}}{\Delta t})\\
\text{u. s. w.}\\
+W_{3,4}(\mathrm{Lim}\frac{w_{3,4}}{\Delta t}+\mathrm{Lim}\frac{w_{4,3}}{\Delta t})\\
+W_{3,5}(\mathrm{Lim}\frac{w_{3,5}}{\Delta t}+\mathrm{Lim}\frac{w_{5,3}}{\Delta t})\\
\text{u. s. w.}\\
+W_{4,5}(\mathrm{Lim}\frac{w_{4,5}}{\Delta t}+\mathrm{Lim}\frac{w_{5,4}}{\Delta t})\\
\text{u. s. w. u. s. w.}
\end{array}\right\}=0,$$

also nach dem, was unmittelbar vorher bewiesen worden ist, die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}
P_1\,\mathrm{Lim}\frac{p_1}{\Delta t}+P_2\,\mathrm{Lim}\frac{p_2}{\Delta t}+P_3\,\mathrm{Lim}\frac{p_3}{\Delta t}+P_4\,\mathrm{Lim}\frac{p_4}{\Delta t}+\ldots\\
-W_{1,2}\frac{\partial E_{1,2}}{\partial t}-W_{1,3}\frac{\partial E_{1,3}}{\partial t}-W_{1,4}\frac{\partial E_{1,4}}{\partial t}-W_{1,5}\frac{\partial E_{1,5}}{\partial t}-\ldots\\
-W_{2,3}\frac{\partial E_{2,3}}{\partial t}-W_{2,4}\frac{\partial E_{2,4}}{\partial t}-W_{2,5}\frac{\partial E_{2,5}}{\partial t}-W_{2,6}\frac{\partial E_{2,6}}{\partial t}-\ldots\\
-W_{3,4}\frac{\partial E_{3,4}}{\partial t}-W_{3,5}\frac{\partial E_{3,5}}{\partial t}-W_{3,6}\frac{\partial E_{3,6}}{\partial t}-W_{3,7}\frac{\partial E_{3,7}}{\partial t}-\ldots\\
\text{u. s. w.}
\end{array}\right\}=0.$$

Stehen nun die Punkte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots.$$

in einer völlig festen Verbindung unter einander, so dass bei der Drehung oder Verrückung des Systems ihre gegenseitige Lage, und also auch ihre Entfernungen von einander, gar keine Veränderung erleiden kann, so ist allgemein

$$\frac{\partial E_{m,\,n}}{\partial t}=0,$$

und die obige Gleichung geht also unter der gemachten Voraussetzung in die folgende streng gültige Gleichung über:

$$P_1 \operatorname{Lim}\frac{p_1}{\Delta t}+P_2 \operatorname{Lim}\frac{p_2}{\Delta t}+P_3 \operatorname{Lim}\frac{p_3}{\Delta t}+P_4 \operatorname{Lim}\frac{p_4}{\Delta t}+\ldots.=0.$$

Diese Gleichung behält aber auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn nicht alle Punkte des Systems in einer völlig festen Verbindung unter einander stehen, sondern nur so beschaffen sind, dass die Summen der Entfernungen gewisser Punkte keine Aenderung erleiden können, welches unter Anderm namentlich dann der Fall ist, wenn mehrere Paare der gegebenen Punkte ihre gegenseitige Lage nicht ändern können, aber durch völlig biegsame, jedoch nicht ausdehnbare Fäden mit einander verbunden sind, an denen anderen Punkten des Systems hinabzugleiten verstattet ist. Sind nämlich im Allgemeinen $A_n$ und $A_{n+k}$ zwei solche feste Punkte des Systems, die durch einen völlig biegsamen, aber nicht ausdehnbaren Faden mit einander verbunden sind, an welchem die Punkte

$$A_{n+1},\ A_{n+2},\ A_{n+3},\ldots.\ A_{n+k-1}$$

hin gleiten können, so werden im Zustande der Ruhe des Systems, welcher ursprünglich immer vorausgesetzt wird, die Spannungen in allen Theilen

$$A_nA_{n+1},\ A_{n+1}A_{n+2},\ A_{n+2}A_{n+3},\ldots.,\ A_{n+k-1}A_{n+k}$$

des die Punkte $A_n$ und $A_{n+k}$ mit einander verbindenden Fadens einander gleich sein, so dass also in der aus dem Obigen bekannten Bezeichnung

$$W_{n,n+1}=W_{n+1,n+2}=W_{n+2,n+3}=\ldots.=W_{n+k-1,n+k}$$

sein wird. Bezeichnen wir nun den Werth dieser einander gleichen Spannungen überhaupt durch $W$, so wird in der Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
&P_1 \operatorname{Lim}\frac{p_1}{\Delta t} + P_2 \operatorname{Lim}\frac{p_2}{\Delta t} + P_3 \operatorname{Lim}\frac{p_3}{\Delta t} + P_4 \operatorname{Lim}\frac{p_4}{\Delta t} + \ldots\\
&- W_{1,2}\frac{\partial E_{1,2}}{\partial t} - W_{1,3}\frac{\partial E_{1,3}}{\partial t} - W_{1,4}\frac{\partial E_{1,4}}{\partial t} - W_{1,5}\frac{\partial E_{1,5}}{\partial t} - \ldots\\
&- W_{2,3}\frac{\partial E_{2,3}}{\partial t} - W_{2,4}\frac{\partial E_{2,4}}{\partial t} - W_{2,5}\frac{\partial E_{2,5}}{\partial t} - W_{2,6}\frac{\partial E_{2,6}}{\partial t} - \ldots\\
&- W_{3,4}\frac{\partial E_{3,4}}{\partial t} - W_{3,5}\frac{\partial E_{3,5}}{\partial t} - W_{3,6}\frac{\partial E_{3,6}}{\partial t} - W_{3,7}\frac{\partial E_{3,7}}{\partial t} - \ldots
\end{aligned}\right\} = 0,$$

u. s. w.

das Aggregat der Glieder

$$- W_{n,n+1}\frac{\partial E_{n,n+1}}{\partial t},$$

$$- W_{n+1,n+2}\frac{\partial E_{n+1,n+2}}{\partial t},$$

$$- W_{n+2,n+3}\frac{\partial E_{n+2,n+3}}{\partial t},$$

u. s. w.

$$- W_{n+k-1,n+k}\frac{\partial E_{n+k-1,n+k}}{\partial t}$$

auf die Form

$$- W\left(\frac{\partial E_{n,n+1}}{\partial t} + \frac{\partial E_{n+1,n+2}}{\partial t} + \frac{\partial E_{n+2,n+3}}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial E_{n+k-1,n+k}}{\partial t}\right)$$

gebracht werden können. Nach der Voraussetzung ist aber

$$E_{n,n+1} + E_{n+1,n+2} + E_{n+2,n+3} + \ldots + E_{n+k-1,n+k}$$

eine constante Grösse, also

$$\frac{\partial E_{n,n+1}}{\partial t} + \frac{\partial E_{n+1,n+2}}{\partial t} + \frac{\partial E_{n+2,n+3}}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial E_{n+k-1,n+k}}{\partial t} = 0,$$

und das Aggregat der obigen Glieder unserer Hauptgleichung verschwindet folglich, so dass also diese Gleichung auch unter den jetzt gemachten Voraussetzungen in die Gleichung

$$P_1 \operatorname{Lim}\frac{p_1}{\Delta t} + P_2 \operatorname{Lim}\frac{p_2}{\Delta t} + P_3 \operatorname{Lim}\frac{p_3}{\Delta t} + P_4 \operatorname{Lim}\frac{p_4}{\Delta t} + \ldots = 0$$

übergeht.

Bis jetzt sind wir immer von der Voraussetzung ausgegangen, dass sich das System der Punkte

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots.$$

in Ruhe befinde. Das Vorhergehende lässt sich aber auch umkehren, und man kann behaupten, dass, wenn die Gleichung

$$P_1 \operatorname{Lim} \frac{p_1}{\varDelta t} + P_2 \operatorname{Lim} \frac{p_2}{\varDelta t} + P_3 \operatorname{Lim} \frac{p_3}{\varDelta t} + P_4 \operatorname{Lim} \frac{p_4}{\varDelta t} + \ldots. = 0$$

für alle möglichen, mit der vorausgesetzten gegenseitigen Verbindung der Punkte

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots.$$

unter einander vereinbaren Verschiebungen oder Verrückungen des Systems erfüllt ist, die Kräfte

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots.$$

keine Bewegung des Systems hervorbringen, sondern dasselbe sich in Ruhe befindet.

Um dies zu beweisen, wollen wir annehmen, dass das System sich nicht in Ruhe befinde, sondern von den Kräften

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots.$$

in Bewegung gesetzt werde, so werden die Punkte

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots.$$

am Anfange dieser Bewegung gewisse unendlich kleine Wege zurücklegen, welche mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner sie sind, als gerade Linien betrachtet werden können. Der Zustand der Ruhe wird sich nun herstellen lassen, wenn man nach diesen Linien direct entgegengesetzten Richtungen an den Punkten

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots.$$

gewisse Kräfte

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \ldots.$$

wirken lässt, für welche

$$q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots.$$

Dasselbe bedeuten mögen, was für die Kräfte

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots.$$

die Symbole

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ldots.$$

bedeuten. Weil nun die Kräfte

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.;\quad Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ldots.$$

keine Bewegung des Systems hervorbringen, so gilt nach dem Obigen*) die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} P_1\operatorname{Lim}\frac{p_1}{\Delta t}+P_2\operatorname{Lim}\frac{p_2}{\Delta t}+P_3\operatorname{Lim}\frac{p_3}{\Delta t}+P_4\operatorname{Lim}\frac{p_4}{\Delta t}+\ldots. \\ +Q_1\operatorname{Lim}\frac{q_1}{\Delta t}+Q_2\operatorname{Lim}\frac{q_2}{\Delta t}+Q_3\operatorname{Lim}\frac{q_3}{\Delta t}+Q_4\operatorname{Lim}\frac{q_4}{\Delta t}+\ldots. \end{array}\right\}=0.$$

Nach der Voraussetzung ist aber für alle möglichen Verrückungen des Systems

$$P_1\operatorname{Lim}\frac{p_1}{\Delta t}+P_2\operatorname{Lim}\frac{p_2}{\Delta t}+P_3\operatorname{Lim}\frac{p_3}{\Delta t}+P_4\operatorname{Lim}\frac{p_4}{\Delta t}+\ldots.=0,$$

also wegen obiger Gleichung:

$$Q_1\operatorname{Lim}\frac{q_1}{\Delta t}+Q_2\operatorname{Lim}\frac{q_2}{\Delta t}+Q_3\operatorname{Lim}\frac{q_3}{\Delta t}+Q_4\operatorname{Lim}\frac{q_4}{\Delta t}+\ldots.=0.$$

Offenbar lässt sich nun das System ganz in derselben Weise verrücken, wie es nach der gemachten Annahme von den Kräften

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

zur Bewegung angeregt wird. Thut man dies, so fallen offenbar die Projectionen

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ldots.$$

sämmtlich in die Verlängerungen der Richtungen der Kräfte

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ldots.$$

über ihre Angriffspunkte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots.$$

hinaus, und sind daher sämmtlich negativ. Also sind offenbar auch die Grössen

---

*) Natürlich werden hier auch alle oben rücksichtlich der Verbindung der Punkte des Systems unter einander gemachten Voraussetzungen festgehalten.

$$\text{Lim}\frac{q_1}{\varDelta t},\ \text{Lim}\frac{q_2}{\varDelta t},\ \text{Lim}\frac{q_3}{\varDelta t},\ \text{Lim}\frac{q_4}{\varDelta t},\ldots.$$

sämmtlich negativ, insofern nicht etwa die eine oder die andere dieser Gränzen verschwindet, wodurch jedoch die folgenden Schlüsse nicht im Geringsten alterirt werden würden. Folglich sind auch die Producte

$$Q_1\text{Lim}\frac{q_1}{\varDelta t},\ Q_2\text{Lim}\frac{q_2}{\varDelta t},\ Q_3\text{Lim}\frac{q_3}{\varDelta t},\ Q_4\text{Lim}\frac{q_4}{\varDelta t},\ldots.$$

im Allgemeinern sämmtlich negativ, und die Gleichung

$$Q_1\text{Lim}\frac{q_1}{\varDelta t}+Q_2\text{Lim}\frac{q_2}{\varDelta t}+Q_3\text{Lim}\frac{q_3}{\varDelta t}+Q_4\text{Lim}\frac{q_4}{\varDelta t}+\ldots.=0$$

besteht daher im Allgemeinen aus lauter negativen Gliedern, welches offenbar ungereimt oder vielmehr nur dann statthaft ist, wenn alle Glieder derselben einzeln für sich verschwinden, d. h. wenn

$$Q_1\text{Lim}\frac{q_1}{\varDelta t}=0,$$

$$Q_2\text{Lim}\frac{q_2}{\varDelta t}=0,$$

$$Q_3\text{Lim}\frac{q_3}{\varDelta t}=0,$$

$$Q_4\text{Lim}\frac{q_4}{\varDelta t}=0,$$

u. s. w.

ist. Aus jeder Gleichung von der Form

$$Q_k\text{Lim}\frac{q_k}{\varDelta t}=0$$

folgt

$$Q_k=0 \text{ oder } \text{Lim}\frac{q_k}{\varDelta t}=0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen sagt aus, dass der Punkt $A_k$ gar kein Bestreben hat, sich nach der Richtung hin zu bewegen, nach welcher eine Bewegung desselben vorausgesetzt oder angenommen worden ist; die zweite Gleichung sagt aus, dass der Punkt $A_k$ sich nach dieser Richtung hin überhaupt gar nicht bewegen kann; in beiden Fällen befindet sich also der Punkt $A_k$

in Ruhe; und da dies ganz in gleicher Weise auch von jedem anderen Punkte des Systems gilt, so befinden sich alle Punkte des Systems in Ruhe; also befindet sich das ganze System in vollkommener Ruhe, wie bewiesen werden sollte.

Die Gesammtheit der im Vorhergehenden bewiesenen Sätze nennt man das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Die Bedingungsgleichung

$$P_1 \operatorname{Lim}\frac{p_1}{\varDelta t} + P_2 \operatorname{Lim}\frac{p_2}{\varDelta t} + P_3 \operatorname{Lim}\frac{p_3}{\varDelta t} + P_4 \operatorname{Lim}\frac{p_4}{\varDelta t} + \ldots = 0,$$

welche den Hauptbestandtheil dieses wichtigen Princips bildet, kann man auch auf den Ausdruck

$$P_1 \operatorname{Lim}\frac{p_1}{\varDelta t}.\varDelta t + P_2 \operatorname{Lim}\frac{p_2}{\varDelta t}.\varDelta t + P_3 \operatorname{Lim}\frac{p_3}{\varDelta t}.\varDelta t + P_4 \operatorname{Lim}\frac{p_4}{\varDelta t}.\varDelta t + \ldots = 0$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\delta p_1 = \operatorname{Lim}\frac{p_1}{\varDelta t}.\varDelta t,$$

$$\delta p_2 = \operatorname{Lim}\frac{p_2}{\varDelta t}.\varDelta t,$$

$$\delta p_3 = \operatorname{Lim}\frac{p_3}{\varDelta t}.\varDelta t,$$

$$\delta p_4 = \operatorname{Lim}\frac{p_4}{\varDelta t}.\varDelta t,$$

u. s. w.

gesetzt wird, auf den Ausdruck

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 + P_4\delta p_4 + \ldots = 0$$

bringen, wobei sogleich in die Augen fällt, dass die durch

$$\delta p_1,\ \delta p_2,\ \delta p_3,\ \delta p_4, \ldots$$

bezeichneten Grössen sich von den Grössen

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4, \ldots$$

desto weniger unterscheiden, je kleiner $\varDelta t$ ist, d. h. je kleiner die Verrückung oder Drehung ist, welche dem Systeme der Punkte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots$$

gegeben wurde.

## II.

## Die allgemeinen Bedingungsgleichungen der Ruhe.

### §. 4.

An den durch die rechtwinkligen Coordinaten

$$x, y, z;\quad x_1, y_1, z_1;\quad x_2, y_2, z_2;\quad x_3, y_3, z_3;\ldots.$$

bestimmten Punkten

$$A, A_1, A_2, A_3, \ldots.$$

sollen nach beliebigen Richtungen die beliebigen Kräfte

$$P, P_1, P_2, P_3, \ldots.$$

wirken. Die von den Richtungen dieser Kräfte mit den Richtungen der positiven Theile der Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel wollen wir respective durch

$$\alpha, \beta, \gamma;\quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2;\quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3;\ldots.$$

bezeichnen. Jede der gegebenen Kräfte zerlegen wir in drei mit den Coordinatenaxen parallele Kräfte. Diese Kräfte, so wie sie den Axen der $x$, $y$, $z$ parallel wirken, sind respective:

$$P\cos\alpha,\quad P_1\cos\alpha_1,\quad P_2\cos\alpha_2,\quad P_3\cos\alpha_3,\ldots.;$$

$$P\cos\beta,\quad P_1\cos\beta_1,\quad P_2\cos\beta_2,\quad P_3\cos\beta_3,\ldots.;$$

$$P\cos\gamma,\quad P_1\cos\gamma_1,\quad P_2\cos\gamma_2,\quad P_3\cos\gamma_3,\ldots.;$$

wofür wir jedoch der Kürze wegen im Folgenden

$$X, X_1, X_2, X_3, \ldots.;$$

$$Y, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots.;$$

$$Z, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots.$$

schreiben wollen.

Die Bedingungen des Zustandes der Ruhe des Systems der Punkte

$$A, A_1, A_2, A_3, \ldots.,$$

insofern an denselben die Kräfte

$$P, P_1, P_2, P_3, \ldots.$$

wirken, müssen offenbar einerlei sein mit den Bedingungen des Zustandes der Ruhe des Systems dieser Punkte, wenn wir uns die obigen Kräfte durch die Kräfte

$$X,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ldots;$$
$$Y,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ldots;$$
$$Z,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ldots$$

ersetzt denken, weshalb wir von nun an nur diese letzteren Kräfte in's Auge fassen wollen.

Um unter dieser Voraussetzung die Bedingungen des Zustandes der Ruhe des Systems der Punkte

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots$$

zu finden, denken wir uns demselben eine unendlich kleine Drehung oder Verrückung ertheilt, und wollen nun einmal bloss den Punkt $A$ und die an demselben wirkenden Kräfte

$$X,\ Y,\ Z$$

einer genaueren Betrachtung unterwerfen, indem Dasselbe, was von dem Punkte $A$ gilt, dann auch von allen übrigen Punkten des Systems gelten wird.

Die auf den Richtungen der Kräfte $X$, $Y$, $Z$ genommenen, dem Zeitintervalle oder der Zeitveränderung $\varDelta t$ entsprechenden Projectionen der virtuellen Geschwindigkeit des Punktes $A$ seien $p$, $q$, $r$. Diese Projectionen sind nach I. positiv oder negativ, jenachdem sie auf den Richtungen der Kräfte $X$, $Y$, $Z$ selbst, oder auf deren Verlängerungen über den Punkt $A$ hinaus liegen. Bezeichnen wir nun die der Zeitveränderung $\varDelta t$ entsprechenden Veränderungen der Coordinaten $x$, $y$, $z$ durch $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$, und fassen einmal die Kraft $X$ in's Auge, so erhellet mittelst einer sehr einfachen Betrachtung auf der Stelle, dass, jenachdem die Kraft $X$ positiv oder negativ ist,

$$p=\varDelta x \text{ oder } p=-\varDelta x$$

ist. Bezeichnet nun $(X)$ den absoluten Werth von $X$, so ist, jenachdem $X$ positiv oder negativ ist,

$$(X)=X \text{ oder } (X)=-X;$$

nach dem Vorhergehenden folglich offenbar immer

$$(X)p=X\varDelta x.$$

Ueberhaupt ist also, wenn wir die absoluten Werthe von $X$, $Y$, $Z$ durch $(X)$, $(Y)$, $(Z)$ bezeichnen:

$$(X)p = X\Delta x,\quad (Y)q = Y\Delta y,\quad (Z)r = Z\Delta z;$$

also:

$$(X)\frac{p}{\Delta t} = X\frac{\Delta x}{\Delta t},\quad (Y)\frac{q}{\Delta t} = Y\frac{\Delta y}{\Delta t},\quad (Z)\frac{r}{\Delta t} = Z\frac{\Delta z}{\Delta t};$$

und folglich:

$$(X)\operatorname{Lim}\frac{p}{\Delta t} = X\operatorname{Lim}\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

$$(Y)\operatorname{Lim}\frac{q}{\Delta t} = Y\operatorname{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta t},$$

$$(Z)\operatorname{Lim}\frac{r}{\Delta s} = Z\operatorname{Lim}\frac{\Delta z}{\Delta t};$$

oder nach den Begriffen der Differentialrechnung:

$$(X)\operatorname{Lim}\frac{p}{\Delta t} = X\frac{\partial x}{\partial t},$$

$$(Y)\operatorname{Lim}\frac{q}{\Delta t} = Y\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$(Z)\operatorname{Lim}\frac{r}{\Delta t} = Z\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Dies vorausgesetzt, erhält man nun aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für den Zustand der Ruhe des Systems der Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, .... unmittelbar die folgende Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{array}{l} X\frac{\partial x}{\partial t} + Y\frac{\partial y}{\partial t} + Z\frac{\partial z}{\partial t} \\ + X_1\frac{\partial x_1}{\partial t} + Y_1\frac{\partial y_1}{\partial t} + Z_1\frac{\partial z_1}{\partial t} \\ + X_2\frac{\partial x_2}{\partial t} + Y_2\frac{\partial y_2}{\partial t} + Z_2\frac{\partial z_2}{\partial t} \\ + X_3\frac{\partial x_3}{\partial t} + Y_3\frac{\partial y_3}{\partial t} = Z_3\frac{\partial z_3}{\partial t} \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{r} X\partial x + Y\partial y + Z\partial z \\ + X_1\partial x_1 + Y_1\partial y_1 + Z_1\partial z_1 \\ + X_2\partial x_2 + Y_2\partial y_2 + Z_2\partial z_2 \\ + X_3\partial x_3 + Y_3\partial y_3 + Z_3\partial z_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} = 0,$$

oder der Kürze wegen:

$$\Sigma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) = 0.$$

Durch einen beliebigen, durch die primitiven Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bestimmten Punkt wollen wir uns nun ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der $x'$, $y'$, $z'$ gelegt denken, und wollen die Coordinaten der Punkte

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots.$$

in Bezug auf dieses neue System respective durch

$$x',\ y',\ z';\quad x_1',\ y_1',\ z_1';\quad x_2',\ y_2',\ z_2';\quad x_3',\ y_3',\ z_3';\ldots.$$

bezeichnen. Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\cos(xx') = a_1,\quad \cos(xy') = b_1,\quad \cos(xz') = c_1;$$

$$\cos(yx') = a_2,\quad \cos(yy') = b_2,\quad \cos(yz') = c_2;$$

$$\cos(zx') = a_3,\quad \cos(zy') = b_3,\quad \cos(zz') = c_3;$$

so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$x = \mathfrak{x} + a_1 x' + b_1 y' + c_1 z',$$

$$y = \mathfrak{y} + a_2 x' + b_2 y' + c_2 z',$$

$$z = \mathfrak{z} + a_3 x' + b_3 y' + c_3 z'.$$

Lassen wir jetzt das neue Axensystem mit dem Systeme der Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$,.... in eine feste Verbindung treten, so erleiden durch keine Verrückung dieses letzteren Systems die Coordinaten

$$x',\ y',\ z';\quad x_1',\ y_1',\ z_1';\quad x_2',\ y_2',\ z_2';\quad x_3',\ y_3',\ z_3';\ldots.$$

eine Veränderung, indem offenbar bloss die Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und

$$a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_2,\ b_2,\ c_2;\quad a_3,\ b_3,\ c_3$$

geändert werden, woraus sich ergiebt, dass in den Gleichungen

$$x = \mathfrak{x} + a_1 x' + b_1 y' + c_1 z',$$
$$y = \mathfrak{y} + a_2 x' + b_2 y' + c_2 z',$$
$$z = \mathfrak{z} + a_3 x' + b_3 y' + c_3 z';$$

wenn man dieselben differentiirt, die Grössen $x'$, $y'$, $z'$ als constant, alle übrigen Grössen dagegen als variabel zu betrachten sind; und führt man also jetzt diese Differentiation aus, so erhält man:

$$\partial x = \partial \mathfrak{x} + x' \partial a_1 + y' \partial b_1 + z' \partial c_1,$$
$$\partial y = \partial \mathfrak{y} + x' \partial a_2 + y' \partial b_2 + z' \partial c_2,$$
$$\partial z = \partial \mathfrak{z} + x' \partial a_3 + y' \partial b_3 + z' \partial c_3.$$

Zwischen den neun Grössen

$$a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_2,\ b_2,\ c_2;\quad a_3,\ b_3,\ c_3$$

finden nach den Lehren der analytischen Geometrie die folgenden sechs Gleichungen Statt:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1,$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

und

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,$$
$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0,$$
$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0.$$

Multiplicirt man also die Gleichungen

$$x = \mathfrak{x} + a_1 x' + b_1 y' + c_1 z',$$
$$y = \mathfrak{y} + a_2 x' + b_2 y' + c_2 z',$$
$$z = \mathfrak{z} + a_3 x' + b_3 y' + c_3 z'$$

nach der Reihe zuerst mit $a_1$, $a_2$, $a_3$, dann mit $b_1$, $b_2$, $b_3$, dann auch mit $c_1$, $c_2$, $c_3$, und addirt sie in jedem einzelnen Falle hierauf zu einander, so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

$$x' = a_1(x - \mathfrak{x}) + a_2(y - \mathfrak{y}) + a_3(z - \mathfrak{z}),$$
$$y' = b_1(x - \mathfrak{x}) + b_2(y - \mathfrak{y}) + b_3(z - \mathfrak{z}),$$
$$z' = c_1(x - \mathfrak{x}) + c_2(y - \mathfrak{y}) + c_3(z - \mathfrak{z});$$

und führt man diese Ausdrücke von $x'$, $y'$, $z'$ in die obigen Ausdrücke von $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ ein, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\partial x = \partial\mathfrak{x} &+ (x-\mathfrak{x})(a_1\partial a_1 + b_1\partial b_1 + c_1\partial c_1)\\ &+ (y-\mathfrak{y})(a_2\partial a_1 + b_2\partial b_1 + c_2\partial c_1)\\ &+ (z-\mathfrak{z})(a_3\partial a_1 + b_3\partial b_1 + c_3\partial c_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial y = \partial\mathfrak{y} &+ (x-\mathfrak{x})(a_1\partial a_2 + b_1\partial b_2 + c_1\partial c_2)\\ &+ (y-\mathfrak{y})(a_2\partial a_2 + b_2\partial b_2 + c_2\partial c_2)\\ &+ (z-\mathfrak{z})(a_3\partial a_2 + b_3\partial b_2 + c_3\partial c_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial z = \partial\mathfrak{z} &+ (x-\mathfrak{x})(a_1\partial a_3 + b_1\partial b_3 + c_1\partial c_3)\\ &+ (y-\mathfrak{y})(a_2\partial a_3 + b_2\partial b_3 + c_2\partial c_3)\\ &+ (z-\mathfrak{z})(a_3\partial a_3 + b_3\partial b_3 + c_3\partial c_3).\end{aligned}$$

Nun ist aber nach den Lehren der analytischen Geometrie auch:

$$\begin{aligned}a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 &= 1,\\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2 &= 1,\\ a_3{}^2 + b_3{}^2 + c_3{}^2 &= 1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0,\\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 &= 0,\\ a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= 0;\end{aligned}$$

folglich, wenn man differentiirt, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned}a_1\partial a_1 + b_1\partial b_1 + c_1\partial c_1 &= 0,\\ a_2\partial a_2 + b_2\partial b_2 + c_2\partial c_2 &= 0,\\ a_3\partial a_3 + b_3\partial b_3 + c_3\partial c_3 &= 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}a_2\partial a_1 + b_2\partial b_1 + c_2\partial c_1 &= -(a_1\partial a_2 + b_1\partial b_2 + c_1\partial c_2),\\ a_1\partial a_3 + b_1\partial b_3 + c_1\partial c_3 &= -(a_3\partial a_1 + b_3\partial b_1 + c_3\partial c_1),\\ a_3\partial a_2 + b_3\partial b_2 + c_3\partial c_2 &= -(a_2\partial a_3 + b_2\partial b_3 + c_2\partial c_3);\end{aligned}$$

also nach dem Obigen:

$$\partial x = \partial \mathfrak{x} + (z-\mathfrak{z})(a_3\partial a_1 + b_3\partial b_1 + c_3\partial c_1)$$
$$-(y-\mathfrak{y})(a_1\partial a_2 + b_1\partial b_2 + c_1\partial c_2),$$

$$\partial y = \partial \mathfrak{y} + (x-\mathfrak{x})(a_1\partial a_2 + b_1\partial b_2 + c_1\partial c_2)$$
$$-(z-\mathfrak{z})(a_2\partial a_3 + b_2\partial b_3 + c_2\partial c_3),$$

$$\partial z = \partial \mathfrak{z} + (y-\mathfrak{y})(a_2\partial a_3 + b_2\partial b_3 + c_2\partial c_3)$$
$$-(x-\mathfrak{x})(a_3\partial a_1 + b_3\partial b_1 + c_3\partial c_1);$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\partial\mu = a_1\partial a_2 + b_1\partial b_2 + c_1\partial c_2,$$
$$\partial\lambda = a_3\partial a_1 + b_3\partial b_1 + c_3\partial c_1,$$
$$\partial\varkappa = a_2\partial a_3 + b_2\partial b_3 + c_2\partial c_3$$

gesetzt wird:

$$\partial x = \partial\mathfrak{x} + (z-\mathfrak{z})\,\partial\lambda - (y-\mathfrak{y})\,\partial\mu,$$
$$\partial y = \partial\mathfrak{y} + (x-\mathfrak{x})\,\partial\mu - (z-\mathfrak{z})\,\partial\varkappa,$$
$$\partial z = \partial\mathfrak{z} + (y-\mathfrak{y})\,\partial\varkappa - (x-\mathfrak{x})\,\partial\lambda.$$

Weil nun auf diese Weise überhaupt

$$\partial x_n = \partial\mathfrak{x} + (z_n-\mathfrak{z})\partial\lambda - (y_n-\mathfrak{y})\partial\mu,$$
$$\partial y_n = \partial\mathfrak{y} + (x_n-\mathfrak{x})\partial\mu - (z_n-\mathfrak{z})\partial\varkappa,$$
$$\partial z_n = \partial\mathfrak{z} + (y_n-\mathfrak{y})\partial\varkappa - (x_n-\mathfrak{x})\partial\lambda$$

ist, so wird die Bedingungsgleichung

$$\Sigma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) = 0$$

des Zustandes der Ruhe des Systems der Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$,...., wenn in dieselbe die vorstehenden Ausdrücke von $\partial x_n$, $\partial y_n$, $\partial z_n$ eingeführt werden:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X.\partial\mathfrak{x} + \Sigma Y.\partial\mathfrak{y} + \Sigma Z.\partial\mathfrak{z} \\ + \Sigma(xY-yX).\partial\mu + \Sigma(yZ-zY).\partial\varkappa + \Sigma(zX-xZ).\partial\lambda \\ + \Sigma(\mathfrak{y}\partial\mu - \mathfrak{z}\partial\lambda)\Sigma X + (\mathfrak{z}\partial\varkappa - \mathfrak{x}\partial\mu)\Sigma Y + (\mathfrak{x}\partial\lambda - \mathfrak{y}\partial\varkappa)\Sigma Z \end{array}\right\} = 0.$$

Multiplicirt man die drei Gleichungen

$$a_1\partial a_1 + b_1\partial b_1 + c_1\partial c_1 = 0,$$

$$a_2\partial a_1 + b_2\partial b_1 + c_2\partial c_1 = -\partial\mu,$$

$$a_3\partial a_1 + b_3\partial b_1 + c_3\partial c_1 = \partial\lambda$$

zuerst mit $a_1$, $a_2$, $a_3$; dann mit $b_1$, $b_2$, $b_3$; dann mit $c_1$, $c_2$, $c_3$; und addirt sie in jedem einzelnen Falle zu einander, so erhält man:

$$\partial a_1 = a_3\partial\lambda - a_2\partial\mu,$$

$$\partial b_1 = b_3\partial\lambda - b_2\partial\mu,$$

$$\partial c_1 = c_3\partial\lambda - c_2\partial\mu.$$

Aus den Gleichungen

$$a_1\partial a_2 + b_1\partial b_2 + c_1\partial c_2 = \partial\mu,$$

$$a_2\partial a_2 + b_2\partial b_2 + c_2\partial c_2 = 0,$$

$$a_3\partial a_2 + b\partial_3 b_2 + c_3\partial c_2 = -\partial\varkappa$$

ergiebt sich auf ganz gleiche Weise:

$$\partial a_2 = a_1\partial\mu - a_3\partial\varkappa,$$

$$\partial b_2 = b_1\partial\mu - b_3\partial\varkappa,$$

$$\partial c_2 = c_1\partial\mu - c_3\partial\varkappa;$$

und aus den Gleichungen

$$a_1\partial a_3 + b_1\partial b_3 + c_1\partial c_3 = -\partial\lambda,$$

$$a_2\partial a_3 + b_2\partial b_3 + c_2\partial c_3 = \partial\varkappa,$$

$$a_3\partial a_3 + b_3\partial b_3 + c_3\partial c_3 = 0$$

erhält man eben so:

$$\partial a_3 = a_2\partial\varkappa - a_1\partial\lambda,$$

$$\partial b_3 = b_2\partial\varkappa - b_1\partial\lambda,$$

$$\partial c_3 = c_2\partial\varkappa - c_1\partial\lambda.$$

Hieraus sieht man, dass die Grössen

$$\partial a_1,\ \partial b_1,\ \partial c_1;\quad \partial a_2,\ \partial b_2,\ \partial c_2;\quad \partial a_3,\ \partial b_3,\ \partial c_3$$

sich durch die Grössen $\partial\varkappa$, $\partial\lambda$, $\partial\mu$ ausdrücken lassen.

Ist nun zuerst das System der Punkte

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots.$$

ein völlig freies System, so können offenbar sowohl die Grössen

$$\partial\mathfrak{x},\ \partial\mathfrak{y},\ \partial\mathfrak{z}$$

als auch diejenigen unter den neun Grössen

$$\partial a_1,\ \partial b_1,\ \partial c_1;\quad \partial a_2,\ \partial b_2,\ \partial c_2;\quad \partial a_3,\ \partial b_3,\ \partial c_3;$$

von denen die übrigen abhängen, willkührlich angenommen werden. Nach dem Obigen bestehen aber zwischen diesen neun Grössen sechs Gleichungen, weshalb drei derselben willkührlich angenommen werden können. Weil nun aber diese neun Grössen durch $\partial\varkappa$, $\partial\lambda$, $\partial\mu$ ausgedrückt werden können, so lassen sich

$$\partial\varkappa,\ \partial\lambda,\ \partial\mu$$

willkührlich annehmen. Hieraus und aus dem Obigen ergiebt sich, dass die sechs Grössen

$$\partial\mathfrak{x},\ \partial\mathfrak{y},\ \partial\mathfrak{z};\quad \partial\varkappa,\ \partial\lambda,\ \partial\mu$$

willkührlich angenommen werden können.

Bringt man nun die oben gefundene Bedingungsgleichung des Zustandes der Ruhe des Systems der Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$,.... oder, was hier Dasselbe ist, des Gleichgewichts*) der Kräfte $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$,...., auf die folgende Form:.

---

*) Insofern man von Kräften sagt, dass sie unter einander im Gleichgewichte seien, wenn ihre Wirkungen sich gegenseitig völlig aufheben, so dass sie also eigentlich gar keine Wirkung hervorbringen, kann man z. B. von zwei gleichen, an einem gleicharmigen Hebel der ersten Art nach parallelen Richtungen und nach derselben Seite hin wirkenden Kräften im eigentlichen Sinne nicht sagen, dass dieselben im Gleichgewichte seien, wie wohl öfters geschieht. Denn die Wirkungen dieser Kräfte heben sich keineswegs gegenseitig völlig auf; vielmehr bringen dieselben noch eine sehr merkliche Wirkung hervor, nämlich den Druck auf den Drehpunkt oder Ruhepunkt des Hebels. Man kann also in diesem Falle nur sagen, dass der Hebel, d. h. das System, an welchem die beiden Kräfte wirken, sich in Ruhe befinde. Ich bemerke dies hier, damit im Folgenden nirgends zu einem Missverständnisse der von mir gebrauchten Ausdrücke Veranlassung gegeben werden könne. Im Falle eines ganz freien Systems wie oben fällt natürlich die Ruhe des Systems mit dem Gleichgewichte der an demselben wirkenden Kräfte ganz zusammen.

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma X.\partial\mathfrak{x}+\Sigma Y.\partial\mathfrak{y}+\Sigma Z.\partial\mathfrak{z}\\&+\{\Sigma(xY-yX)-(\mathfrak{x}\Sigma Y-\mathfrak{y}\Sigma X)\}\partial\mu\\&+\{\Sigma(yZ-zY)-(\mathfrak{y}\Sigma Z-\mathfrak{z}\Sigma Y)\}\partial\varkappa\\&+\{\Sigma(zX-xZ)-(\mathfrak{z}\Sigma X-\mathfrak{x}\Sigma Z)\}\partial\lambda\end{aligned}\right\}=0,$$

so ergeben sich aus dieser Gleichung, weil in derselben $\partial\mathfrak{x}$, $\partial\mathfrak{y}$, $\partial\mathfrak{z}$; $\partial\varkappa$, $\partial\lambda$, $\partial\mu$ willkührlich angenommen werden können, d. h. weil dieselbe unabhängig von bestimmten Werthen dieser sechs Grössen besteht, unmittelbar die sechs folgenden für sich bestehenden Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines völlig freien Systems:

$$\Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0;$$

$$\Sigma(xY-yX)-(\mathfrak{x}\Sigma Y-\mathfrak{y}\Sigma X)=0,$$

$$\Sigma(yZ-zY)-(\mathfrak{y}\Sigma Z-\mathfrak{z}\Sigma Y)=0,$$

$$\Sigma(zX-xZ)-(\mathfrak{z}\Sigma X-\mathfrak{x}\Sigma Z)=0;$$

welche aber vermöge der drei ersten Gleichungen in die sechs Gleichungen:

$$\Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0;$$

$$\Sigma(xY-yX)=0,\quad \Sigma(yZ-zY)=0,\quad \Sigma(zX-xZ)=0;$$

also nach dem Obigen in die sechs Gleichungen:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P\cos\gamma=0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$

$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$

$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0$$

übergehen.

Enthält ferner das System der Punkte

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots.$$

einen festen Punkt, um den es sich drehen lässt, so nehme man diesen festen Punkt, was offenbar verstattet ist, als Anfang der $(xyz)$ und zugleich als den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ an. Dann ist

$$\mathfrak{x}=0,\ \mathfrak{y}=0,\ \mathfrak{z}=0,\quad \partial\mathfrak{x}=0,\ \partial\mathfrak{y}=0,\ \partial\mathfrak{z}=0$$

und daher die obige allgemeine Bedingungsgleichung der Ruhe des Systems der Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$,....:

$$\Sigma(xY-yX).\partial\mu+\Sigma(yZ-zY).\partial\varkappa+\Sigma(zX-xZ).\partial\lambda=0,$$

welche Gleichung, da sie für alle Werthe von $\partial\varkappa$, $\partial\lambda$, $\partial\mu$ oder unabhängig von bestimmten Werthen dieser Grössen gilt, unmittelbar zu den drei folgenden, für sich bestehenden Bedingungsgleichungen der Ruhe unsers Systems führt:

$$\Sigma(xY-yX)=0,\ \Sigma(yZ-zY)=0,\ \Sigma(zX-xZ)=0;$$

oder nach dem Obigen:

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$

$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$

$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0;$$

bei denen man wohl zu beachten hat, dass der feste Punkt des Systems, um den sich dasselbe drehen lässt, als Anfang der Coordinaten angenommen worden ist.

Wenn endlich das System der Punkte

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots.$$

eine feste gerade Linie enthält, um die es sich wie um eine Axe drehen lässt, so nehme man diese gerade Linie als Axe der $z'$ an, und hat dann, weil jeder Punkt dieser Linie, also auch der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, unbeweglich ist, offenbar

$$\partial\mathfrak{x}=0,\ \partial\mathfrak{y}=0,\ \partial\mathfrak{z}=0;$$

und ausserdem

$$\partial c_1=0,\ \partial c_2=0,\ \partial c_3=0.$$

Weil aber nach dem Obigen

$$\partial c_1=c_3\partial\lambda-c_2\partial\mu,$$

$$\partial c_2=c_1\partial\mu-c_3\partial\varkappa,$$

$$\partial c_3=c_2\partial\varkappa-c_1\partial\lambda$$

ist, so haben wir die drei Gleichungen

$$c_3\partial\lambda-c_2\partial\mu=0,\ c_1\partial\mu-c_3\partial\varkappa=0,\ c_2\partial\varkappa-c_1\partial\lambda=0;$$

von denen jedoch, wie auf der Stelle erhellet, eine jede eine unmittelbare Folge aus den beiden andern ist. Also existiren zwischen den drei Grössen $\partial\varkappa$, $\partial\lambda$, $\partial\mu$ zwei Gleichungen, und es bleibt daher immer nur eine dieser drei Grössen der willkührlichen An-

nahme anheim gestellt. Nehmen wir nun ferner die feste Drehungsaxe auch als Axe der $z$ an, so ist offenbar $(xz')=90^0$, $(yz')=90^0$, also $c_1=0$, $c_2=0$. Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\partial\varkappa=\frac{c_1}{c_3}\partial\mu,\quad \partial\lambda=\frac{c_2}{c_3}\partial\mu;$$

also $\partial\varkappa=0$, $\partial\lambda=0$, da $c_3=\cos(zz')=1$ ist. Endlich ist unter den gemachten Voraussetzungen auch $\mathfrak{x}=0$, $\mathfrak{y}=0$; und nehmen wir nun alles Dieses zusammen, so wird die obige allgemeine Bedingungsgleichung des Zustandes der Ruhe des Systems der Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$,....:

$$\Sigma(xY-yX).\partial\mu=0,$$

woraus, weil $\partial\mu$ willkührlich ist, die Bedingungsgleichung

$$\Sigma(xY-yX)=0$$

oder

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0$$

folgt, bei der man aber zu beachten hat, dass die $z$-Axe des Coordinatensystems in die feste Axe des Systems gelegt worden ist.

Wenn die Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ldots.$$

sämmtlich nach parallelen Richtungen wirken, und die nach der einen Seite hin wirkenden Kräfte als positiv, die nach der andern Seite hin wirkenden Kräfte als negativ betrachtet werden, so wollen wir annehmen, dass

$$P,\ P_2,\ P_4,\ P_6,\ldots.$$

die positiven, dagegen

$$P_1,\ P_3,\ P_5,\ P_7,\ldots.$$

die negativen Kräfte seien.

Ist nun das System der Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$,.... ein völlig freies System, so sind nach dem Obigen die Bedingungen des Zustandes der Ruhe dieses Systems, oder des Gleichgewichts der Kräfte $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$,...., offenbar:

$$\left.\begin{array}{l} P\cos\alpha + P_2\cos\alpha_2 + P_4\cos\alpha_4 + P_6\cos\alpha_6 + \ldots \\ -P_1\cos\alpha_1 - P_3\cos\alpha_3 - P_5\cos\alpha_5 - P_7\cos\alpha_7 - \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P\cos\beta + P_2\cos\beta_2 + P_4\cos\beta_4 + P_6\cos\beta_6 + \ldots \\ -P_1\cos\beta_1 - P_3\cos\beta_3 - P_5\cos\beta_5 - P_7\cos\beta_7 - \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P\cos\gamma + P_2\cos\gamma_2 + P_4\cos\gamma_4 + P_6\cos\gamma_6 + \ldots \\ -P_1\cos\gamma_1 - P_3\cos\gamma_3 - P_5\cos\gamma_5 - P_7\cos\gamma_7 - \ldots \end{array}\right\} = 0$$

und

$$\left.\begin{array}{l} P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P_2(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \\ \qquad + P_4(x_4\cos\beta_4 - y_4\cos\alpha_4) + \ldots \\ - P_1(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) - P_3(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3) \\ \qquad - P_5(x_5\cos\beta_5 - y_5\cos\alpha_5) - \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P_2(y_2\cos\gamma_2 - z_2\cos\beta_2) \\ \qquad + P_4(y_4\cos\gamma_4 - z_4\cos\beta_4) + \ldots \\ - P_1(y_1\cos\gamma_1 - z_1\cos\beta_1) - P_3(y_3\cos\gamma_3 - z_3\cos\beta_3) \\ \qquad - P_5(y_5\cos\gamma_5 - z_5\cos\beta_5) - \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P_2(z_2\cos\alpha_2 - x_2\cos\gamma_2) \\ \qquad + P_4(z_4\cos\alpha_4 - x_4\cos\gamma_4) + \ldots \\ - P_1(z_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\gamma_1) - P_3(z_3\cos\alpha_3 - x_3\cos\gamma_3) \\ \qquad - P_5(z_5\cos\alpha_5 - x_5\cos\gamma_5) - \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Weil aber wegen der Parallellität der Richtungen der sämmtlichen gegebenen Kräfte offenbar

$$\cos\alpha = \cos\alpha_2 = \cos\alpha_4 = \ldots = -\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_3 = -\cos\alpha_5 = \ldots,$$

$$\cos\beta = \cos\beta_2 = \cos\beta_4 = \ldots = -\cos\beta_1 = -\cos\beta_3 = -\cos\beta_5 = \ldots,$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_2 = \cos\gamma_4 = \ldots = -\cos\gamma_1 = -\cos\gamma_3 = -\cos\gamma_5 = \ldots$$

ist, so werden diese Gleichungen:

$$\cos\alpha\Sigma P=0,\quad \cos\beta\Sigma P=0,\quad \cos\gamma\Sigma P=0;$$

$$\cos\beta\Sigma Px-\cos\alpha\Sigma Py=0,$$

$$\cos\gamma\Sigma Py-\cos\beta\Sigma Pz=0,$$

$$\cos\alpha\Sigma Pz-\cos\gamma\Sigma Px=0$$

oder

$$\Sigma P=0,$$

$$\cos\beta\Sigma Px-\cos\alpha\Sigma Py=0,$$

$$\cos\gamma\Sigma Py-\cos\beta\Sigma Pz=0,$$

$$\cos\alpha\Sigma Pz-\cos\gamma\Sigma Px=0.$$

Jede der drei letzten Gleichungen ist aber eine Folge aus den beiden andern; also sind die Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma P=0,$$

$$\cos\gamma\Sigma Py-\cos\beta\Sigma Pz=0,$$

$$\cos\alpha\Sigma Pz-\cos\gamma\Sigma Px=0.$$

Nehmen wir nun die Ebene der $xy$ auf den Richtungen der gegebenen Kräfte senkrecht an, so ist

$$\cos\alpha=0,\quad \cos\beta=0,\quad \cos\gamma=\pm 1;$$

und unter diesen Voraussetzungen werden also die Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma P=0,\quad \Sigma Px=0,\quad \Sigma Py=0.$$

Ist das System um einen festen Punkt drehbar, so ergeben sich aus dem Obigen, auf ganz ähnliche Art wie vorher, wenn der feste Punkt als Anfang der Coordinaten und die Ebene der $xy$ auf den parallelen Richtungen der Kräfte senkrecht angenommen wird, für den Zustand der Ruhe des Systems die Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma Px=0,\quad \Sigma Py=0.$$

Ist das System um eine feste gerade Linie drehbar, so ergiebt sich aus dem Obigen leicht, dass der Zustand der Ruhe des Systems, wenn man die in Rede stehende feste gerade Linie als Axe der $z$ annimmt, durch die eine Gleichung

$$\cos\beta\Sigma Px-\cos\alpha\Sigma Py=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\Sigma Px}{\Sigma Py}$$

bedingt wird.

Liegen die Richtungen der Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ldots.$$

sämmtlich in einer völlig freien Ebene, so nehme man diese Ebene als Ebene der $xy$ an. Dann ist

$$z=z_1=z_2=z_3=\ldots.=0,$$

$$\cos\gamma=\cos\gamma_1=\cos\gamma_2=\cos\gamma_3=\ldots.=0;$$

und die Bedingungsgleichungen für den Zustand der Ruhe des Systems der Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$,...., oder, was hier Dasselbe ist, des Gleichgewichts der Kräfte $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$,...., sind also nach dem Obigen:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0.$$

Ist die Ebene, in welcher die Richtungen der sämmtlichen Kräfte wirken, um einen festen Punkt drehbar, so nehme man, indem die Ebene selbst wieder als Ebene der $xy$ angenommen wird, diesen festen Punkt als Anfang der Coordinaten an, unter welchen Voraussetzungen dann der Zustand der Ruhe des Systems nach dem Obigen durch die eine Gleichung

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0$$

vollständig bedingt wird.

Sind die Richtungen der in der völlig freien Ebene der $xy$ wirkenden Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ldots.$$

sämmtlich einander parallel, und man betrachtet jetzt alle die nach der einen Seite hin wirkenden Kräfte als positiv, alle die nach der anderen Seite hin wirkenden Kräfte als negativ; so nehme man die Axe der $x$ auf den sämmtlichen Richtungen der Kräfte senkrecht an. Dann ist

$$\cos\alpha=\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=\cos\alpha_3=\ldots.=0,$$

und die Cosinus der Winkel $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$,.... sind, wenn man nur den positiven Theil der Axe der $y$ im Sinne der Richtungen der positiven Kräfte nimmt, der positiven oder negativen Einheit gleich, jenachdem die entsprechenden Kräfte positiv oder negativ sind. Dies vorausgesetzt, erhält man aus dem Obigen unmittelbar die folgenden Bedingungsgleichungen für den Zustand der Ruhe des Gleichgewichts der Kräfte $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$,....:

$$\Sigma P=0, \quad \Sigma Px=0.$$

Ist die Ebene der $xy$, in welcher die Kräfte $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$, deren Richtungen einander sämmtlich parallel sind, wirken, um einen festen Punkt drehbar, so nehme man diesen Punkt als Anfang der Coordinaten an, und lege die Axe der $x$ wieder senkrecht auf die parallelen Richtungen der Kräfte. Dann wird nach dem Obigen der Zustand der Ruhe des Systems durch die eine Gleichung

$$\Sigma Px=0$$

vollständig bedingt, wobei natürlich wieder die nach der einen Seite hin wirkenden Kräfte als positiv, die nach der anderen Seite hin wirkenden Kräfte als negativ betrachtet worden sind.

## III.

## Die allgemeinen Bedingungsgleichungen der Bewegung.

### §. 5.

Wir denken uns ein System materieller Punkte*), und wollen deren Massen, so wie der Kürze wegen auch diese Punkte selbst, durch

$$m, m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$$

bezeichnen.

Setzen wir nun, dass auf alle diese Punkte Kräfte wirken, welche denselben, wenn sie nicht zu einem Systeme verbunden wären, durch momentane Wirkungen nach gewissen bestimmten Richtungen hin respective die Geschwindigkeiten

$$u, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$$

ertheilen würden; so werden diese Punkte, wegen ihrer Verbindung unter einander, sich nicht mit diesen Geschwindigkeiten nach den entsprechenden Richtungen, sondern nach gewissen anderen Richtun-

*) Die Erläuterung verschiedener allgemeiner Begriffe, die hier und im Folgenden vorkommen, welche in einem Systeme der ganzen Wissenschaft nicht fehlen darf, übergehen wir der Kürze wegen in dieser Abhandlung. Namentlich muss hier auch die Lehre vom Schwerpunkte vorausgehen, die ja bekanntlich ganz auf Principien der Statik beruhet.

gen, mit gewissen anderen Geschwindigkeiten, die wir durch

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ldots.$$

bezeichnen wollen, bewegen. Denken wir uns jetzt die Kräfte, welche nach ihren Richtungen, wenn man sich die in Rede stehenden Punkte nicht unter einander verbunden denkt, die Geschwindigkeiten

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ldots.$$

hervorbringen, aus den Kräften, welche nach ihren Richtungen die Geschwindigkeiten

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ldots.$$

hervorbringen, und gewissen anderen Kräften, die nach gewissen Richtungen die Geschwindigkeiten

$$w,\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ldots.$$

hervorbringen, zusammengesetzt; so können wir statt des ersten Systems von Kräften die beiden anderen Systeme setzen. Da es sich hier nur um eine momentane Wirkung der Kräfte handelt, so sind bekanntlich

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ldots.;$$

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ldots.;$$

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4,\ldots.$$

die Maasse der auf die einzelnen Punkte in den drei Systemen von Kräften wirkenden Kräfte, oder die sogenannten Quantitäten der Bewegung; und es bringen also unter allen Bedingungen, man mag sich die Punkte des Systems als frei oder unter einander verbunden denken, die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ldots.;$$
$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4,\ldots.$$

ganz dieselbe Wirkung hervor wie die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ldots.$$

Denkt man sich aber die Punkte unter einander verbunden, so bringen die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ldots.$$

ganz dieselbe Wirkung hervor wie die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ldots.$$

Also bringen, wenn man sich die Punkte als unter einander verbunden denkt, die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ldots;$$

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4,\ldots$$

ganz dieselbe Wirkung hervor wie die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ldots;$$

woraus sich ergiebt, dass, wenn man sich die Kräfte

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4,\ldots$$

allein an den zu einem Systeme unter einander verbundenen Punkten wirkend denkt, das System in Ruhe bleiben wird.

Hieraus ergiebt sich aber ferner auf der Stelle ganz von selbst, dass das System auch dann in Ruhe bleiben wird, sowohl wenn man sich an den Punkten desselben nach ihren ursprünglichen Richtungen die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ldots$$

und nach ihren ursprünglichen Richtungen entgegengesetzten Richtungen hin die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ldots;$$

als auch wenn man sich an den Punkten des Systems nach ihren ursprünglichen Richtungen entgegensetzten Richtungen hin die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ldots$$

und nach ihren ursprünglichen Richtungen die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ldots$$

wirkend denkt.

Die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ldots$$

pflegt man die ursprünglich mitgetheilten Quantitäten der Bewegung zu nennen; dagegen nennt man die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ldots$$

die wirklich Statt findenden Quantitäten der Bewegung; endlich heissen die Kräfte

$$mw, \quad m_1 w_1, \quad m_2 w_2, \quad m_3 w_3, \quad m_4 w_4, \ldots.$$

die gewonnenen oder verlorenen Quantitäten der Bewegung.

Unter Anwendung dieser Benennungen lassen sich nun die oben gefundenen Sätze auf folgenden Ausdruck bringen:

1. Wenn man sich an zu einem Systeme mit einander verbundenen materiellen Punkten, welche von beliebigen momentan wirkenden Kräften sollicitirt werden, bloss die gewonnenen oder verlorenen Quantitäten der Bewegung wirkend denkt, so bleibt das System in Ruhe.

2. Wenn man sich an zu einem Systeme mit einander verbundenen materiellen Punkten, welche von beliebigen momentan wirkenden Kräften sollicitirt werden, nach ihren ursprünglichen Richtungen die ursprünglich mitgetheilten Quantitäten der Bewegung und nach ihren ursprünglichen Richtungen entgegengesetzten Richtungen hin die wirklich Statt findenden Quantitäten wirkend denkt, so bleibt das System in Ruhe.

3. Wenn man sich an zu einem System mit einander verbundenen materiellen Punkten, welche von beliebigen momentan wirkenden Kräften sollicitirt werden, nach ihren ursprünglichen Richtungen entgegengesetzten Richtungen hin die ursprünglich mitgetheilten Quantitäten der Bewegung und nach ihren ursprünglichen Richtungen die wirklich Statt findenden Quantitäten der Bewegung wirkend denkt, so bleibt das System in Ruhe.

Das in diesen drei Sätzen ausgesprochene Princip heisst nach seinem Erfinder das D'Alembert'sche Princip.

§. 6.

Die einzelnen Punkte des im Vorhergehenden betrachteten Systems bezeichnen wir, wie schon in §. 5. bemerkt worden ist, der Kürze wegen durch die entsprechenden Massen selbst, also durch

$$m, \quad m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad m_4, \ldots.,$$

und wollen nun annehmen, dass am Ende einer gewissen Zeit $t$

die Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges Coordinatensystem respective

$$x, y, z; \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3; \ldots$$

seien, indem wir alle diese Coordinaten als Functionen der Zeit $t$ betrachten.

Von allen Punkten des Systems wollen wir als Repräsentanten der übrigen nur einen, etwa den Punkt $m$, in's Auge fassen, bemerken aber sogleich, dass die ganze folgende Betrachtung völlig in derselben Weise auf jeden anderen Punkt des Systems anwendbar sein wird. Am Ende der Zeit $t$, wo bekanntlich $x, y, z$ die Coordinaten des Punktes $m$ sind, sei $v$ die in Folge der Bewegung des Systems wirklich Statt findende Geschwindigkeit des Punktes $m$, und $s$ sei der Weg, welchen dieser Punkt bei der Bewegung des Systems in der Zeit $t$ zurückgelegt hat. Lässt man die Zeit $t$ um $\Delta t$ wachsen, so wird $s$ um $\Delta s$ wachsen, und da man die Geschwindigkeit des Punktes $m$ in dem Zeitintervalle $\Delta t$ mit desto grösserer Genauigkeit als constant oder seine Bewegung in dem Zeitintervalle $\Delta t$ mit desto grösserer Genauigkeit als gleichförmig betrachten kann, je kleiner $\Delta t$ ist, so ist mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner $\Delta t$ ist:

$$\Delta s = v\Delta t \text{ oder } v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Also ist offenbar die Geschwindigkeit $v$ selbst in aller Schärfe die Gränze, welcher der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sich nähert, wenn $\Delta t$ sich der Null nähert, d. h. nach den Begriffen der Differentialrechnung, es ist mit völliger Genauigkeit

$$v = \frac{\partial s}{\partial t},$$

wobei man nicht aus den Augen zu lassen hat, dass die vorhergehende ganz allgemeine Betrachtung durchaus keine besondere Beschaffenheit des Weges $s$ voraussetzt, und dass also die obige Differentialgleichung gilt, wie auch der Weg $s$ beschaffen sein mag; dieselbe gilt folglich ganz allgemein, der Weg $s$ mag eine gerade Linie oder eine beliebige Curve von einfacher oder doppelter Krümmung sein.

Bezeichnen wir ferner die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit $v$ mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(xyz)$ gelegter, den primitiven Coordinatenaxen paralleler Axen einschliesst, durch $\varphi$, $\psi$, $\chi$; so

sind die parallel mit den drei primitiven Axen der $x$, $y$, $z$ genommenen Composanten der Geschwindigkeit $v$ mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen:

$$v\cos\varphi,\quad v\cos\psi,\quad v\cos\chi;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden:

$$\cos\varphi.\frac{\partial s}{\partial t},\quad \cos\psi.\frac{\partial s}{\partial t},\quad \cos\chi.\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Nun ist aber offenbar mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner $\Delta s$ ist, d. i. mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner $\Delta t$ ist:

$$\Delta x=\cos\varphi.\Delta s,\quad \Delta y=\cos\psi.\Delta s,\quad \Delta z=\cos\chi.\Delta s;$$

also mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner $\Delta s$ oder $\Delta t$ ist:

$$\cos\varphi=\frac{\Delta x}{\Delta s},\quad \cos\psi=\frac{\Delta y}{\Delta s},\quad \cos\chi=\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Daher sind offenbar in völliger Schärfe

$$\cos\varphi,\quad \cos\psi,\quad \cos\chi$$

die Gränzen, denen respective die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta x}{\Delta s},\quad \frac{\Delta y}{\Delta s},\quad \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

sich nähern, wenn $\Delta s$ oder, was Dasselbe ist, wenn $\Delta t$ sich der Null nähert, und nach den Begriffen der Differentialrechnung ist folglich mit völliger Genauigkeit:

$$\cos\varphi=\frac{\partial x}{\partial s},\quad \cos\psi=\frac{\partial y}{\partial s},\quad \cos\chi=\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Also sind nach dem Obigen

$$\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial t};$$

d. i. nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung

$$\frac{\partial x}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial t}$$

die parallel mit den drei Axen der $x$, $y$, $z$ genommenen Composanten der Geschwindigkeit $v$, mit gehöriger Rücksicht auf die diesen Composanten zukommenden Vorzeichen.

Folglich sind am Ende der Zeit $t+\Delta t$, welcher die Geschwindigkeit $v+\Delta v$ des Punktes $m$ entspricht, die parallel mit den

Axen der $x$, $y$, $z$ genommenen Composanten dieser Geschwindigkeit, immer mit gehöriger Rücksicht auf die diesen Composanten zukommenden Vorzeichen:

$$\frac{\partial x}{\partial t}+\Delta\frac{\partial x}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial t}+\Delta\frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial t}+\Delta\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Wenn jetzt überhaupt $P$ eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft bezeichnet, welche, auf die Masse $M$ wirkend, in der Zeit $T$ die Geschwindigkeit $V$ hervorbringt, so sei $p$ eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Masse 1 wirkend, in der Zeit 1 die Geschwindigkeit 1 hervorbringt. Um nun die Kräfte $P$ und $p$ mit einander zu vergleichen, bezeichne $P_1$ eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Masse $M$ wirkend, in der Zeit $T$ die Geschwindigkeit 1 hervorbringt, und $P_2$ bezeichne eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Masse 1 wirkend, in der Zeit $T$ die Geschwindigkeit 1 hervorbringt. Dann hat man die folgende Zusammenstellung:

$$P,\ T,\ M,\ V;$$
$$P_1,\ T,\ M,\ 1;$$
$$P_2,\ T,\ 1,\ 1;$$
$$p,\ 1,\ 1,\ 1;$$

und es ist folglich, wie leicht erhellet:

$$P:P_1=V:1,$$
$$P_1:P_2=M:1,$$
$$P_2:p\ =\ 1:T;$$

also durch Zusammensetzung dieser Proportionen:

$$P:p=MV:T,$$

und hieraus:

$$PT=pMV,\quad \text{also}\quad V=\frac{PT}{pM}.$$

Setzt man aber $p=1$, d. h. nimmt man eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also con-

stante Kraft, d. h. überhaupt eine constante Zeitkraft *), welche, auf die Einheit der Massen wirkend, in der Zeiteinheit eine der Längeneinheit gleiche Geschwindigkeit hervorbringt, als Einheit der Kräfte oder als Krafteinheit an, so ist

$$V = \frac{PT}{M},$$

eine allgemeine Gleichung, von der wir sogleich weiteren Gebrauch machen werden.

Denken wir uns nämlich alle auf den materiellen Punkt $m$ am Ende der Zeit $t$ wirkende Kräfte auf drei den angenommenen Coordinatenaxen der $x$, $y$, $z$ parallele Kräfte $X'$, $Y'$, $Z'$ gebracht, was bekanntlich immer möglich ist, so sind, weil man diese Kräfte während des Zeitintervalls $\Delta t$ mit desto grösserer Genauigkeit als constant betrachten kann, je kleiner $\Delta t$ ist, nach dem Vorhergehenden

$$\frac{X'\Delta t}{m}, \quad \frac{Y'\Delta t}{m}, \quad \frac{Z'\Delta t}{m}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$X = \frac{X'}{m}, \quad Y = \frac{Y'}{m}, \quad Z = \frac{Z'}{m}$$

setzen,

$$X\Delta t, \quad Y\Delta t, \quad Z\Delta t$$

die von den auf den materiellen Punkt $m$ stetig wirkenden Kräften $X'$, $Y'$, $Z'$ in der Zeit $\Delta t$ hervorgebrachten Geschwindigkeiten, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner $\Delta t$ ist; und da nun der materielle Punkt $m$ am Ende der Zeit $t$ nach dem Obigen, parallel mit den Coordinatenaxen der $x$, $y$, $z$, schon die Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}$$

---

*) Zeitkräfte nenne ich alle stetig wirkenden Kräfte, welche im Allgemeinen als Functionen der Zeit betrachtet werden müssen, aber auch, wie oben angenommen worden ist, ihre Grösse an sich nicht ändern und insofern also constant sein können. Der Ausdruck Zeitkraft scheint mir weit zweckmässiger und bezeichnender zu sein, als der sonst wohl gewöhnliche Ausdruck „beschleunigende Kraft", welcher überdies leicht zu falschen Vorstellnngen Veranlassung geben kann.

als Anfangsgeschwindigkeiten hat, so sind, parallel mit den Coordinatenaxen der $x$, $y$, $z$, seine Geschwindigkeiten am Ende der Zeit $t+\Delta t$:

$$\frac{\partial x}{\partial t}+X\Delta t,\quad \frac{\partial y}{\partial t}+Y\Delta t,\quad \frac{\partial z}{\partial t}+Z\Delta t$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner $\Delta t$ ist, wobei, wie wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht, vom Ende der Zeit $t$ an, und also auch am Ende der Zeit $t+\Delta t$, der materielle Punkt $m$ offenbar als ein freier, nicht mehr mit den übrigen Punkten zu einem Systeme von Punkten verbundener Punkt betrachtet worden ist.

Nimmt man nun alles Bisherige zusammen, so ergiebt sich auf der Stelle ohne alle Zweideutigkeit, dass am Ende der Zeit $t+\Delta t$, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner $\Delta t$ ist, die den drei Coordinatenaxen der $x$, $y$, $z$ parallelen, mit den gehörigen Vorzeichen genommenen Composanten der gewonnenen oder verlorenen Quantitäten der Bewegung des Punktes $m$

$$m\left\{\frac{\partial x}{\partial t}+X\Delta t-\left(\frac{\partial x}{\partial t}+\Delta\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right\},$$

$$m\left\{\frac{\partial y}{\partial t}+Y\Delta t-\left(\frac{\partial y}{\partial t}+\Delta\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right\},$$

$$m\left\{\frac{\partial z}{\partial t}+Z\Delta t-\left(\frac{\partial z}{\partial t}+\Delta\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right\};$$

d. i.

$$m(X\Delta t-\Delta\frac{\partial x}{\partial t}),\quad m(Y\Delta t-\Delta\frac{\partial y}{\partial t}),\quad m(Z\Delta t-\Delta\frac{\partial z}{\partial t})$$

sind.

Auf ganz ähnliche Art sind überhaupt für alle Punkte

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.$$

des Systems am Ende der Zeit $t+\Delta t$, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner $\Delta t$ ist, die den drei Coordinatenaxen der $x$, $y$, $z$ parallelen, mit den gehörigen Vorzeichen genommenen Composanten der gewonnenen oder verlorenen Quantitäten der Bewegung:

$$m(X\varDelta t-\varDelta\frac{\partial x}{\partial t}),\quad m(Y\varDelta t-\varDelta\frac{\partial y}{\partial t}),\quad m(Z\varDelta t-\varDelta\frac{\partial z}{\partial t});$$

$$m_1(X_1\varDelta t-\varDelta\frac{\partial x_1}{\partial t}),\quad m_1(Y_1\varDelta t-\varDelta\frac{\partial y_1}{\partial t}),\quad m_1(Z_1\varDelta t-\varDelta\frac{\partial z_1}{\partial t});$$

$$m_2(X_2\varDelta t-\varDelta\frac{\partial x_2}{\partial t}),\quad m_2(Y_2\varDelta t-\varDelta\frac{\partial y_2}{\partial t}),\quad m_2(Z_2\varDelta t-\varDelta\frac{\partial z_2}{\partial t});$$

$$m_3(X_3\varDelta t-\varDelta\frac{\partial x_3}{\partial t});\quad m_3(Y_3\varDelta t-\varDelta\frac{\partial y_3}{\partial t}),\quad m_3(Z_3\varDelta t-\varDelta\frac{\partial z_3}{\partial t});$$

u. s. w.,

und da nun in Folge von D'Alembert's Princip das System in Ruhe bleibt, wenn man an seinen einzelnen Punkten bloss die gewonnenen oder verlorenen Quantitäten der Bewegung sich wirkend denkt, so erhalten wir nach den aus II. bekannten allgemeinen Bedingungsgleichungen der Ruhe eines Systems von Punkten, wenn das System völlig frei ist, die folgenden mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner $\varDelta t$ ist, geltenden Gleichungen:

$$\Sigma m(X\varDelta t-\varDelta\frac{\partial x}{\partial t})=0,\quad \Sigma m(Y\varDelta t-\varDelta\frac{\partial y}{\partial t})=0,\quad \Sigma m(Z\varDelta t-\varDelta\frac{\partial z}{\partial t})=0;$$

$$\Sigma m\{x(Y\varDelta t-\varDelta\frac{\partial y}{\partial t})-y(X\varDelta t-\varDelta\frac{\partial x}{\partial t})\}=0,$$

$$\Sigma m\{y(Z\varDelta t-\varDelta\frac{\partial z}{\partial t})-z(Y\varDelta t-\varDelta\frac{\partial y}{\partial t})\}=0,$$

$$\Sigma m\{z(X\varDelta t-\varDelta\frac{\partial x}{\partial t})-x(Z\varDelta t-\varDelta\frac{\partial z}{\partial t})\}=0;$$

oder, wie leicht erhellet:

$$\Sigma m(X-\frac{\varDelta\frac{\partial x}{\partial t}}{\varDelta t})=0,\quad \Sigma m(Y-\frac{\varDelta\frac{\partial y}{\partial t}}{\varDelta t})=0,\quad \Sigma m(Z-\frac{\varDelta\frac{\partial z}{\partial t}}{\varDelta t})=0;$$

$$\Sigma m\{x(Y-\frac{\varDelta\frac{\partial y}{\partial t}}{\varDelta t})-y(X-\frac{\varDelta\frac{\partial x}{\partial t}}{\varDelta t})\}=0,$$

$$\Sigma m\{y(Z-\frac{\varDelta\frac{\partial z}{\partial t}}{\varDelta t})-z(Y-\frac{\varDelta\frac{\partial y}{\partial t}}{\varDelta t})\}=0,$$

$$\Sigma m\{z(X-\frac{\varDelta\frac{\partial x}{\partial t}}{\varDelta t})-x(Z-\frac{\varDelta\frac{\partial z}{\partial t}}{\varDelta t})\}=0.$$

Weil diese Gleichungen mit desto grösserer Genauigkeit gelten, je kleiner $\Delta t$ ist, so erhält man die völlig genauen Gleichungen, wenn man in den vorhergehenden Gleichungen, indem man sich $\Delta t$ der Null nähern lässt, zu den Gränzen übergeht. Dadurch erhält man aber nach den bekannten Begriffen und Bezeichnungen der Differentialrechnung auf der Stelle die Gleichungen:

$$\Sigma m(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=0,\quad \Sigma m(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2})=0,\quad \Sigma m(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2})=0;$$

$$\Sigma m\{x(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2})-y(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})\}=0,$$

$$\Sigma m\{y(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2})-z(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2})\}=0,$$

$$\Sigma m\{z(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})-x(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2})\}=0;$$

oder die Gleichungen:

$$\Sigma m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\Sigma mX,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\Sigma mY,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\Sigma mZ;$$

$$\Sigma m(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=\Sigma m(xY-yX),$$

$$\Sigma m(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2})=\Sigma m(yZ-zY),$$

$$\Sigma m(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2})=\Sigma m(zX-xZ);$$

oder auch die Gleichungen:

$$\Sigma m\partial^2 x=\Sigma mX\partial t^2,\quad \Sigma m\partial^2 y=\Sigma mY\partial t^2,\quad \Sigma m\partial^2 z=\Sigma mZ\partial t^2;$$

$$\Sigma m(x\partial^2 y-y\partial^2 x)=\Sigma m(xY-yX)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(y\partial^2 z-z\partial^2 y)=\Sigma m(yZ-zY)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(z\partial^2 x-x\partial^2 z)=\Sigma m(zX-xZ)\partial t^2.$$

Ist das System um einen festen Punkt drehbar, so erhält man nach den aus II. bekannten allgemeinen Bedingungsgleichungen der Ruhe eines Systems von Punkten, wenn man den festen Punkt als Anfang der Coordinaten annimmt, wie leicht erhellen wird, für die Bewegung des Systems bloss die drei Gleichungen:

$$\Sigma m(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=\Sigma m(xY-yX),$$

$$\Sigma m(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2})=\Sigma m(yZ-zY),$$

$$\Sigma m(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2})=\Sigma m(zX-xZ);$$

oder:

$$\Sigma m(x\partial^2 y-y\partial^2 x)=\Sigma m(xY-yX)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(y\partial^2 z-z\partial^2 y)=\Sigma m(yZ-zY)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(z\partial^2 x-x\partial^2 z)=\Sigma m(zX-xZ)\partial t^2.$$

Ist das System um eine feste Axe drehbar, so erhält man nach den aus II. bekannten allgemeinen Bedingungsgleichungen der Ruhe eines Systems von Punkten, wenn man diese Axe als Axe der $z$ annimmt, wie leicht erhellen wird, für die Bewegung des Systems bloss die eine Gleichung:

$$\Sigma m(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=\Sigma m(xY-yX)$$

oder

$$\Sigma m(x\partial^2 y-y\partial^2 x)=\Sigma m(xY-yX)\partial t^2.$$

Wenn das völlig freie System bloss aus einem Punkte besteht, so werden die sechs obigen Gleichungen, wie leicht erhellet:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z;$$

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=xY-yX,$$

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=yZ-zY,$$

$$z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=zX-xZ.$$

Da aber offenbar in diesem Falle die drei letzten Gleichungen eine unmittelbare Folge aus den drei ersten Gleichungen, und also jederzeit erfüllt sind, wenn die drei ersten Gleichungen erfüllt sind, so hat man in diesem Falle für die Bewegung des in Rede stehenden Punktes nur die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z;$$

oder, weil nach dem Obigen

$$X=\frac{X'}{m},\quad Y=\frac{Y'}{m},\quad Z=\frac{Z'}{m}$$

ist, die drei Gleichungen:

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X',\quad m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y',\quad m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z';$$

welche für $m=1$ in die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X',\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y',\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z'$$

übergehen *).

---

## Schluss.

Es ist in dieser Abhandlung durchaus nicht unsere Absicht gewesen, absolut Neues zu geben. Dieselbe wird aber dessenungeachtet den Zwecken des Archivs entsprechen, wenn es uns gelungen ist, Bekanntes den Lesern in einer vielleicht verbesserten Darstellung vorzuführen. Hauptsächlich aber beabsichtigen wir mit derselben, die wahrhaft grossartige Gestaltung der neueren Mechanik deutlich hervorzuheben. Nachdem man den Satz vom Parallelogramme der Kräfte, welchen wir hier voraussetzen, bewiesen, gelangt man durch allgemeine, an sich ziemlich einfache Betrachtungen zu dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, welches dann ferner mittelst allgemeiner analytischer Rechnungen zu den allgemeinsten Bedingungsgleichungen der Ruhe eines Systems von Punkten, den höchsten Gesetzen der Statik, führt. Lässt man dann als vermittelndes Glied zwischen der Statik und eigentlichen Mechanik oder Dynamik das D'Alembert'sche Princip eintreten, so führen mit dessen Hülfe die vorher gewonnenen allgemeinen Bedingungsgleichungen der Ruhe ohne besondere Schwierigkeit zu den allgemeinen Bedingungsgleichungen der Bewegung eines Systems materieller Punkte, womit dann die gesammte Wissenschaft der Mechanik in ihrem wesentlichen Theile vollendet ist, indem alles Uebrige sich an die vorher genannten Gesetze leicht anreihen lässt und als unmittelbare Folgerung aus denselben hervortritt. Jedenfalls haben wir es hier mit einer in hohem Grade vollendeten Wissenschaft zu thun, deren Ausbildung bis zu einem solchen Grade dem mensch-

*) Anwendungen der hier entwickelten allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Systems von Punkten sind schon in mehreren früheren Aufsätzen gemacht worden. M. s. z. B. Thl. XV. Nr. I. — Thl. XXIV. Nr. III.

lichen Geiste zu allen Zeiten zur grössten Zierde und Ehre gereichen wird und von seiner göttlichen Bestimmung das deutlichste Zeugniss ablegt. Möchte man doch durch auf allen Lehranstalten stets mit dem grössten Eifer und der grössten Sorgfalt betriebenen mathematischen Unterricht die Jugend bei Zeiten befähigen, dereinst in die Geheimnisse solcher Wissenschaften eindringen, sich den mit ihrem Studium nothwendig verbundenen hohen geistigen Genuss, den kaum eine andere Wissenschaft annähernd in gleichem Grade zu gewähren im Stande ist, verschaffen, und auch auf diesem Wege die Ueberzeugung von ihrer dereinstigen wahren Bestimmung gewinnen zu können! Dies ist wenigstens unser sehnlichster Wunsch und wird es stets bleiben. Zu dessen Erfüllung nach Kräften beizutragen, werden wir auch von dem sechsundzwanzigsten Bande unserer Zeitschrift an, dem ersten nach dem nun vollendeten ersten Viertelhundert, eifrigst bemüht sein, und bitten alle Lehrer der Mathematik, uns dabei wie bisher auch künftig reichlichste Unterstützung zu Theil werden zu lassen.

---

# XXXVI.

## Ueber eine geometrische Aufgabe von der Kugel, mit Rücksicht auf Geodäsie.

Von

dem Herausgeber.

---

Wenn auf der Oberfläche einer Kugel zwei Punkte $A_0$ und $A_1$ und die geradlinigen Entfernungen eines dritten Punktes $A_2$ auf derselben Kugelfläche von diesen beiden Punkten gegeben sind, so kann man verlangen, die Lage des Punktes $A_2$ auf der Kugelfläche zu bestimmen. Diese Aufgabe, so leicht sie auf den

ersten Anblick zu sein scheint, bietet doch bei der Auflösung mancherlei Schwierigkeiten dar, und erfordert die Anwendung eigenthümlicher Kunstgriffe, wenn sie mit Eleganz und ohne ermüdende Rechnung durchgeführt werden soll. Schon deshalb ist dieselbe vom rein geometrischen Gesichtspunkte aus interessant. Sie ist aber auch von praktischer Wichtigkeit. Denn hat man bei der Berechnung eines topographischen Netzes die Methode der Berechnung der Chorden- oder Sehnen-Dreiecke angewandt, so wird man zuletzt auch mehrfach in den Fall kommen, aus den Längen und Breiten zweier Punkte der Kugelfläche und den geradlinigen Entfernungen eines dritten Punktes auf der Kugelfläche von jenen zwei Punkten die Länge und Breite dieses dritten Punktes zu bestimmen, was eben auf das obige geometrische Problem zurückkommt. Uebrigens können natürlich statt der geradlinigen Entfernungen der in Rede stehenden Punkte auch die sie verbindenden Bogen grösster Kugelkreise gegeben sein, indem sich sowohl aus diesen die geradlinigen Entfernungen, als auch umgekehrt aus letzteren die unsere Punkte verbindenden Bogen grösster Kugelkreise ohne alle Schwierigkeiten sogleich ableiten lassen, was wir hier nur deshalb noch besonders hervorheben, um anzudeuten, dass unser Problem auch dann praktisch Anwendung findet, wenn man ein topographisches Dreiecksnetz nach einer anderen als der oben erwähnten Chorden- oder Sehnen-Methode, etwa durch die Zurückführung der Berechnung sphärischer Dreiecke auf die Berechnung ebener Dreiecke mit gleich langen Seiten, berechnet. Wenn man die Bogen grösster Kugelkreise, welche die gegebenen Punkte mit dem zu bestimmenden Punkte verbinden, als die Data der Aufgabe annimmt, so tritt dieselbe in den Kreis der Aufgaben der sphärischen Trigonometrie, und lässt sich, wie Jeder sogleich übersieht, durch eine Verbindung der verschiedenen Probleme und Formeln dieser Wissenschaft ohne Weiteres auflösen, wobei sich aber immer die Unterscheidung verschiedener Fälle, bei der man wohl jederzeit auf eine Darstellung des betreffenden speciellen Falls in einer Zeichnung wird recurriren müssen, geltend machen wird. Wenn ich daher oben sagte, dass die Auflösung der Aufgabe Schwierigkeiten darbiete und die Anwendung besonderer Kunstgriffe erfordere, so meinte ich damit die Auflösung derselben durch völlig entwickelte ganz allgemeine, bloss die gegebenen Stücke enthaltende analytische Formeln, aus welchen sich die, die Lage des gesuchten dritten Punktes bestimmenden Elemente unmittelbar berechnen lassen; und eine s o l c h e Auflösung zu geben, ist der Zweck dieses Aufsatzes, wobei ich das Problem zunächst nur aus dem geometrischen Gesichtspunkte auffassen und mir zugleich angelegen lassen sein werde, die be-

treffenden Formeln so elegant wie möglich darzustellen, um die Auflösung zugleich zu einer zweckmässigen Uebung für junge Mathematiker in der neueren, durch ihre ungemeine Eleganz vor der älteren gemischten, den Anforderungen der Wissenschaft wenig genügenden, algebraisch-geometrischen Methode so sehr hervorragenden analytischen Geometrie zu machen, da dergleichen Uebungen in diesem schönen Zweige der neueren Mathematik nicht genug empfohlen werden können. Man kann die Aufgabe auch für andere Flächen, z. B. für das Ellipsoid, auflösen, wo ihre Auflösung aber meistens ungleich weitläufiger und complicirter als bei der Kugel wird, insbesondere bei dem Ellipsoid auf eine Gleichung des vierten Grades führt, was am Schluss dieser Abhandlung, wenigstens in Bezug auf das Rotations-Ellipsoid, noch mit ein Paar Worten erläutert werden wird.

Den Mittelpunkt der Kugel, auf deren Oberfläche die drei Punkte $A_0$, $A_1$, $A_2$ liegen, wollen wir durch $O$ bezeichnen, und deren Halbmesser der Einfachheit wegen der Einheit gleich setzen. Durch den Mittelpunkt $O$ legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem der $xyz$ und bezeichnen die gegebenen Coordinaten der Punkte $A_0$ und $A_1$ durch $x_0$, $y_0$, $z_0$ und $x_1$, $y_1$, $z_1$, die gesuchten Coordinaten des Punktes $A_2$ durch $x_2$, $y_2$, $z_2$. Die Winkel des ebenen Dreiecks $A_0A_1A_2$ werden wir durch $A_0$, $A_1$, $A_2$ bezeichnen, und setzen ferner

$$\overline{A_1A_2}=E_0,\quad \overline{A_2A_0}=E_1,\quad \overline{A_0A_1}=E_2;$$

wo nun aus den obigen allgemeinen Bemerkungen über die vorliegende Aufgabe von selbst hervorgeht, dass sowohl die Winkel $A_0$, $A_1$, $A_2$, als auch die Seiten $E_0$, $E_1$, $E_2$ des Dreiecks $A_0A_1A_2$ sämmtlich gegeben sind. Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von $A_0$ und $A_1$ ausgehend gedachten Linien $A_0A_2$ und $A_1A_2$ mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliessen, wollen wir respective durch $\theta_0$, $\omega_0$, $\overline{\omega}_0$ und $\theta_1$, $\omega_1$, $\overline{\omega}_1$ bezeichnen; sind wir im Stande, diese Winkel zu bestimmen, so werden wir offenbar auch die gesuchten Coordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ gefunden haben, weshalb wir auf die Bestimmung der in Rede stehenden Winkel hauptsächlich unser Augenmerk richten werden.

Auf der Stelle überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$x_2=x_0+E_1\cos\theta_0=x_1+E_0\cos\theta_1,$$

$$y_2=y_0+E_1\cos\omega_0=y_1+E_0\cos\omega_1,$$

$$z_2=z_0+E_1\cos\overline{\omega}_0=z_1+E_0\cos\overline{\omega}_1;$$

und weil nun, da wir den Halbmesser der Kugel der Einheit gleich gesetzt haben,

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=1$$

ist, so ist

$$(x_0+E_1\cos\theta_0)^2+(y_0+E_1\cos\omega_0)^2+(z_0+E_1\cos\bar{\omega}_0)^2=1,$$

$$(x_1+E_0\cos\theta_1)^2+(y_1+E_0\cos\omega_1)^2+(z_1+E_0\cos\bar{\omega}_1)^2=1.$$

Entwickeln wir die links von den Gleichheitszeichen stehenden Quadrate, und bemerken, dass

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1,\quad x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$$

und

$$\cos\theta_0^2+\cos\omega_0^2+\cos\bar{\omega}_0^2=1,\quad \cos\theta_1^2+\cos\omega_1^2+\cos\bar{\omega}_1^2=1$$

ist, so erhalten wir auf der Stelle die beiden folgenden Gleichungen:

$$x_0\cos\theta_0+y_0\cos\omega_0+z_0\cos\bar{\omega}_0=-\tfrac{1}{2}E_1,$$

$$x_1\cos\theta_1+y_1\cos\omega_1+z_1\cos\bar{\omega}_1=-\tfrac{1}{2}E_0;$$

welche aber, wenn wir, was die Rechnung einigermassen erleichtert:

$$X_0=E_1\cos\theta_0,\quad Y_0=E_1\cos\omega_0,\quad Z_0=E_1\cos\bar{\omega}_0;$$

$$X_1=E_0\cos\theta_1,\quad Y_1=E_0\cos\omega_1,\quad Z_1=E_0\cos\bar{\omega}_1$$

setzen, die Form

$$x_0X_0+y_0Y_0+z_0Z_0=-\tfrac{1}{2}E_1^2,$$

$$x_1X_1+y_1Y_1+z_1Z_1=-\tfrac{1}{2}E_0^2$$

annehmen.

Weil nun nach dem Obigen

$$X_1=x_0-x_1+X_0,\quad Y_1=y_0-y_1+Y_0,\quad Z_1=z_0-z_1+Z_0$$

ist, so wird die zweite der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$x_1(x_0-x_1+X_0)+y_1(y_0-y_1+Y_0)+z_1(z_0-z_1+Z_0)=-\tfrac{1}{2}E_0^2,$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$x_1X_0+y_1Y_0+z_1Z_0=1-\tfrac{1}{2}E_0^2-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1).$$

Bezeichnen wir die von den als von $O$ ausgehend gedachten Kugelhalbmessern $\overline{OA_0}$ und $\overline{OA_1}$ mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Win-

kel respective durch $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$ und $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; so ist für den der Einheit gleichen Kugelhalbmesser offenbar:

$$x_0 = \cos\alpha_0, \quad y_0 = \cos\beta_0, \quad z_0 = \cos\gamma_0;$$

$$x_1 = \cos\alpha_1, \quad y_1 = \cos\beta_1, \quad z_1 = \cos\gamma_1;$$

also:

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1;$$

nach einer allgemein bekannten Formel der analytischen Geometrie ist aber

$$\cos\overline{A_0OA_1} = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1,$$

folglich

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = \cos\overline{A_0OA_1},$$

also

$$1-(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1) = 2\sin\tfrac{1}{2}\overline{A_0OA_1}^2 = \tfrac{1}{2}\overline{A_0A_1}^2 = \tfrac{1}{2}E_2^2,$$

woraus umgekehrt

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = 1 - \tfrac{1}{2}E_2^2$$

folgt. Daher ist nach dem Obigen:

$$x_1X_0 + y_1Y_0 + z_1Z_0 = -\tfrac{1}{2}(E_0^2 - E_2^2),$$

und weil nun endlich

$$X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = E_1^2(\cos\theta_0^2 + \cos\omega_0^2 + \cos\overline{\omega}_0^2) = E_1^2$$

ist, so haben wir zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ die drei folgenden Gleichungen:

$$x_0X_0 + y_0Y_0 + z_0Z_0 = -\tfrac{1}{2}E_1^2,$$

$$x_1X_0 + y_1Y_0 + z_1Z_0 = -\tfrac{1}{2}(E_0^2 - E_2^2),$$

$$X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = E_1^2.$$

Um diese Gleichungen mit Eleganz und Leichtigkeit aufzulösen, will ich *)

*) Es beruhet dies auf einem bei der Auflösung so geformter Gleichungen ziemlich allgemein anwendbaren Kunstgriffe, den ich gelegentlich einmal im Allgemeinen erläutern werde, wenn dies auch für den Kundigern kaum nöthig sein dürfte.

$$F = \{x_0 - x_1(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)\}E_1^2$$
$$+\{x_1 - x_0(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)\}(E_0^2 - E_2^2),$$

$$G = \{y_0 - y_1(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)\}E_1^2$$
$$+\{y_1 - y_0(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)\}(E_0^2 - E_2^2),$$

$$H = \{z_0 - z_1(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)\}E_1^2$$
$$+\{z_1 - z_0(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)\}(E_0^2 - E_2^2);$$

und dann

$$A = -\frac{F}{2\{1-(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)^2\}},$$

$$B = -\frac{G}{2\{1-(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)^2\}},$$

$$C = -\frac{H}{2\{1-(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)^2\}};$$

ferner

$$X_0 = A + X_0', \quad Y_0 = B + Y_0', \quad Z_0 = C + Z_0'$$

setzen.

Weil

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$$

ist, so ist, wie leicht erhellet:

$$Fx_0 + Gy_0 + Hz_0 = \{1-(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)^2\}E_1^2,$$
$$Fx_1 + Gy_1 + Hz_1 = \{1-(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)^2\}(E_0^2 - E_2^2);$$

also nach dem Obigen:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -\tfrac{1}{2}E_1^2,$$
$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -\tfrac{1}{2}(E_0^2 - E_2^2);$$

und weil nun

$$x_0X_0 + y_0Y_0 + z_0Z_0 = -\tfrac{1}{2}E_1^2$$
$$= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + x_0X_0' + y_0Y_0' + z_0Z_0'$$
$$= -\tfrac{1}{2}E_1^2 + x_0X_0' + y_0Y_0' + z_0Z_0',$$

$$x_1X_0 + y_1Y_0 + z_1Z_0 = -\tfrac{1}{2}(E_0^2 - E_2^2)$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + x_1X_0' + y_1Y_0' + z_1Z_0'$$
$$= -\tfrac{1}{2}(E_0^2 - E_2^2) + x_1X_0' + y_1Y_1' + z_1Z_0'$$

ist, so ist:

$$x_0 X_0' + y_0 Y_0' + z_0 Z_0' = 0,$$

$$x_1 X_0' + y_1 Y_0' + z_1 Z_0' = 0;$$

folglich, wie aus den obigen Ausdrücken von $A$, $B$, $C$ sich auf der Stelle ergiebt, auch

$$AX_0' + BY_0' + CZ_0' = 0.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = E_1^2$$

$$= A^2 + B^2 + C^2 + 2(AX_0' + BY_0' + CZ_0') + X_0'^2 + Y_0'^2 + Z_0'^2,$$

also

$$X_0'^2 + Y_0'^2 + Z_0'^2 = E_1^2 - (A^2 + B^2 + C^2),$$

so dass wir jetzt zur Bestimmung der neu eingeführten unbekannten Grössen $X_0'$, $Y_0'$, $Z_0'$ die drei folgenden Gleichungen haben:

$$x_0 X_0' + y_0 Y_0' + z_0 Z_0' = 0,$$

$$x_1 X_0' + y_1 Y_0' + z_1 Z_0' = 0,$$

$$X_0'^2 + Y_0'^2 + Z_0'^2 = E_1^2 - (A^2 + B^2 + C^2);$$

deren Auflösung, in dieser Form, ungemein leicht ist. Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man nämlich auf der Stelle:

$$X_0' = \frac{y_0 z_1 - z_0 y_1}{y_0 z_1 - z_0 y_1} X_0', \quad Y_0' = \frac{z_0 x_1 - x_0 z_1}{y_0 z_1 - z_0 y_1} X_0', \quad Z_0' = \frac{x_0 y_1 - y_0 x_1}{y_0 z_1 - z_0 y_1} X_0';$$

woraus sich mit Hülfe der dritten Gleichung ohne alle weitere Rechnung sogleich die drei folgenden Ausdrücke der unbekannten Grössen $X_0'$, $Y_0'$, $Z_0'$ ergeben, in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen:

$$X_0' = \pm \frac{(y_0 z_1 - z_0 y_1)\sqrt{E_1^2 - (A^2 + B^2 + C^2)}}{\sqrt{(x_0 y_1 - y_0 x_1)^2 + (y_0 z_1 - z_0 y_1)^2 + (z_0 x_1 - x_0 z_1)^2}},$$

$$Y_0' = \pm \frac{(z_0 x_1 - x_0 z_1)\sqrt{E_1^2 - (A^2 + B^2 + C^2)}}{\sqrt{(x_0 y_1 - y_0 x_1)^2 + (y_0 z_1 - z_0 y_1)^2 + (z_0 x_1 - x_0 z_1)^2}},$$

$$Z_0' = \pm \frac{(x_0 y_1 - y_0 x_1)\sqrt{E_1^2 - (A^2 + B^2 + C^2)}}{\sqrt{(x_0 y_1 - y_0 x_1)^2 + (y_0 z_1 - z_0 y_1)^2 + (z_0 x_1 - x_0 z_1)^2}}.$$

Nun ist aber

$$(x_0y_1-y_0x_1)^2+(y_0z_1-z_0y_1)^2+(z_0x_1-x_0z_1)^2$$
$$=(x_0^2+y_0^2+z_0^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2$$
$$=1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2,$$

folglich:

$$X_0'=\pm\frac{(y_0z_1-z_0y_1)\sqrt{E_1^2-(A^2+B^2+C^2)}}{\sqrt{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2}},$$

$$Y_0'=\pm\frac{(z_0x_1-x_0z_1)\sqrt{E_1^2-(A^2+B^2+C^2)}}{\sqrt{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2}},$$

$$Z_0'=\pm\frac{(x_0y_1-y_0x_1)\sqrt{E_1^2-(A^2+B^2+C^2)}}{\sqrt{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2}}.$$

Mittelst leichter Rechnung findet man:

$$F^2+G^2+H^2=\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}E_1^4$$
$$+\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}(E_0^2-E_2^2)^2$$
$$-2\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)E_1^2(E_0^2-E_2^2),$$

also:

$$A^2+B^2+C^2=\frac{E_1^4+(E_0^2-E_2^2)^2-2(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)E_1^2(E_0^2-E_2^2)}{4\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}},$$

und folglich, wenn man im Zähler

$$x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1=1-\tfrac{1}{2}E_2^2$$

setzt, wie man leicht findet:

$$A^2+B^2+C^2=\frac{(E_1^2+E_2^2-E_0^2)^2+E_1^2E_2^2(E_0^2-E_2^2)}{4\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}};$$

also ferner:

$$E_1^2-(A^2+B^2+C^2)=\frac{E_1^2E_2^2(4-E_0^2)-(E_1^2+E_2^2-E_0^2)^2}{4\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}}.$$

Nun ist aber nach den Lehren der ebenen Trigonometrie:

$$E_1^2+E_2^2-E_0^2=2E_1E_2\cos A_0,$$

also, wie sich sogleich ergiebt:

$$E_1^2-(A^2+B^2+C^2)=\frac{E_1^2E_2^2(4\sin A_0^2-E_0^2)}{4\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}};$$

folglich, wenn $\varDelta$ den Flächeninhalt des Dreiecks $A_0A_1A_2$ bezeichnet, weil

$$E_1E_2\sin A_0=2\varDelta$$

ist:

$$E_1{}^2-(A^2+B^2+C^2)=\frac{16\varDelta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}{4\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$X_0'=\pm\frac{(y_0z_1-z_0y_1)\sqrt{16\varDelta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}},$$

$$Y_0'=\pm\frac{(z_0x_1-x_0z_1)\sqrt{16\varDelta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}},$$

$$Z_0'=\pm\frac{(x_0y_1-y_0x_1)\sqrt{16\varDelta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2\{1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2\}}.$$

Weil endlich, wenn wir den Winkel $\overline{A_0OA_1}$ durch $O_2$ bezeichnen, nach dem Obigen

$$1-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2=\sin O_2{}^2$$

ist, so ist auch:

$$X_0'=\pm\frac{(y_0z_1-z_0y_1)\sqrt{16\varDelta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2\sin O_2{}^2},$$

$$Y_0'=\pm\frac{(z_0x_1-x_0z_1)\sqrt{16\varDelta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2\sin O_2{}^2},$$

$$Z_0'=\pm\frac{(x_0y_1-y_0x_1)\sqrt{16\varDelta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2\sin O_2{}^2};$$

oder, wie man sogleich übersieht:

$$X_0'=\pm\frac{(y_0z_1-z_0y_1)\sqrt{16\varDelta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2E_2{}^2(1-\frac{1}{4}E_2{}^2)},$$

$$Y_0'=\pm\frac{(z_0x_1-x_0z_1)\sqrt{16\varDelta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2E_2{}^2(1-\frac{1}{4}E_2{}^2)},$$

$$Z_0'=\pm\frac{(x_0y_1-y_0x_1)\sqrt{16\varDelta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2E_2{}^2(1-\frac{1}{4}E_2{}^2)}.$$

Für die Grössen $F$, $G$, $H$ erhält man sogleich die folgenden Ausdrücke:

$$F = (x_0 - x_1 \cos O_2) E_1^2 + (x_1 - x_0 \cos O_2)(E_0^2 - E_2^2),$$
$$G = (y_0 - y_1 \cos O_2) E_1^2 + (y_1 - y_0 \cos O_2)(E_0^2 - E_2^2),$$
$$H = (z_0 - z_1 \cos O_2) E_1^2 + (z_1 - z_0 \cos O_2)(E_0^2 - E_2^2)$$

oder

$$F = x_0 E_1^2 + x_1 (E_0^2 - E_2^2) - \{x_1 E_1^2 + x_0 (E_0^2 - E_2^2)\} \cos O_2,$$
$$G = y_0 E_1^2 + y_1 (E_0^2 - E_2^2) - \{y_1 E_1^2 + y_0 (E_0^2 - E_2^2)\} \cos O_2,$$
$$H = z_0 E_1^2 + z_1 (E_0^2 - E_2^2) - \{z_1 E_1^2 + z_0 (E_0^2 - E_2^2)\} \cos O_2;$$

und es ist dann

$$A = -\frac{F}{2\sin O_2^2} = -\frac{F}{2E_2^2(1 - \frac{1}{4}E_2^2)},$$
$$B = -\frac{G}{2\sin O_2^2} = -\frac{G}{2E_2^2(1 - \frac{1}{4}E_2^2)},$$
$$C = -\frac{H}{2\sin O_2^2} = -\frac{H}{2E_2^2(1 - \frac{1}{4}E_2^2)};$$

nach dem Obigen ist aber:

$$X_0 = A + X_0', \quad Y_0 = B + Y_0', \quad Z_0 = C + Z_0'$$

und

$$x_2 = x_0 + X_0, \quad y_2 = y_0 + Y_0, \quad z_2 = z_0 + Z_0;$$

also:

$$x_2 = x_0 + A + X_0', \; y_2 = y_0 + B + Y_0', \; z_2 = z_0 + C + Z_0'.$$

Wir wollen nun die Grössen

$$A' = x_0 + A, \quad B' = y_0 + B, \quad C' = z_0 + C$$

berechnen.

Zuvörderst ist

$$2\sin O_2^2 - E_1^2 + (E_0^2 - E_2^2)\cos O_2$$
$$= 2E_2^2(1 - \tfrac{1}{4}E_2^2) - E_1^2 + (1 - \tfrac{1}{2}E_2^2)(E_0^2 - E_2^2)$$
$$= -\tfrac{1}{2}\{E_0^2 E_2^2 - 2(E_0^2 + E_2^2 - E_1^2)\}$$
$$= -\tfrac{1}{2}E_0^2 E_2^2 (1 - \frac{4\cos A_1}{E_0 E_2})$$

und

$$E_0^2 - E_2^2 - E_1^2 \cos O_2 = E_0^2 - E_2^2 - (1 - \tfrac{1}{2} E_2^2) E_1^2$$
$$= \tfrac{1}{2} \{ E_1^2 E_2^2 - 2 (E_1^2 + E_2^2 - E_0^2) \}$$
$$= \tfrac{1}{2} E_1^2 E_2^2 \left(1 - \frac{4 \cos A_0}{E_1 E_2}\right),$$

also offenbar:

$$A' = -\frac{x_0 E_0^2 \left(1 - \dfrac{4 \cos A_1}{E_0 E_2}\right) + x_1 E_1^2 \left(1 - \dfrac{4 \cos A_0}{E_1 E_2}\right)}{4 (1 - \frac{1}{4} E_2^2)},$$

$$B' = -\frac{y_0 E_0^2 \left(1 - \dfrac{4 \cos A_1}{E_0 E_2}\right) + y_1 E_1^2 \left(1 - \dfrac{4 \cos A_0}{E_1 E_2}\right)}{4 (1 - \frac{1}{4} E_2^2)},$$

$$C' = -\frac{z_0 E_0^2 \left(1 - \dfrac{4 \cos A_1}{E_0 E_2}\right) + z_1 E_1^2 \left(1 - \dfrac{4 \cos A_0}{E_1 E_2}\right)}{4 (1 - \frac{1}{4} E_2^2)}.$$

Denken wir uns aber von der Spitze $A_2$ des Dreiecks $A_0 A_1 A_2$ auf die Gegenseite $A_0 A_1$ ein Perpendikel gefällt, und bezeichnen die Entfernungen des Fusspunkts dieses Perpendikels von den Spitzen $A_0$ und $A_1$ unsers Dreiecks, indem wir diese Entfernungen als positiv oder negativ betrachten, jenachdem sie von den Punkten $A_0$ und $A_1$ an nach dem inneren oder äusseren Raume des Dreiecks hin liegen, durch $D_0$ und $D_1$, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$D_0 = E_1 \cos A_0, \quad D_1 = E_0 \cos A_1;$$

also

$$\frac{\cos A_0}{E_1 E_2} = \frac{D_0}{E_1^2 E_2}, \quad \frac{\cos A_1}{E_0 E_2} = \frac{D_1}{E_0^2 E_2};$$

folglich nach dem Obigen:

$$A' = -\frac{x_0 \left(E_0^2 - 4 \dfrac{D_1}{E_2}\right) + x_1 \left(E_1^2 - 4 \dfrac{D_0}{E_2}\right)}{4 (1 - \frac{1}{4} E_2^2)},$$

$$B' = -\frac{y_0 \left(E_0^2 - 4 \dfrac{D_1}{E_2}\right) + y_1 \left(E_1^2 - 4 \dfrac{D_0}{E_2}\right)}{4 (1 - \frac{1}{4} E_2^2)},$$

$$C' = -\frac{z_0 \left(E_0^2 - 4 \dfrac{D_1}{E_2}\right) + z_1 \left(E_1^2 - 4 \dfrac{D_0}{E_2}\right)}{4 (1 - \frac{1}{4} E_2^2)}.$$

Führt man den Halbmesser der Kugel, den wir durch $R$ bezeichnen wollen, ein, so muss man setzen:

$$A'=-\frac{x_0(E_0{}^2-4\frac{D_1}{E_2}R^2)+x_1(E_1{}^2-4\frac{D_0}{E_2}R^2)}{4(R^2-\frac{1}{4}E_2{}^2)},$$

$$B'=-\frac{y_0(E_0{}^2-4\frac{D_1}{E_2}R^2)+y_1(E_1{}^2-4\frac{D_0}{E_2}R^2)}{4(R^2-\frac{1}{4}E_2{}^2)},$$

$$C'=-\frac{z_0(E_0{}^2-4\frac{D_1}{E_2}R^2)+z_1(E_1{}^2-4\frac{D_1}{E_2}R^2)}{4(R^2-\frac{1}{4}E_2{}^2)}$$

und

$$X_0'=\pm\frac{(y_0z_1-z_0y_1)\sqrt{16R^2\Delta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2E_2{}^2(R^2-\frac{1}{4}E_2{}^2)},$$

$$Y_0'=\pm\frac{(z_0x_1-x_0z_1)\sqrt{16R^2\Delta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2E_2{}^2(R^2-\frac{1}{4}E_2{}^2)},$$

$$Z_0'=\pm\frac{(x_0y_1-y_0x_1)\sqrt{16R^2\Delta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{2E_2{}^2(R^2-\frac{1}{4}E_2{}^2)}.$$

Führen wir aber den Durchmesser $\mathfrak{D}=2R$ der Kugel ein, so werden diese Formeln:

$$A'=-\frac{x_0(E_0{}^2-\frac{D_1}{E_2}\mathfrak{D}^2)+x_1(E_1{}^2-\frac{D_0}{E_2}\mathfrak{D}^2)}{\mathfrak{D}^2-E_2{}^2},$$

$$B'=-\frac{y_0(E_0{}^2-\frac{D_1}{E_2}\mathfrak{D}^2)+y_1(E_1{}^2-\frac{D_0}{E_2}\mathfrak{D}^2)}{\mathfrak{D}^2-E_2{}^2},$$

$$C'=-\frac{z_0(E_0{}^2-\frac{D_1}{E_2}\mathfrak{D}^2)+z_1(E_1{}^2-\frac{D_0}{E_2}\mathfrak{D}^2)}{\mathfrak{D}^2-E_2{}^2}$$

und

$$X_0'=\pm\frac{2(y_0z_1-z_0y_1)\sqrt{4\mathfrak{D}^2\Delta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{E_2{}^2(\mathfrak{D}^2-E_2{}^2)},$$

$$Y_0'=\pm\frac{2(z_0x_1-x_0z_1)\sqrt{4\mathfrak{D}^2\Delta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{E_2{}^2(\mathfrak{D}^2-E_2{}^2)},$$

$$Z_0'=\pm\frac{2(x_0y_1-y_0x_1)\sqrt{4\mathfrak{D}^2\Delta^2-E_0{}^2E_1{}^2E_2{}^2}}{E_2{}^2(\mathfrak{D}^2-E_2{}^2)}.$$

Weil nach dem Obigen

$$D_0 = E_1 \cos A_0, \quad D_1 = E_0 \cos A_1$$

ist, so kann man auch setzen:

$$\frac{D_0}{E_2} = \frac{E_1}{E_2}\cos A_0 = \frac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2},$$

$$\frac{D_1}{E_2} = \frac{E_0}{E_2}\cos A_1 = \frac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2}.$$

Die gesuchten Coordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ werden nun unmittelbar mittelst der Formeln

$$x_2 = A' + X_0', \quad y_2 = B' + Y_0', \quad z_2 = C' + Z_0'$$

erhalten. Dass es wegen der doppelten Zeichen in den obigen Formeln im Allgemeinen zwei Auflösungen giebt, liegt in der Natur der Sache.

Man kann die obigen Formeln durch Einführung einiger Hülfsgrössen noch etwas einfacher darstellen. Denkt man sich von dem Punkte $A_0$ (oder $A_1$) aus einen Durchmesser der Kugel gezogen, und dessen anderen Endpunkt mit dem Punkte $A_1$ (oder $A_0$) durch eine Sehne der Kugel verbunden, so ist, wenn man diese Sehne durch $S_2$ bezeichnet, offenbar

$$S_2^2 = \mathfrak{D}^2 - E_2^2.$$

Bezeichnet man ferner das Prisma, welches das Dreieck $\overline{A_0A_1A_2} = \varDelta$ zur Grundfläche und den Durchmesser $\mathfrak{D}$ der Kugel zur Höhe hat, durch $\mathfrak{P}$, ferner das rechtwinklige Parallelepipedon, welches die drei Seiten $E_0$, $E_1$, $E_2$ des Dreiecks $\overline{A_0A_1A_2}$ zu Kanten hat, durch $P$, so ist

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D}\varDelta, \quad P = E_0E_1E_2.$$

Bezeichnen wir endlich die Projectionen des Dreiecks $A_0OA_1$ auf den drei Coordinatenebenen der $yz$, $zx$, $xy$, indem wir diese Projectionen als positiv oder negativ betrachten, jenachdem die Grössen

$$y_0z_1 - z_0y_1, \quad z_0x_1 - x_0z_1, \quad x_0y_1 - y_0x_1$$

positiv oder negativ sind *), respective durch $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, so ist

*) Wir begnügen uns der Kürze wegen hier mit dieser Bestimmung der Vorzeichen der Projectionen, bemerken aber, dass eine Bestimmung dieser Vorzeichen von mehr geometrischem Charakter leicht aus dem Aufsatze Thl. III. Nr. XXIX. S. 261. entnommen werden kann.

$$2\Delta_1 = y_0 z_1 - z_0 y_1, \quad 2\Delta_2 = z_0 x_1 - x_0 z_1, \quad 2\Delta_3 = x_0 y_1 - y_0 x_1;$$

und durch Einführung dieser Hülfsgrössen werden nun die obigen Formeln:

$$A' = -\frac{x_0(E_0^2 - \frac{D_1}{E_2}\mathfrak{D}^2) + x_1(E_1^2 - \frac{D_0}{E_2}\mathfrak{D}^2)}{S_2^2},$$

$$B' = -\frac{y_0(E_0^2 - \frac{D_1}{E_2}\mathfrak{D}^2) + y_1(E_1^2 - \frac{D_0}{E_2}\mathfrak{D}^2)}{S_2^2},$$

$$C' = -\frac{z_0(E_0^2 - \frac{D_1}{E_2}\mathfrak{D}^2) + z_1(E_1^2 - \frac{D_0}{E_2}\mathfrak{D}^2)}{S_2^2}$$

und

$$X_0' = \pm\frac{4\Delta_1\sqrt{4\mathfrak{P}^2 - P^2}}{E_2^2 S_2^2},$$

$$Y_0' = \pm\frac{4\Delta_2\sqrt{4\mathfrak{P}^2 - P^2}}{E_2^2 S_2^2},$$

$$Z_0' = \pm\frac{4\Delta_3\sqrt{4\mathfrak{P}^2 - P^2}}{E_2^2 S_2^2}.$$

Dass man auch die Ausdrücke

$$E_0^2 - \frac{D_1}{E_2}\mathfrak{D}^2 \quad \text{und} \quad E_1^2 - \frac{D_0}{E_2}\mathfrak{D}^2$$

leicht construiren könnte, erhellet auf der Stelle, wenn man dieselben auf folgende Art darstellt:

$$E_0^2 - \frac{D_1}{E_2}\mathfrak{D}^2 = E_0^2 - \frac{D_1\mathfrak{D}}{E_2}.\mathfrak{D} = E_0^2 - \left\{\sqrt{\frac{D_1\mathfrak{D}}{E_2}.\mathfrak{D}}\right\}^2,$$

$$E_1^2 - \frac{D_0}{E_2}\mathfrak{D}^2 = E_1^2 - \frac{D_0\mathfrak{D}}{E_2}.\mathfrak{D} = E_1^2 - \left\{\sqrt{\frac{D_0\mathfrak{D}}{E_2}.\mathfrak{D}}\right\}^2.$$

Wenn die Längen und Breiten der Punkte $A_0$, $A_1$, $A_2$ durch

$$L_0,\ B_0;\quad L_1,\ B_1;\quad L_2,\ B_2$$

bezeichnet, und nach dem Obigen die Längen und Breiten der beiden ersten Punkte als bekannt angenommen werden, so findet man die Coordinaten $x_0$, $y_0$, $z_0$ und $x_1$, $y_1$, $z_1$ mittelst der Formeln:

$$x_0 = R\cos L_0 \cos B_0,\quad x_1 = R\cos L_1 \cos B_1,$$
$$y_0 = R\sin L_0 \cos B_0,\quad y_1 = R\sin L_1 \cos B_1,$$
$$z_0 = R\sin B_0;\qquad z_1 = R\sin B_1;$$

und hat man nun die Coordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ mittelst der oben entwickelten Formeln berechnet, so erhält man die Länge und Breite des Punktes $A_2$ durch Auflösung der Gleichungen:

$$x_2 = R\cos L_2 \cos B_2,$$
$$y_2 = R\sin L_2 \cos B_2,$$
$$z_2 = R\sin B_2;$$

welche bekanntlich nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegt.

Man kann die hier für die Kugelfläche aufgelöste Aufgabe auch für andere Flächen auflösen, was ich hier noch für das Rotations-Ellipsoid kurz erläutern will.

Die Gleichung des Rotations-Ellipsoids ist, wenn die Axe der $z$ die Drehungsaxe ist:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1;$$

und weil nun wie oben

$$x_2 = x_0 + E_1\cos\theta_0 = x_1 + E_0\cos\theta_1,$$
$$y_2 = y_0 + E_1\cos\omega_0 = y_1 + E_0\cos\omega_1,$$
$$z_2 = z_0 + E_1\cos\overline{\omega}_0 = z_1 + E_0\cos\overline{\omega}_1$$

ist, so hat man die Gleichungen:

$$\frac{(x_0+E_1\cos\theta_0)^2+(y_0+E_1\cos\omega_0)^2}{a^2}+\frac{(z_0+E_1\cos\overline{\omega}_0)^2}{b^2}=1,$$
$$\frac{(x_1+E_0\cos\theta_1)^2+(y_1+E_0\cos\omega_1)^2}{a^2}+\frac{(z_1+E_0\cos\overline{\omega}_1)^2}{b^2}=1;$$

und entwickelt man nun diese Gleichungen weiter, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\frac{x_0^2+y_0^2}{a^2}+\frac{z_0^2}{b^2}=1,\quad \frac{x_1^2+y_1^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{b^2}=1$$

und

$$\cos\theta_0^2+\cos\omega_0^2+\cos\overline{\omega}_0^2=1,\quad \cos\theta_1^2+\cos\omega_1^2+\cos\overline{\omega}_1^2=1,$$

indem man zugleich

$$\frac{a^2-b^2}{b^2}=\varepsilon^2,\quad \frac{a^2}{b^2}=1+\varepsilon^2$$

setzt, die folgenden Gleichungen:

$$x_0\cos\theta_0+y_0\cos\omega_0=-\tfrac{1}{2}E_1-(1+\varepsilon^2)z_0\cos\overline{\omega}_0-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2E_1\cos\overline{\omega}_0{}^2,$$

$$x_1\cos\theta_1+y_1\cos\omega_1=-\tfrac{1}{2}E_0-(1+\varepsilon^2)z_1\cos\overline{\omega}_1-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2E_0\cos\overline{\omega}_1{}^2;$$

oder, wenn man wieder

$$X_0=E_1\cos\theta_0,\quad Y_0=E_1\cos\omega_0,\quad Z_0=E_1\cos\overline{\omega}_0;$$

$$X_1=E_0\cos\theta_1,\quad Y_1=E_0\cos\omega_1,\quad Z_1=E_0\cos\overline{\omega}_1$$

setzt, die Gleichungen:

$$x_0X_0+y_0Y_0=-\tfrac{1}{2}E_1{}^2-(1+\varepsilon^2)z_0Z_0-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2Z_0{}^2,$$

$$x_1X_1+y_1Y_1=-\tfrac{1}{2}E_0{}^2-(1+\varepsilon^2)z_1Z_1-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2Z_1{}^2.$$

Mittelst der Gleichungen

$$x_0+X_0=x_1+X_1,$$
$$y_0+Y_0=y_1+Y_1,$$
$$z_0+Z_0=z_1+Z_1;$$

aus denen

$$X_1=x_0-x_1+X_0,\quad Y_1=y_0-y_1+Y_0,\quad Z_1=z_0-z_1+Z_0$$

folgt, kann man nun aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen die Grössen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ eliminiren, und hat dann, in Verbindung mit der aus der Gleichung

$$\cos\theta_0{}^2+\cos\omega_0{}^2+\cos\overline{\omega}_0{}^2=1$$

sogleich folgenden Gleichung

$$X_0{}^2+Y_0{}^2+Z_0{}^2=E_1{}^2,$$

drei Gleichungen zwischen $X_0$, $Y_0$, $Z_0$, aus denen diese drei unbekannten Grössen bestimmt werden müssen. Drückt man $X_0$, $Y_0$ mittelst der zwei ersten Gleichungen, die in Bezug auf diese beiden Grössen vom ersten Grade sind, durch $Z_0$ aus, und führt die erhaltenen Werthe in die Gleichung

$$X_0{}^2+Y_0{}^2+Z_0{}^2=E_1{}^2$$

ein, so erhält man zur Bestimmung von $Z_0$ offenbar eine Gleichung des vierten Grades, deren Entwickelung hier jetzt nicht in meiner Absicht liegt.

Sind die Entfernungen $E_0$ und $E_1$ im Verhältniss zu den Abmessungen des Ellipsoids nur klein, und ist das Ellipsoid wenig von einer Kugel verschieden, ist also auch $\varepsilon^2$ eine sehr kleine Grösse, so werden die Gleichungen

$$x_0X_0+y_0Y_0=-\tfrac{1}{2}E_1^2-(1+\varepsilon^2)z_0Z_0-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2Z_0^2,$$
$$x_1X_1+y_1Y_1=-\tfrac{1}{2}E_0^2-(1+\varepsilon^2)z_1Z_1-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2Z_1^2$$

sich nur wenig von den für die Kugel geltenden Gleichungen:

$$x_0X_0+y_0Y_0=-\tfrac{1}{2}E_1^2-z_0Z_0,$$
$$x_1X_1+y_1Y_1=-\tfrac{1}{2}E_0^2-z_1Z_1$$

oder

$$x_0X_0+y_0Y_0+z_0Z_0=-\tfrac{1}{2}E_1^2,$$
$$x_1X_1+y_1Y_1+z_1Z_1=-\tfrac{1}{2}E_0^2$$

unterscheiden. Vernachlässigt man die Glieder $\frac{1}{2}\varepsilon^2Z_0^2$ und $\frac{1}{2}\varepsilon^2Z_1^2$, welche besonders klein sind, weil sie die Quadrate der sehr kleinen Entfernungen $E_1$ und $E_0$ enthalten, so werden die Gleichungen für das Ellipsoid:

$$x_0X_0+y_0Y_0+(1+\varepsilon^2)z_0Z_0=-\tfrac{1}{2}E_1^2,$$
$$x_1X_1+y_1Y_1+(1+\varepsilon^2)z_1Z_1=-\tfrac{1}{2}E_0^2;$$

und sind also jetzt vom ersten Grade, weshalb bei dieser Vernachlässigung die Aufgabe für das Ellipsoid eine ganz ähnliche Auflösung zulassen wird wie für die Kugel. Diese Andeutungen mögen vorläufig genügen.

---

# XXXVII.

## Miscellen.

---

Schreiben des Hrn. Director Strehlke in Danzig an den Herausgeber.

### II.

Professor Richter in Elbing schreibt mir, dass er bei der Wiederholung seiner Berechnung der Zahl $\pi$ folgende Rechnungsfehler gefunden habe:

die 449. und 450. Decimale müssen 48 statt 64 und
die 480. Decimale muss 4 statt 5 heissen.

Ich lasse nun die von Herrn Professor Richter in Elbing berechnete Zahl $\pi$ auf 500 Decimalstellen *), nach obigen Angaben gehörig berichtigt, aus dem Elbinger Anzeiger. 1854. Nr. 85. (18. October) folgen:

Die Zahl $\pi$

in 500 Dezimalstellen, mit Verbesserung einiger früher durch ein Versehen unrichtig angegebener Stellen, ist = 3,14159 26535 89793
23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230
78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823
06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102
70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593
34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603
48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315
58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133
05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094 33057 27036 57595
91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548 07446 23799, 62749
56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912.

---

*) Man vergl. Archiv. Theil XXIII. S. 476.

## Berichtigungen.

Auf S. 133. Z. 5. v. o. statt: „Eine jede Fläche des Ikosaed[illegible] schneidet etc." setze man: „Eine jede Fläche des Ikosaed[illegible] welche an einem Axenende liegt, schneidet etc."

S. 235. Z. 1. v. o. statt „S. 114" s. m. „S. 118".

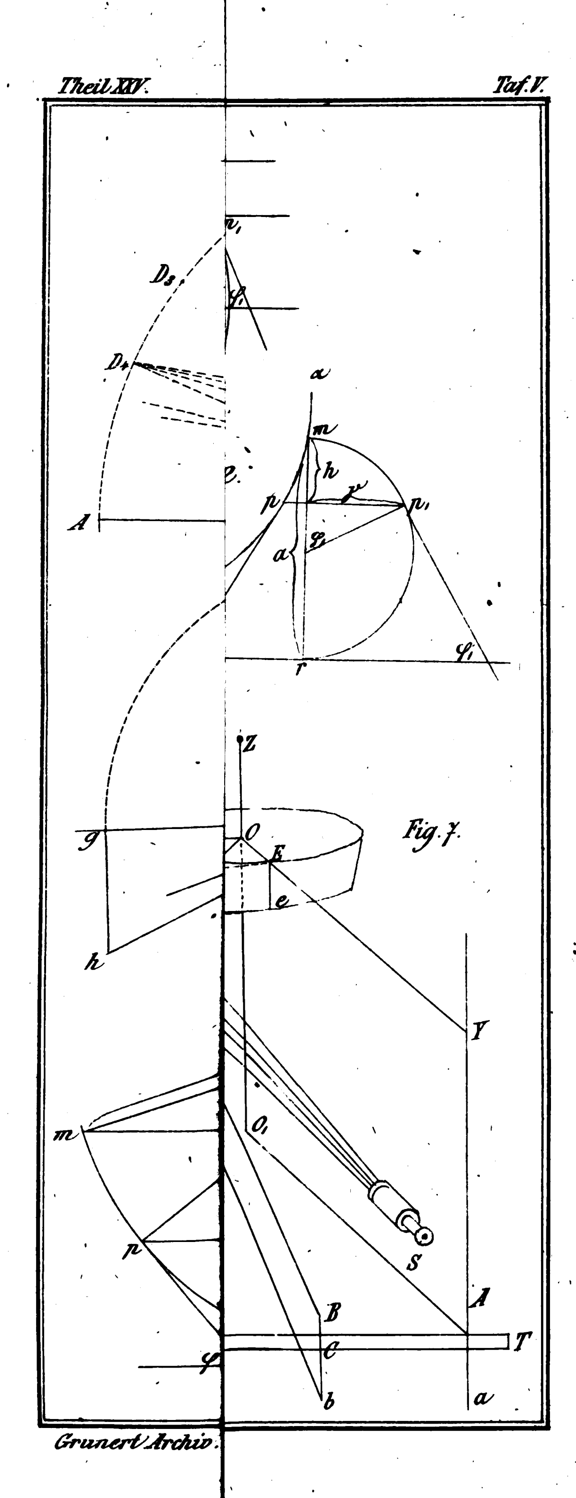
Fig. 1.

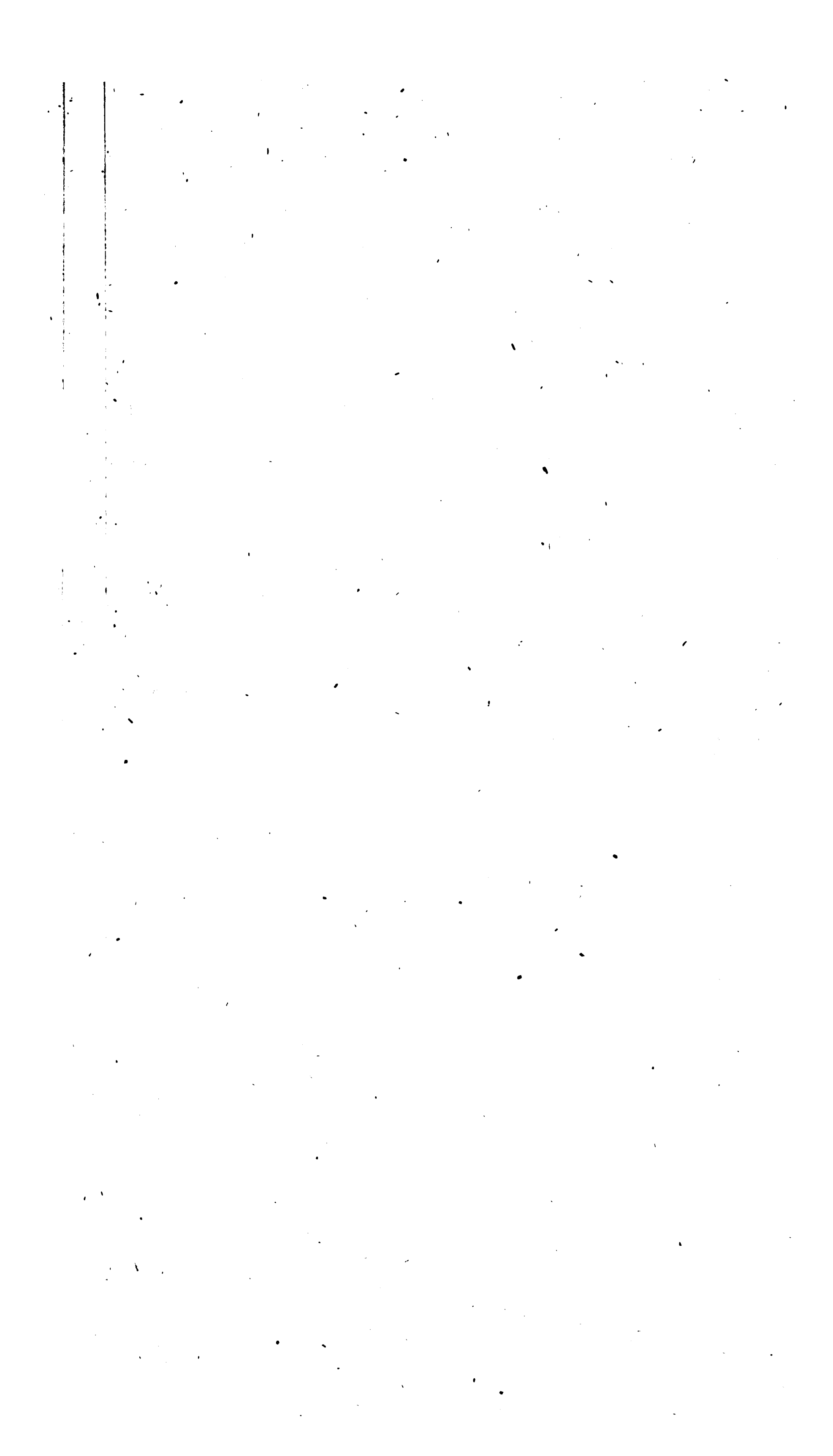
Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 8.


Fig. 7.
Z
O
E
e
Y
O,
S
A
B
C
T
b
a
m
p
h
g
A
a
m
h
p
p,
r
D3
D4



# Literarischer Bericht

## XCVII.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

**Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Fünfter Jahrgang. 1855. Wien. 8.**

Die vier früheren Jahrgänge dieses Almanachs sind in den Liter. Ber. Nr. LXVIII. S. 873., Nr. LXXVII. S. 961., Nr. LXXXVI. S. 1. angezeigt worden. Schon in Nr. LXVIII. S. 873. haben wir bemerkt, dass wir diese Publication der um die mathematischen und physikalischen Wissenschaften schon in der kurzen Zeit ihres Bestehens so hoch verdienten Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien für die Geschichte und Literatur der genannten Wissenschaften namentlich deshalb von besonderer Bedeutung halten, weil in diesen Almanachen vollständige Verzeichnisse, wie man sie sonst nirgends antreffen dürfte, der Schriften von Männern enthalten sind, denen die Mathematik, Astronomie und Physik so Vieles verdanken, wie Belli und Bordoni in Pavia, v. Burg in Wien, Carlini in Mailand; Doppler, v. Ettingshausen, Gintl, Haidinger, Koller, Kreil, Kunzek, v. Littrow, Moth, Petzval, v. Prechtl, sämmtlich in Wien; Santini in Padua, Salomon, Schrötter und Stampfer in Wien, Weisse in Krakau, u. s. w., wobei aber natürlich auch ausserdem die nähere Kenntniss der Geschichte und Organisation einer gelehrten Körperschaft, welche für die genannten Wissenschaften von so grosser Bedeutung ist, wie die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften, für jeden Mathematiker und Physiker von grossem Interesse sein muss. Was nun aber den vorliegenden Jahrgang des Almanachs insbesondere betrifft, so erfordert derselbe auch wegen seines speciellen, sehr interessanten und

lehrreichen Inhalts hier eine besondere Anzeige. Unter Nr. III. hat der General-Secretair der Akademie, Herr Professor Schrötter, einen Bericht über die Thätigkeit der Akademie für den Zeitraum vom 30. Mai 1853 bis dahin 1854 erstattet, in dem von Neuem der Beweis für die ausgezeichnete Stellung, welche die Kaiserliche Akademie unter den Instituten dieser Art gegenwärtig mit Recht einnimmt, in der deutlichsten Weise geliefert ist. Dann müssen wir besonders hervorheben die von Sr. Excellenz Herrn Minister v. Baumgartner als Präsident der Akademie gehaltene Rede über den Zufall in den Naturwissenschaften, welche wir für so interessant halten, dass wir sie unsern Lesern in diesem Hefte des Archivs vollständig mitgetheilt haben, und daher hier nichts weiter über dieselbe zu sagen brauchen. Endlich enthält auch die Rede des Herrn Professors E. Brücke: „über die Arbeitsthiere" so viel Interessantes und Wichtiges über die Leistungen der Arbeitsthiere in Rücksicht auf Physik und Mechanik, dass wir auf dieselbe hier besonders hinzuweisen uns für verpflichtet halten, so wie wir denn diesen Almanach überhaupt, aus den oben ausführlich dargelegten Gründen, in jeder Rücksicht unseren Lesern zu besonderer Beachtung empfehlen.

Almanach der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1855. München. 8.

Die Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften hat Almanache für die Jahre 1843, 1844, 1845, 1847, 1849 und so eben den für das laufende Jahr 1855 veröffentlicht. Wenn schon an sich die nähere Kenntniss der Geschichte und der inneren Organisation wissenschaftlicher Institute und gelehrter Körperschaften von so hoher Bedeutung, wie die am 28. März 1759 gestiftete Königliche Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München, welche sich auch hauptsächlich die Bearbeitung und Vervollkommnung der mathematischen und physikalischen Wissenschaften zur Aufgabe machen, für jeden Liebhaber dieser Wissenschaften von dem grössten Interesse sein muss, so gewinnt der vorliegende Almanach noch dadurch für die Geschichte und Literatur der genannten Wissenschaften an besonderer Bedeutung, weil er vollständige Verzeichnisse, wie man sie sonst nirgends antrifft, der Schriften von Männern enthält, denen die Mathematik und Physik und die übrigen Naturwissenschaften so Vieles verdanken, wie, um nur Einige zu nennen, Steinheil, Lamont, Schafhäutl, Seidel und Kuhn in der Mathematik, Astronomie und Physik; wie Buchner, Liebig, Vogel, Schafhäutl, Pettenkofer in der Chemie; wie v. Martius in der Botanik,

v. **Fuchs** in der Mineralogie, v. **Schubert** in der allgemeinen Naturgeschichte, u. s. w. Ausserdem enthält dieser Almanach, den wir hier mit besonderem Vergnügen anzeigen, auch ein vollständiges Verzeichniss der von der Akademie herausgegebenen selbstständigen Schriften einzelner Verfasser und Verzeichnisse des Inhalts ihrer Denkschriften, auch auf S. 1. — S. 75. die sehr interessante Geschichte ihrer Entstehung und der verschiedenen Phasen ihrer weiteren Entwickelung bis jetzt, ihre zu verschiedenen Zeiten gegebenen Statuten, Nachrichten über ihre neuesten wissenschaftlichen Arbeiten und Unternehmungen u. s. w., was Alles diesen Almanach für jeden Mathematiker und Physiker, namentlich in Rücksicht auf deren Geschichte und Literatur, zu einer sehr interessanten Erscheinung macht, weshalb wir denselben daher hier zu sorgfältigster Beachtung recht sehr empfehlen.

---

## Arithmetik.

**Bahnen höherer Gleichungen und neue Arten der Lösung und Näherung von J. Riedl v. Leuenstern. Mit eilf gestochenen Tafeln. Wien. 1852. 4.**

„Die **Bahn** einer homonymen Reihe von Zahlengleichungen", sagt der Herr Verfasser auf S. 3. seiner Schrift, „ist eine Krumme von der Ordnung der höchsten Potenz in ihrem Ausdrucke, deren Abscissen ($x$) veränderliche Werthe des letzten Gliedes der Einzelgleichungen, die Ordinaten ($y$) aber die jedem dieser Werthe entsprechenden Wurzeln sind. Sie bedingt demnach eine Gleichung zweier Veränderlichen, deren eine nur einmal, und zwar in der ersten Potenz, die andere in Gliedern mit verschiedenen Potenzen, Factoren und Zeichen erscheint; diese bestimmen das Gesetz der Krummen und sind für jede gegebene Bahn unveränderlich." — Es ist nicht ganz leicht, den Zweck und die Absicht, welche der Herr Verfasser bei Ausarbeitung und Publication dieser Schrift hatte, in ganz kurzen Worten, wie es die Natur dieser literarischen Berichte nöthig macht, anzugeben. Indess mag man im Allgemeinen der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man sagt, dass in derselben die Darstellung der Functionen der Gleichungen durch Curven gezeigt, besonders und zunächst Hülfsmittel zur Aufsuchung von besonders hervortretenden Hauptpunkten dieser Curven angegeben worden sind, deren Benutzung zur Construction der in Rede stehenden Curven gezeigt, und alles dieses zur Auflösung der numerischen Gleichungen durch Näherung angewandt worden ist, wobei der Herr Verfasser auch auf

S. 23. unter dem Namen einer Rechenmaschine ein Instrument zur Abkürzung und Vereinfachung der einschlagenden Rechnungen beschreibt. Die Beschränktheit des Raumes dieser literarischen Berichte nöthigt uns, die Leser des Archivs Behufs näherer Kenntnissnahme auf die Schrift selbst zu verweisen, indem wir nur noch bemerken, dass der Herr Verfasser in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins. 1853. Nr. 13., 14., 19., 20. und 1854. Nr. 5. einige Nachträge zu derselben und einige sein Verfahren zur Auflösung der numerischen Gleichungen weiter erläuternde Bemerkungen geliefert hat.

---

In einer Recension, wenn man überhaupt solche Machwerke, wie das nachher zu besprechende, so nennen darf, der Differential- und Integralrechnung von Herrn Professor Külp in Darmstadt, die in einem der neuesten Hefte der Göttinger gelehrten Anzeigen sich findet, wundert am Schluss derselben ihr Verfasser, Herr Doctor Schnuse, — der ja nun das Uebersetzungs-Handwerk wohl aufgegeben und im Interesse der mathematischen Literatur sich ganz auf's Recensiren verlegt hat, — sich darüber, dass das genannte Buch im Archiv. Literar. Ber. Nr. XCIII. S. 1. vor den meisten anderen neueren Erscheinungen auf dem Gebiete der höheren Analysis als verdienstlich hervorgehoben worden ist, namentlich deshalb, weil es den Schüler in zweckmässiger Weise in den Geist der neueren, durch Strenge und in allen anderen Beziehungen vor der älteren so sehr ausgezeichneten Analysis einführt. Dass darüber Herr Doctor Schnuse sich wundert, hat uns gar nicht gewundert; denn wo so ganz und gar keine Kenntniss und Verständniss dessen, was die neuere Analysis erstrebt und wodurch sie sich in Rücksicht auf wahre mathematische Strenge so sehr vor der älteren Analysis auszeichnet, sich findet, wie bei diesem Recensenten, ist es ganz natürlich und kann nicht im Geringsten befremden, dass demselben solche Urtheile, wie das im Archiv ausgesprochene, höchst wunderbarlich vorkommen müssen. Wenn aber namentlich Herr Schnuse, wie er neuerdings öfters beliebt, in seinen recensirenden Machwerken sich den Anschein eines Philosophen oder philosophischen Mathematikers zu geben sucht, fällt er im eigentlichen Sinne ganz dem Gebiete des Tragikomischen anheim. Wir haben uns also gar nicht gewundert, dass Herr Schnuse sich über jene Anzeige im Literarischen Berichte des Archivs gewundert hat. Darüber aber wundern wir uns, — und nicht wenige andere Mathematiker sich mit uns, — schon lange, dass eine so berühmte kritische Zeitschrift,

wie die Göttinger gelehrten Anzeigen, ihre Seiten immer noch mit **solchen!!** sogenannten Recensionen füllt. Dagegen hat es uns im Interesse der an ausgezeichneten kritischen Anzeigen anderer trefflicher Mitarbeiter auch im Gebiete der Mathematik ausgezeichneten Heidelberger Jahrbücher der Literatur wahrhaft gefreut, dass diese hochachtbare Zeitschrift Herrn Schnuse neuerlich aus der Reihe ihrer Mitarbeiter wohl gestrichen haben mag, wie dies uns wenigstens scheinen will, weil wir in derselben Herrn Schnuse seit lange nicht mehr, wie früher öfters, zu unserer Ergötzung zu begegnen das Vergnügen gehabt haben. Wir hoffen und wünschen uns nicht zu täuschen, wenn wir die Meinung hegen, dass diesem hochachtbaren Journale die Göttinger gelehrten Anzeigen in ihrem eigenen Interesse hierin bald nachfolgen werden. Grunert.

---

Einige Sätze aus den Anfangsgründen der Zahlenlehre von Brennecke, Director der städtischen Realschule zu Posen. (Programm der genannten Lehranstalt von Ostern 1855.)

In diesem den Lesern zur Beachtung zu empfehlenden Programm hat der Herr Verfasser eine zweckmässige Zusammenstellung einiger der wichtigsten Sätze der Zahlenlehre oder Theorie der Zahlen geliefert, und zunächst mit richtigem Takte namentlich das ausgewählt, was auch für den gewöhnlichen arithmetischen Unterricht von Wichtigkeit ist und zu dessen Vervollständigung dient, besonders also die Lehre von der Theilbarkeit und den Theilern der Zahlen, die Kennzeichen der Theilbarkeit, und was weiter hierher gehört. Auch die Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung zur Ausziehung der Quadratwurzel fehlt nicht. Dann finden wir die Congruenz der Zahlen; das Fermat'sche und Wilson'sche Theorem, beide auch in erweiterter Gestalt; das Reciprocitätsgesetz; die quadratischen Reste und Nichtreste und vieles andere hierher Gehörige. Je weniger die höhere Zahlenlehre noch bekannt zu sein scheint, desto mehr verdienen Schriften, wie die vorliegende, Beachtung, da dieselben jedenfalls geeignet sind, dergleichen wichtigen Theilen der Wissenschaft eine grössere und allgemeinere Anerkennung und Verbreitung zu verschaffen und zu sichern.

---

## Geometrie.

Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geo-

**metrischer Darstellung. Von A. F. Möbius. Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig. Hirzel. 1855.**

Die Kreisverwandtschaft erklärt der Herr Verfasser auf S. 534. auf folgende Weise: „Angenommen, dass in zwei Ebenen jedem Punkte der einen ein Punkt, und nicht mehr als einer, in der andern dergestalt entspricht, dass von je vier Punkten der einen, welche in einem Kreise liegen, die entsprechenden in der andern gleichfalls in einem Kreise enthalten sind, so soll jedes System von Punkten der einen Ebene und das von den entsprechenden Punkten in der andern gebildete System, also auch jede Linie der einen und die Linie der andern, welche die den Punkten der erstern Linie entsprechenden Punkte verbindet, einander kreisverwandt heissen."

„Hierbei machen wir, dem Princip der Stetigkeit gemäss, noch die Voraussetzung, dass von je zwei einander unendlich nahen Punkten der einen Ebene die entsprechenden in der andern gleichfalls — wenigstens im Allgemeinen — einander unendlich nahe sind."

Diese neue Art der Verwandtschaft, welche eine ziemliche Anzahl merkwürdiger Beziehungen darbietet, hat der um die reine Geometrie schon so vielfach verdiente Herr Verfasser in dieser sehr lesenswerthen und sehr zur Beachtung zu empfehlenden Abhandlung einer ausführlichen Untersuchung unterworfen, wobei er sich zwar der rein geometrischen Darstellungsweise bediente, aber doch, wie schon in seinem „Barycentrischen Calcul", die Allgemeinheit, welche die analytische Methode gewährt, mit der Anschaulichkeit der rein geometrischen dadurch zu verbinden suchte, dass er in den Ausdrücken für Raumgrössen durch Nebeneinanderstellung von Buchstaben, welche deren Begrenzung bezeichnen, auf die Aufeinanderfolge dieser Buchstaben stets die gehörige Rücksicht nahm, eine Darstellungs- und Entwickelungsweise, von der Herr Möbius bekanntlich schon sehr viele fruchtbare Anwendungen gemacht hat und die zu allgemeinerem Gebrauche bei Untersuchungen aus dem Gebiete der reinen Geometrie jedenfalls sehr empfohlen zu werden verdient, so wie wir denn überhaupt sehr wünschen, dass namentlich auch die vorliegende verdienstliche Abhandlung die allgemeinste Beachtung bei allen Liebhabern der feineren Geometrie finden möge.

**Ueber das vergleichende Maass der Körperwinkel von Joseph Riedl von Leuenstern. Aus den naturwis-**

**senschaftlichen Abhandlungen, gesammelt und durch Subscription herausgegeben von W. Haidinger. II. Band. II. Theil. S. 1. 4.**

**Ueber die Summe der Körperwinkel an Pyramiden. Von J. Riedl von Leuenstern. Aus denselben Abhandlungen. III. Band. 2. Abth. S. 87. 4.**

**Ueber Raute, Prisma und Kegel in akronometrischer Beziehung. Von Joseph Riedl von Leuenstern. Aus denselben Abhandlungen. IV. Band. 2. Abth. S. 47.**

Diese drei in enger Verbindung mit einander stehenden, stereometrische Untersuchungen enthaltenden Abhandlungen scheinen bisher, unverdienter Weise, ziemlich unbeachtet geblieben zu sein. Als Grundgedanke derselben, dessen weiterer Entwickelung im Allgemeinen hauptsächlich die erste Abhandlung gewidmet ist, kann man die Auffindung und Angabe eines allgemeinen Maasses der körperlichen Winkel bezeichnen, durch welches dieselben in eben so einfacher Weise gemessen und unter einander verglichen werden können, wie die ebenen Winkel mittelst ihrer bekannten Maasse. Dass der Herr Verfasser dabei auf den achten Theil der Kugelfläche oder den sogenannten sphärischen Octanten kommen musste, war natürlich und liess sich erwarten; er ist dabei in gewisser Rücksicht zusammengetroffen mit dem Herausgeber des Archivs, welcher in einer schon im Jahre 1830 in dem Crelleschen Journal. Thl. V. S. 37. unter dem Titel: „Einige stereometrische Sätze“ veröffentlichten Abhandlung körperliche Winkel schon auf dieselbe Weise gemessen hat und dadurch zu verschiedenen bemerkenswerthen Sätzen über die Polyeder gelangt ist, die auch späterhin in verschiedenen Lehrbüchern, z. B. in der „Uebersetzung und Bearbeitung der Geometrie von van Swinden von Jacobi“ reproducirt worden sind. Herr Riedl von Leuenstern ist aber bei der in Rede stehenden Messung der körperlichen Winkel noch einige wesentliche Schritte weiter gegangen, wie der Herausgeber des Archivs bei seinen angeführten Untersuchungen, indem er z. B. auf S. 4. der ersten Abhandlung einen Grad einer Kugelfläche nach einem besonders von ihm aufgestellten Begriffe in die Betrachtung einführt und davon, so wie auch noch von verschiedenen anderen Begriffen, auf die wir hier der Beschränktheit des Raumes wegen nicht weiter eingehen können, vortheilhafte Anwendungen macht. In der zweiten und dritten Abhandlung sind die in der ersten niedergelegten allgemeinen Betrachtungen und festgestellten Begriffe auf die auf deren Titeln genannten Körper: Pyramide, Raute,

Prisma und Kegel angewandt, und diese Körper auch noch aus andern Gesichtspunkten, immer aber vorzugsweise in Bezug auf ihre körperlichen Winkel, betrachtet worden. Dass der Herausgeber allen stereometrischen Untersuchungen von der Tendenz der von Herrn Riedl von Leuenstern angestellten eine gewisse Wichtigkeit beizulegen geneigt ist, geht schon daraus hervor, dass er, wie schon erinnert, früher selbst diesen Gegenständen seine Aufmerksamkeit gewidmet hat; er thut dies aber jetzt noch weit mehr, weil er immer mehr und mehr die Ueberzeugung gewinnt, dass unsere jetzige Stereometrie noch sehr der Vervollkommnung bedarf, und, natürlich mit Ausnahme der eigentlichen Berechnung der Volumina und Oberflächen der Körper, in der That wenig darbietet, was einer weiteren fruchtbaren Anwendung fähig ist. Eine solche weitere Anwendbarkeit der stereometrischen Lehrsätze herbeizuführen oder wenigstens vorzubereiten, scheinen aber Untersuchungen wie die in den vorliegenden Abhandlungen angestellten wohl geeignet zu sein, weshalb wir die Leser des Archivs bitten, dieselben nicht ganz unbeachtet zu lassen. G.

---

# Optik.

Der hohe Preis, in welchem gute optische Instrumente, namentlich aber die Fernröhre von etwas grösseren Dimensionen, bis jetzt gestanden haben und noch stehen, ist gewiss der so sehr zu wünschenden grösseren Verbreitung dieser Instrumente bisher sehr hinderlich gewesen, und hat vorzugsweise nur gut dotirten öffentlichen Instituten und einzelnen reicheren Liebhabern der mathematischen und physikalischen Wissenschaften deren Anschaffung möglich gemacht. Im höchsten Grade erfreulich ist es daher, dass Herr Ministerialrath Steinheil in München dort so eben ein Institut in's Leben gerufen hat, welches diesem Uebelstande in kräftigster und dankenswerthester Weise abzuhelfen verspricht, und für sein vollständiges Gelingen und die Trefflichkeit der aus ihm hervorgehenden Instrumente in dem grossen praktischen Talente und der eben so grossen, ausgezeichneten und gründlichen theoretischen Kenntniss aller Theile der mathematischen und physikalischen Wissenschaften, welche in so ungemein seltener Weise in dem berühmten Begründer dieses Instituts vereinigt sind, das vollständigste Gewähr findet und dadurch die vollständigste Bürgschaft leistet. Es macht mir daher sehr grosse Freude, den Lesern des Archivs das Programm, welches Herr Ministerialrath Steinheil über die Eröffnung seines Instituts so eben veröffentlicht hat, im Folgenden mittheilen zu können, was

ich vollständig thue, weil die Leser dadurch am Besten mit dem Zwecke dieses Instituts bekannt werden. Auch nur ein flüchtiger Blick in das Preisverzeichniss wird jeden Kundigen von der Niedrigkeit der gestellten Preise, namentlich in Verhältniss zu den bisher gewöhnlichen, auf der Stelle überzeugen, und die Wissenschaft muss und wird es jedenfalls Herrn Ministerialrath Steinheil besonderen Dank wissen, dass er in solcher Weise, deren Einfluss auf die Förderung der Wissenschaft in der allseitigsten Richtung gewiss nicht ausbleiben wird, für die Bedürfnisse auch weniger bemittelter Gelehrter und weniger gut dotirter Institute gesorgt hat. Hauptsächlich sind auch alle Gymnasien, Real- und höheren Bürgerschulen, Gewerbeschulen und ähnliche Lehranstalten, die meistens in die vorher erwähnte letztere Kategorie gehören, auf dieses neue Institut aufmerksam zu machen, indem sie schwerlich irgendwo anders ihre Bedürfnisse zweckmässiger und in einer ihren Verhältnissen mehr entsprechenden Weise zu befriedigen im Stande sein werden. Wenn auch, wie bereits erinnert, schon der Name des Herrn Ministerialraths Steinheil für die Trefflichkeit der aus dem Institute hervorgehenden Instrumente vollständige Bürgschaft leistet, so will ich doch zu bemerken nicht unterlassen, dass, wie ich bestimmt weiss, mehrere dieser Instrumente, selbst bei nicht ganz günstigen atmosphärischen Verhältnissen, auf der jetzigen grossen Pariser Industrie-Ausstellung von so ausgezeichneten Kennern, wie Brewster, Leverrier, Mathieu u. A., die günstigste Beurtheilung gefunden haben. Steinheil'sche Fernröhre von 6 Fuss Brennweite, die eine 360malige Vergrösserung recht gut ertragen, sollen bei 42 Linien Oeffnung des Objectivs mehr leisten, als aus anderen Werkstätten hervorgegangene Fernröhre mit Objectiven von 4 Zoll Oeffnung.

Es gereicht mir zur besonderen Genugthuung und macht mir besondere Freude, durch das sich einer weiten Verbreitung erfreuende Archiv, indem ich das folgende Programm den Lesern nicht bloss auszugsweise, sondern vollständig mittheile, zu der im höchsten Grade wünschenswerthen Bekanntwerdung dieser so sehr verdienstlichen Unternehmung in einem möglichst weiten Kreise Einiges beitragen zu können, und wünsche sehr, dass Herr Ministerialrath Steinheil durch recht reichliche Abnahme für die grossen Kosten, welche die Gründung eines solchen Instituts nothwendig aufzuwenden erfordert, einigermassen entschädigt werden möge. Auch wird es mir besonderes Vergnügen machen, über die Leistungen eines kleineren Tubus von 24 Linien Oeffnung und 24 Zoll Brennweite mit 56 und 120maliger Vergrösserung, zu dem so sehr geringen Preise von 66 Gulden, welchen ich bald aus dem neuen Institute

zu erhalten hoffe, vielleicht auch später über ein grösseres Fernrohr, in dem Archive Bericht zu erstatten. Grunert.

# ERÖFFNUNG

der optischen und astronomischen Werkstätte

von

## C. A. Steinheil in München.

Die Absicht, welche diese Anstalt in's Leben gerufen hat, ist: dem grossen Publikum vollkommene optische Instrumente, diese unentbehrlichsten Hülfsmittel zum Studium der Natur, durch möglichst niedrige Preise leicht und allgemein zugänglich zu machen und vielleicht auf diesem Wege beizutragen zur Erhaltung des Ruhmes, den Fraunhofer für Bayern darin gegründet hat. Mit besonderer Vorliebe seit 30 Jahren den optischen Studien ergeben, bin ich jetzt im Besitze der Erfahrungen und der Hülfsmittel, welche die Wahl und die Bestimmung der Glasarten (die ich von Daguet in Solothurn beziehe), die Rechnung und die Herstellung der richtigen Gestalten erfordern, wenn Gutes geleistet werden soll. Durch meine Productionsmethoden bin ich nicht nur in den Stand gesetzt, Objective herzustellen, die als identisch zu betrachten, also von gleicher Güte sind, sondern auch die gewünschte Vollendung mit verhältnissmässig geringer Arbeit*) zu erreichen, so dass ich die Preise meiner Objective auf die Hälfte und bei grössern auf noch weniger gestellt habe, als gleich gute Objective jetzt kosten. Um diesen Vortheil aber nicht bloss andern Werkstätten, sondern auch dem Publikum, was ganze Instrumente verlangt, direkt zuzuwenden, beziehe ich die Montirungen der Fernröhre, Tubus etc. aus Werkstätten, die nur Montirungen liefern, und setze dafür auch nur die selbst ausbezahlten, mit Rücksicht auf vollendete Arbeit auf ein Minimum reducirten Preise an, so dass sich die Thätigkeit der eigenen optischen Werkstätte auf die Herstellung und Fassung der Objective und Okulare und auf Zusammenstellung und Prüfung der Instrumente beschränkt. Nur durch diese Einrichtung und völlig gesicherten grossen Absatz wird es möglich, auch ganze Instrumente, die in allen wesentlichen Theilen die höchste Vollendung besitzen, um so niedrige Preise herzustellen. Daher sind nachfolgende Bestimmungen als nothwendig erachtet und festgestellt worden.

---

*) Hierzu trägt das ausgezeichnete Eisenoxyd des Prof. Vogel jun., dessen ich mich ausschliesslich bediene, wesentlich bei.

1. Die Werkstätte arbeitet nur auf Bestellungen; die Ablieferung erfolgt der Zeit nach in der Ordnung, in der bestellt wurde.
2. Man richtet die Bestellungen franco an die optische und astronomische Werkstätte von C. A. Steinheil in München. Es wird nirgends ein Depot dieser Instrumente errichtet und es erhält kein Unterhändler Rabatt.
3. Die Hälfte des Kaufpreises wird bei der Bestellung, die andere Hälfte bei Abgabe der Instrumente franco entrichtet.
4. Für Transport übernimmt die Werkstätte keine Haft. Auf Verlangen besorgt sie Verpackung und Absendung, die besonders verrechnet werden und beim Empfang zu vergüten sind.

## Vorläufige Zusammenstellung einiger Gegenstände, welche aus der optischen und astronomischen Werkstätte von C. A. Steinheil in München um die beigesetzten Preise abgegeben werden.

### *a.* Achromatische Doppelobjective.

1. Alle Objective werden nur aus Glas bearbeitet, welches sich bei der strengsten Prüfung jeder Linse vollkommen homogen zeigt. Von allen Glasarten ist die Brechung für die Fraunhofer'schen fixen Linien B, C, D, E, F und G auf's Schärfste bestimmt.

2. Das secundäre Spectrum ist so gelegt, wie es Compensationsprismen aus denselben Glasarten zeigen, wenn die Deutlichkeit der Ränder ein Maximum ist.

3. Der Kugelgestaltfehler ist über das ganze Objectiv vom Rande bis zur Mitte streng gehoben, was bekanntlich durch sphärische Flächen nicht erreicht werden kann.

4. Je nach der Bestimmung des Bestellers werden die Objective verschieden construirt, und zwar:

a. Crown- und Flintglaslinse sind in einander gepasst und verkittet. Der Kitt erhartet nicht und verspannt die Linsen nicht, sondern schützt die verkitteten Glasflächen vollständig. Der Vortheil dieser Construction ist, dass zwei Flächen und damit ihre Reflexbilder und unvermeidlichen Gestaltfehler verschwinden, wodurch die Helligkeit caet. par. $\frac{1}{7}$ gewinnt.

b. Die Objective sind so berechnet, dass sie bei Einführung eines Glasprisma's in den Lichtkegel zum Brechen der Axe oder bei Anwendung von Parallelgläsern als Heliometer (nach Clausen) ein richtiges Bild geben.

Die Preise für beide Constructionen sind gleich.

5. Grosse Oeffnungen im Verhältniss zur Brennweite sind für lichtschwache Objecte und für schwache Vergrösserungen bestimmt. Dagegen sind grosse Brennweiten — selbst weit grösser als man bisher in Anwendung brachte — bei verhältnissmässig kleinen Oeffnungen durchaus erforderlich, um auf hell beleuchtete Objecte mit sehr starken Vergrösserungen noch vollkommen scharfes, schwarzes Bild zu erhalten.

Dimensionen im Pariser Duodecimalfuß. — Geld im Münzvereins-Guldenfuß.

*a.*

**Achromatische Doppelobjective in Fassung.**

| Freie Oeffnung | Brennweite | Preis | | Freie Oeffnung | Brennweite | Preis | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| in Linien | in Zollen | Fl. | Kr. | in Linien | in Zollen | Fl. | Kr. |
| 6 | 3 u. 4 | 4 | — | 54 | 68. 108 | 280 | — |
| 9 | 4 u. 6 | 5 | — | 60 | 75. 120 | 377 | — |
| 12 | 9 u. 12 | 7 | — | 66 | 82. 140 | 492 | — |
| 15 | 12 u. 15 | 11 | — | 72 | 96. 160 | 627 | — |
| 18 | 12 u. 18 | 15 | — | 78 | 108. 180 | 782 | — |
| 21 | 16 u. 21 | 19 | 30 | 84 | 124. 192 | 970 | — |
| 24 | 19. 24. 38 | 25 | — | 96 | 144. 216 | 1386 | — |
| 27 | 27. 33. 42 | 33 | — | | | | |
| 30 | 30. 36. 48 | 43 | — | | | | |
| 33 | 33. 42. 53 | 60 | — | | | | |
| 36 | 36. 46. 60 | 86 | — | | | | |
| 42 | 42. 53. 72 | 139 | — | | | | |
| 48 | 48. 60. 95 | 200 | — | | | | |

Jedes der Objective mit der grössern Brennweite erträgt die Anwendung des stärksten der nachstehenden Okulare, dessen Aequivalentbrennweite $\frac{1}{5}$ Zoll ist, also eine Vergrösserung, die gleich ist 5mal der Brennweite des Objectives in Zollen.

*b.* **Okulare.**

Von den astronomischen Okularen (A.) werden dreierlei Constructionen ausgeführt:

Aa. Das Euler'sche Okular, bei welchem das Bild zwischen Collectiv- und Okularlinse liegt. Der farbige Rand ist gehoben und das Gesichtsfeld durch doppelte Okularlinse vergrössert.

Ab. Achromatisches Okular mit Bild zwischen Collectiv- und Okularlinse. Die Okularlinse ist aus einer Crown- und einer Flintglaslinse, die in einander gepasst und verkittet sind, zusammengesetzt und hebt die Farben in der Axe für alle 3 Linsen. Die Verzerrung ist gehoben und es sind Mitte und Rand des Gesichtsfeldes nahe gleich deutlich.

Ac. Achromatisches Mikrometerokular. Das Bild liegt vor dem Collectiv. Farbenzerstreuung in und ausser der Axe und die Verzerrungen sind gehoben. Der Gestaltfehler so vermindert, dass er unter der Sensibilitätsgrenze des Auges liegt.

Von terrestrischen Okularen (B.) werden ebenfalls drei Constructionen ausgeführt:

Ba. Das Dollond'sche, auch von Fraunhofer gewählte Okular aus 4 plan-convexen Linsen. Bilder zwischen der 3. und 4. Linse und vor dem 1. Collectiv. Farbiger Rand und Verzerrung gehoben.

Bb. Achromatisches Okular. Bilder zwischen der 2. und 3., dann 3. und 4. Linse. Farben in und ausser der Axe gehoben. Gesichtsfeld nahe doppelt so gross als bei Ba. Ist kürzer als die bisherigen und reicht nur 2 Zoll über den Brennpunkt des Objectives.

Bc. Achromatisches Okular nach Construction Ba., wobei jedoch die 2. und 4. Linse durch achromatische Objective ersetzt sind. Farben in und ausser der Axe compensirt. Verzerrung gehoben. Gesichtsfeld $\frac{1}{4}$ grösser als bei Ba.

*b.*

| Bezeichnung der Okulare. | Brennweite der äquivalenten Linse | Preise | | Bezeichnung der Okulare. | Brennweite der äquivalenten Linse | Preise | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Zolle | Fl. | Kr. | | Zolle | Fl. | Kr. |
| Aa. 1. | 0.2 | 3 | — | Ba. 1. | 0.43 | 4 | — |
| Aa. 2. | 0.25 | 3 | — | Ba. 2. | 0.80 | 5 | — |
| Aa. 3. | 0.33 | 3 | 30 | Ba. 3. | 0.84 | 8 | — |
| Aa. 4. | 0.50 | 4 | — | | | | |
| Aa. 5. | 1.00 | 6 | — | | | | |
| Aa. 6. | 1.50 | 10 | — | | | | |
| Ab. 1. | 0.30 | 8 | — | Bb. 1. | 0.71 | 25 | — |
| Ab. 2. | 0.60 | 8 | — | | | | |
| Ab. 3. | 1.20 | 9 | — | | | | |
| Ac. 1. | 0.26 | 10 | — | Bc. 1. | 0.70 | 14 | — |
| Ac. 2. | 0.35 | 10 | — | | | | |
| Ac. 3. | 0.46 | 10 | — | | | | |
| Ac. 4. | 0.62 | 10 | — | | | | |
| Ac. 5. | 0.82 | 11 | — | | | | |
| Ac. 6. | 1.10 | 12 | — | | | | |

Man findet die Vergrösserung jedes dieser Okulare bei jedem Objective, wenn des letzteren Brennweite in Zollen dividirt wird mit der Brennweite der äquivalenten Linse des Okulares.

### *c.* Plan- und Parallelgläser
in runder Form.

Diese werden um die halben Preise der achromatischen Doppelobjective von gleicher Oeffnung abgegeben. S. *a.*

### *d.* Rechtwinkelige Crownglas-Prismen
mit vollkommenen Planflächen.

Die Kathetenflächen sind Quadrate. Die Seite des Quadrates ist als Oeffnung des Prismas gerechnet. Bei den Prismen, die 1 Zoll und mehr Oeffnung haben, sind die Kathetenflächen rund facettirt.

*d.*

| Oeffnung des Prismas | Preis | Oeffnung des Prismas | Preis |
|---|---|---|---|
| in Linien | Fl. | in Linien | Fl. |
| 3 | 3 | 27 | 51 |
| 6 | 4 | 30 | 70 |
| 9 | 5 | 33 | 98 |
| 12 | 7 | 36 | 132 |
| 15 | 12 | 39 | 170 |
| 18 | 19 | 42 | 213 |
| 21 | 27 | 45 | 262 |
| 24 | 38 | 48 | 318 |

*e.* **Zugfernröhre.**

| Oeffnung | Brennweite | Vergrösserung | Preis | | Bezeichnung des Okulars |
|---|---|---|---|---|---|
| Linien | Zolle | | Fl. | Kr. | |
| 6 | 4 | 9 | 9 | — | Ba. 1. |
| 9 | 6 | 14 | 10 | 30 | Ba. 1. |
| 12 | 12 | 28 | 12 | — | Ba. 1. |
| 15 | 12 | 28 | 18 | — | Ba. 1. |
| 24 | 19.5 | 45 | 35 | — | Ba. 1. |
| 24 | 19.5 | 25 | 36 | — | Ba. 1. |
| 24 | 24 | 56 | 37 | — | Ba. 1. |
| 36 | 36 | 84 | 110 | — | Ba. 1. |
| 36 | 42 | 53 | 115 | — | Ba. 2. |
| 36 | 36 | 45 | 110 | — | Ba. 2. |

*f.* **Tubus in Holzrohr ohne Stativ.**

| Oeffnung | Brennweite | Bezeichnung des Okulars | Vergrösserung | Preis |
|---|---|---|---|---|
| Linien | Zolle | | | Fl. |
| 24 | 19.5 | Ba. 1. | 45 | 33 |
| 36 | 42 | Ba. 2. | 53 | 108 |
| 36 | 46 | Ba. 2. | 58 | 108 |
| 42 | 42 | Ba. 1. | 100 | 163 |
| 48 | 60 | Ba. 1. | 143 | 270 |

*g.* **Tubus mit Stativ in Messing.**

| Oeffnung | Brennweite | Bezeichnung des Okulars | Vergrösserung | Preis |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 12 | Ba. 1. | 28 | 36 |
| | | Aa. 1. | 60 | |
| 24 | 24 | Ba. 1. | 56 | 66 |
| | | Aa. 1. | 120 | |

Auf Verlangen werden bei sämmtlichen Fernröhren die Okulare gegen andere des Verzeichnisses *b.* umgetauscht oder noch weitere dazu gegeben. Preis nach dem Verzeichniss *b.*

In dem obigen vorläufigen Verzeichnisse sind das Mikroskop, der photographische Apparat und sämmtliche Messinstrumente für Astronomie noch hinweggelassen, indem ich ihre Hinausgabe späterer Zeit vorbehalte. Musterinstrumente sind in Paris ausgestellt und es können solche auch dahier jeden Mittwoch und Sonntag des Nachmittags von 3 Uhr bis 6 Uhr eingesehen werden.

München, im Mai 1855.

**Dr. Carl August Steinheil,**

*K. B. Ministerialrath und technischer Beirath im Handelsministerium. Conservator der mathemat.-phys. Sammlung des Staats. Ritter des K. Bayer. Maximiliansordens für Wissenschaft, des heil. Michael- und des K. Dänischen Danebrog-Ordens. Besitzer der goldenen Medaille für vaterländische Industrie pro 1834. Mitglied der Beurtheilungs-Commission der allgemeinen Deutschen Industrie-Ausstellung pro 1854. Jury-Mitglied der Industrie-Ausstellung zu Paris pro 1855. Ordentl. Mitglied der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften, der Kais. Leopold-Carol.-Akademie der Naturforscher in Breslau. Corresp. Mitglied der Kaiserl. Russ. Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg, der K. K. Akademie der Wissenschaften in Wien, der K. Hannov. Societät der Wissenschaften in Göttingen, der K. Belg. Societät der Wissenschaften in Lüttich, Ehrenmitglied der K. Schott. Society of arts in Edinburg, der K. Russ. Universität in Kasan, des niederösterr. Gewerbevereins in Wien, des polytechn. Vereins in Frankfurt a. M., der polytechn. Gesellschaft in Leipzig, der naturforsch. Gesellschaft in Moskau, der pfälzischen Gesellschaft für Pharmacie und Technik in Kaiserslautern, des niederrhein. landwirthschaftl. Vereins in Rheinpreussen, der naturforschenden Gesellschaft, des Albrecht-Dürer-Vereins und des Gewerbvereins in Nürnberg, des Nationalvereins für Handel und Gewerbe in Leipzig, etc.*

## Physik.

**Ueber die Schwingungen homogener elastischer Scheiben. Von Dr. Strehlke, Director der Petrischule zu Danzig. (Programm dieser Schule von Ostern 1855.)**

Die Verdienste, welche Herr Director Strehlke in Danzig sich durch seine akustischen Untersuchungen erworben hat, sind bekannt genug. In diesem sehr lesenswerthen Programm, welches jedoch nur der Vorläufer einer grösseren, späterhin in den Schriften der Danziger naturforschenden Gesellschaft zu publicirenden Arbeit ist, theilt er eine Reihe neuer Versuche über die Schwingungen homogener elastischer Scheiben mit. Er beschränkte sich bei denselben, bei der Kostbarkeit genau planparalleler Scheiben, auf quadratische und Kreisscheiben, und benutzte überhaupt 14 Scheiben, nämlich 5 quadratische von Spiegelglas, 7 Kreisscheiben gleichfalls von Spiegelglas, 2 Kreisscheiben aus Kupfer und Messing. Die beste Art, die Versuche anzustellen, und der dabei angewandte Messapparat werden ausführlich in sehr lehrreicher Weise beschrieben, und die Versuche fielen so genau aus, dass Differenzen zwischen den durch sie gewonnenen Resultaten und den von Herrn Kirchhoff aus der von ihm entwickelten Theorie der schwingenden elastischen Kreisscheiben berechneten Durchmessern der Knotenkreise nur erst in der vierten Decimale hervortraten, oder im Allgemeinen die auf beiden Wegen gewonnenen Resultate bis auf Tausendtheile des als Einheit angenommenen Scheibendurchmessers mit einander übereinstimmten. Die bei diesen Untersuchungen hervortretenden, von dem Herrn Verfasser mit aller bei solchen Arbeiten irgend zu erreichenden Genauigkeit berechneten Curven bieten sehr viel Interessantes dar, namentlich die auf S. 10. und S. 11. behandelte Curve, so wie denn diese Abhandlung überhaupt in allen ihren Theilen das rühmlichste Zeugniss von dem Geschick des Herrn Verfassers ablegt, und den Leser sehr begierig macht, die zu erwartende grössere Arbeit baldigst kennen zu lernen. Wir machen daher die Leser des Archivs sehr auf dieses lehrreiche Programm aufmerksam und wünschen auch, dass die Verfasser physikalischer Lehrbücher künftighin mehr von diesen verdienstlichen Untersuchungen Notiz nehmen möchten, als dies bisher geschehen zu sein scheint. Durch das K. Preuss. Hohe Ministerium des Unterrichts und die K. Akademie der Wissenschaften in Berlin ist der Herr Verfasser bei diesen verdienstlichen Untersuchungen in der liberalsten, nicht genug anzuerkennenden Weise durch Gewährung der nöthigen Hülfsmittel unterstützt worden.

---

## Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. XCIV. S. 5.)

Jahrgang 1854. Band XIV. 1. Heft. S. 3. Haidinger: Graphische Methode annähernder Winkelmessungen, besonders an kleineren Krystallen. — S. 41. Spitzer: Ueber die Kriterien des Grössten und Kleinsten bei den Problemen der Variationsrechnung (Fortsetzung). — S. 125. Littrow: Bemerkungen über das von Herrn M. Eble überreichte neue Zeitbestimmungswerk. — S. 128. Oeltzen: Zusammenstellung von Quellen für Sternörter zwischen dem 45. und 80. Grade der nördlichen Declination, mit Ausschluss der Argelander'schen Zonen. — S. 197. Derselbe: Nachweis des Vorkommens von Sternen aus den Argelander'schen nördlichen Zonen in anderen Quellen (Nachtrag). — S. 201. Petzval: Ueber Herrn Dr. Heger's Abhandlung, die Auflösung von algebraischen Buchstabengleichungen betreffend.

Jahrgang 1854. Band XIV. 2. Heft. S. 287. Gintl: Erläuternde Bemerkungen über die von Herrn Professor Zantedeschi in Padua angestellten Versuche, betreffend die gleichzeitige Fortpflanzung zweier elektrischen Ströme nach entgegengesetzten Richtungen in demselben Leitungsdrathe. — S. 292. Schreiben des Herrn Lieutenants Maury über einen neu entdeckten Planeten. — S. 295. Haidinger: Die Interferenzlinien am Glimmer. Berührungsringe und Plattenringe. — S. 315. Streffleur: Die Darstellung der orographischen Verhältnisse in Uebersichtskarten und Reliefs. — S. 330. Haidinger: Annähernde Bestimmung der Brechungs-Exponenten am Glimmer und Pennin. — S. 336. Reslhuber: Ueber den Ozongehalt der atmosphärischen Luft.

Jahrgang 1854. Band XIV. 3. Heft. S. 385. Reslhuber: Ueber die Temperatur der Quellen von Kremsmünster. — S. 397. Kreil: Ueber ein neues Reisebarometer. — S. 398. Littrow: Beitrag zur Kenntniss der Grundlagen des Piazzi'schen Sterncatalogs. — S. 400. Gintl: Der elektro-chemische Schreib-Telegraph auf die gleichzeitige Gegen-Correspondenz an einer Drathgleitung angewendet. (Mit 6 Tafeln.)

---

**Die Unterzeichneten beehren sich hiermit zur Kenntniss zu bringen, dass die Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte, welche im Monat September d. J. in Wien hätte abgehalten werden sollen, der ungünstigen Gesundheits-Verhältnisse wegen vertagt wurde.**

**Die Nachricht über Abhaltung der Versammlung im nächsten Jahre wird rechtzeitig kund gegeben werden.**

**Die Geschäftsführer der 32. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte.**

**Wien im August 1855.**

**Hyrtl. Schrötter.**

---

# Literarischer Bericht
## XCVIII.

---

### Geschichte der Mathematik und Physik.

**Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans. Par M. F. Woepcke. Paris. 1855. 8. Zwei Abtheilungen, die zweite mit dem besonderen Zusatze auf dem Titel: Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ (Manuscrit persan N°. 169, ancien fonds de la Bibliothêque impériale).**

In dem ersten Artikel dieser höcht verdienstlichen Untersuchungen über die Geschichte der Mathematik bei den Orientalen, welcher „Notice sur des notations algébriques employées par les Arabes" überschrieben ist, giebt Herr Doctor Wöpcke Nachricht über die von ihm gemachte Entdeckung, dass die Araber schon im Besitz einer sehr vollständigen algebraischen Bezeichnung oder Symbolik waren, welche, so lange die Algebra ihren mehr numerischen Charakter beibehielt, fast so vollständig war, wie sie nur irgend sein konnte. „Il paraissait, d'après cela," sagt der Herr Verfasser, „que les Arabes, toút en enrichissant la théorie de l'algèbre de découvertes originales et importantes, comme l'est, par exemple, la construction géométrique des équations du 3^e^ degré, étaient restés ou redescendus, par rapport à la forme, au-dessus de leurs devanciers."

„Je pense donc que la decouverte que je viens de faire de l'existence d'une notation ·algébrique très dévelloppèe chez les

Arabes de l'Occident, peut offrir un certain intérêt pour l'histoire des sciences."

„Cette notation est presque aussi complète qu'elle pouvait l'être, tant que l'algèbre elle-même restait numérique. Car, je me hate de le dire, quelque honneur que l'invention de cette notation puisse faire aux géomètres arabes, elle ne diminue en rien la gloire de Viète, dont l'immense et incontestable mérite consiste à avoir introduit la notation littérale pour les quantités connues dans le calcul algébrique, et à avoir, le premier, en exprimant en même temps les opérations algébriques par des signes, figuré des calculs virtuels avec des lettres, tandis que jusque-là on n'avait su qu'exécuter des calculs réels sur des nombres, en un mot, à avoir changé la face de la science même, et jeté les bases de l'analyse moderne, en remplaçant l'algèbre numérique, que nous trouvons chez les Grecs, les Indiens, les Arabes et chez les Occidentaux avant Viète, par le calcul des symboles."

Herr Dr. Wöpcke hat in diesen Worten das Verhältniss der von den Arabern in der numerischen Algebra — um uns dieses Ausdrucks zu bedienen — gebrauchten Zeichen zu den vollkommeneren Zeichen der literalen Algebra sehr richtig im Allgemeinen festgestellt, und charakterisirt nun in dem übrigen Theile seiner verdienstlichen Schrift die Symbolik der Araber in sehr interessanter Weise mit grosser Genauigkeit, was uns die Pflicht auferlegt, allen Lesern des Archivs diese Schrift zu besonderer Beachtung zu empfehlen.

Seine höchst verdienstlichen Untersuchungen über die Geschichte der Mathematik bei den Orientalen hat aber Herr Doctor Wöpcke neuerlich auch auf die Perser ausgedehnt, und theilt uns eine Frucht dieser Untersuchungen in der zweiten Abtheilung der vorliegenden Schrift mit. „Le texte", sagt der Herr Verfasser, „qui a servi de base au présent travail, et dont on trouve une analyse dans les feuilles suivantes, est la traduction, en persan, d'un texte arabe primitif. Celui-ci ne paraît pas avoir été écrit par Aboûl Wafâ lui-même, mais il contenait, ainsi qu'on l'etablira plus loin, des leçons du célèbre géomètre de Baghdâd, recueillies par un de ses disciples. Il se peut que la traduction persane n'ait été faite que sur un abrégé de la rédaction de ce disciple. Bien que les théories exposées par Aboûl Wafâ devant ses auditeurs n'aient pu passer par ces rédactions, abréviations et traductions successives sans être sensiblement altérées, il reste encore suffisamment de la conception première, et le con-

tenu même du traité offre assez d'intérêt, pour que le texte dont il s'agit m'ait paru mériter un examen détaillé."

Man muss in der That erstaunen über die Menge schöner Constructionen, welche sich in der, in den vorhergehenden Worten des Herrn Verfassers im Allgemeinen charakterisirten Schrift eines so alten Autors finden. Vorzüglich aber sind es drei Arten von Problemen, welche besonders hervorgehoben werden müssen:

1⁰. Die Construction verschiedener geometrischer Probleme bloss mittelst des Lineals und einer einzigen gegebenen Oeffnung des Zirkels. Diese Constructionen jenes alten Autors erinnern lebhaft z. B. an Mascheroni's Géométrie du compas, worin bekanntlich mit vielem Glück der Versuch gemacht ist, die geometrischen Constructionen, mit Beseitigung des Lineals, bloss mittelst des Zirkels auszuführen, und an ähnliche Bemühungen verschiedener neuer Geometer. Dem Gedanken aber unsers alten Autors, die geometrischen Constructionen bloss mittelst des Lineals und einer einzigen gegebenen Oeffnung des Zirkels auszuführen, gebührt jedenfalls eine besondere Originalität, und wir möchten wohl wünschen, dass derselbe auch jetzt noch weiter verfolgt würde.

2⁰. Die vollständige und sinnreiche Auflösung der Aufgabe: Ein Quadrat in eine gegebene Anzahl anderer Quadrate zu theilen oder aus einer gegebenen Anzahl anderer Quadrate zusammenzusetzen, ohne sich dabei des pythagorischen Theorems zu bedienen, bloss durch Verfahrungsarten der Juxtaposition.

3⁰. Die Construction der regulären und einiger halbregulären Polyeder nach einer von den Methoden des Euclides und Pappus ganz verschiedenen Methode.

Ausser diesen drei Klassen von Aufgaben findet man aber in dieser Schrift noch verschiedene andere merkwürdige und sinnreiche Aufgaben und Constructionen, von denen wir hier nur die Duplication des Würfels und die Trisection des Winkels erwähnen wollen, zwei Probleme, die ja überhaupt in der antiken Geometrie eine so grosse Rolle spielen.

Wir glauben, hiermit genug über diese interessante Schrift gesagt zu haben, um unsere Leser zu veranlassen, derselben ihre Beachtung in so reichem Masse zu widmen, als dieselbe in hohem Grade verdient.

---

## Arithmetik.

**Bemerkungen zur Zahlenlehre. Einige allgemeine Eigenschaften der Theilbarkeit der Zahlen in Bezug auf was immer für ein Zahlensystem, entwickelt von Johann Rogner. (Aus dem Jahresberichte der st. st. Ober-Realschule in Gratz für das Studienjahr 1854—55 besonders abgedruckt.) Gratz. 1855. 4.**

Dieses lesenswerthe Programm enthält 33 Sätze über die Theilbarkeit der Zahlen, für jedes beliebige Zahlensystem. Diesen besondern Sätzen schickt nach einigen Vorbemerkungen der Herr Verfasser in zweckmässiger Weise die allgemeinen Sätze, auf welche dieselben sich gründen, voraus, und drückt dann jeden Satz mit Hülfe des bekannten Summenzeichens symbolisch und ausserdem auch noch in Worten aus, indem er zugleich eine allgemeine, aber nur kurze Erläuterung der Gründe des Satzes beifügt. Zuletzt wendet er noch alle 33 Sätze auf das decadische Zahlensystem an, und erläutert einen jeden durch ein Beispiel. Wir empfehlen dieses Programm den Lehrern der Mathematik zur Beachtung; aber auch vorgerücktere Schüler werden dasselbe zu ihrer Uebung in allgemeineren arithmetischen Betrachtungen, namentlich auch um die allgemeinere Theorie der Zahlensysteme und den Gebrauch allgemeinerer arithmetischer Bezeichnungen kennen zu lernen, mit besonderem Nutzen lesen.

**Transformation und Ausmittelung bestimmter Integrale, mit besonderer Rücksicht auf grössere Werthe der Gränzen und implicirten Constanten. Von Doctor P. Helmling, Privatdocenten zu Dorpat. Mitau und Leipzig (Reyher). 1854. 4.**

Der Herr Verfasser sagt in der Vorrede: „Wer öfter in den Fall gekommen, ein bestimmtes Integral vermittelst der mechanischen Quadratur zu berechnen, wird mir gewiss darin beistimmen, dass, abgesehen von der ermüdenden Weitläufigkeit, die Resultate selten mit der Schärfe und Genauigkeit erhalten werden, die jenen Anstrengungen entsprechen, wenn man nicht eine sehr beträchtliche Anzahl von Coordinaten zu Hülfe nehmen will. Als ein solches Beispiel mag es gestattet sein, hier das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\partial x}{100+x^2}$$

anzuführen. Auf directem Wege, mit einer Fehlergränze von un-

gefähr $\frac{1}{100.e^{10}}$ (also 6 richtige Decimalen), wurde dasselbe gefunden $=0{,}01024246$, während die mechanische Quadratur nach **Gauss** mit Auswahl der Coordinaten bei zehn Abscissen dasselbe $=0{,}03516290$ ergab, also mehr als das Dreifache des wahren Werths. So wurde ferner das Integral $\int_0^3 e^{x^2}\partial x$ durch mechanische Quadratur mit gleichweit abstehenden Ordinaten bei zehn Abscissen gefunden $=1606{,}8$ durch die **Gauss**'sche, mit Auswahl der Coordinaten, $=1542{,}3$ bei fünf Abscissen, während der genauere Werth desselben 1444,545116 beträgt." — Das sind freilich sehr eclatante Beispiele, die keineswegs zu Gunsten der Methode der mechanischen Quadratur sprechen! Eben so convergiren die zur Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale gegebenen unendlichen Reihen oft so langsam, dass die Geduld des Rechners bei ihrer Anwendung nothwendig sehr bald ermüden muss, und eine Menge in dieser Richtung angestellte Untersuchungen sind, bei scheinbarer Eleganz ihrer Resultate, ziemlich werthlos, ja oft geradezu falsch, weil ihre Urheber, zu wenig vertraut mit den Fortschritten der neueren **strengeren** Analysis, die Kriterien und Cautelen nicht gehörig anwandten und anzuwenden verstanden, deren Anwendung bei solchen Untersuchungen erforderlich ist, wenn dieselben, wie dies leider immer nur noch zu oft der Fall ist, nicht in ein blosses Spiel mit Symbolen ausarten sollen, und, um es geradezu herauszusagen, eigentliche **Grössenbestimmungen** gar nicht liefern, die doch allein Ziel und Zweck jeder mathematischen Untersuchung sein können, die es nicht, wie in gewissen Theilen der Geometrie, bloss mit der Lage zu thun hat. Das Unternehmen des Herrn Verfassers der vorliegenden Schrift: „die Ermittelung bestimmter Integrale, so viel wie möglich, von den genannten mühseligen und oft unzureichenden" — **wir** setzen hinzu, oft geradezu innere Widersprüche enthaltenden und daher falschen — „Methoden unabhängig zu machen, oder doch wenigstens die mechanische Quadratur auf das geringste Maass zu beschränken", kann daher nur als ein sehr verdienstliches, die Wissenschaft förderndes bezeichnet werden, und wird insbesondere von uns als ein solches freudigst anerkannt. Wenn der Herr Verfasser selbst von seiner Schrift in sehr bescheidener Weise sagt, „dass dieselbe das Gepräge einer Aufgabensammlung an sich trage", so ist dies nicht seine Schuld, sondern liegt in der Natur der Wissenschaft, der seine Schrift gewidmet ist, die sich schwerlich jemals als ein abgerundetes, in sich selbst vollendetes System darstellen lassen wird. Der eigentliche Inhalt der Schrift ist zu reichhaltig und zu mannigfaltig, als

dass wir hier auf denselben näher einzugehen vermöchten, geben aber dem Leser die Versicherung, dass der Herr Verfasser überall Strenge und Eleganz der Darstellung mit einander vereinigt hat, und sich überall als ein Mann documentirt, der mit den Fortschritten und Anforderungen der neueren strengeren Analysis vollkommen vertraut ist, und, diesen Anforderungen huldigend, überall leeres Zeichenspiel als der Wissenschaft unwürdig verschmäht, und sein Augenmerk nur auf scharfe Ermittelung der Werthe der vorliegenden Grössenformen richtet, was nur allein der Wissenschaft frommen kann und derselben würdig ist. Jeder wird aus dieser Schrift, auch der Mannigfaltigkeit der angewandten Methoden wegen, vielfache Belehrung schöpfen, und wir betrachten dieselbe als eine in jeder Beziehung sehr werthvolle Erscheinung auf dem Gebiete der Integralrechnung, ein Urtheil, was wir auch schon über seine im Jahre 1851 erschienene, demselben Gegenstande gewidmete akademische Probeschrift im Liter. Ber. Nr. LXXII. S. 910. aussprechen zu können die Freude gehabt haben. Kein Mathematiker darf diese ausgezeichnete Schrift unbeachtet lassen.

---

## Geometrie.

Zweihundert neue Lehrsätze der Geometrie, zum Gebrauche für Lehrer und Lernende an Gymnasien, Real- und Gewerbschulen, von W. Berkhan, Oberlehrer am Herzoglichen Gymnasio zu Blankenburg. Mit 8 lithographirten Figurentafeln. Eisleben. (Reichardt.) 1854. 8.

In bescheidener Weise sagt der Herr Verfasser: „Neu nennt der Verfasser diese Sätze, insofern dieselben in den Schriften der Alten, namentlich im Euklid, nicht angetroffen werden, und, obgleich dabei die Literatur der neueren Geometrie benutzt ist, so hofft er doch, durch einen nicht unbedeutenden Theil von ihm selbst erfundener Sätze, so wie auch durch andere kurze Beweise zur Beförderung des geometrischen Studiums beizutragen.“ Ob und in wie fern die dem Lehrer und Schüler hier gebotenen Sätze alle neu sind, können wir so wenig sagen und auf der Stelle entscheiden, als irgend ein anderer Mathematiker; denn wer will sich vermessen, von sich zu sagen, dass er das ganze ungeheure Material der Geometrie kenne!! Dass jedoch Vieles in dieser Schrift neu ist, wenn auch allerdings manche Sätze nur als Umkehrungen bereits bekannter Sätze auftreten, können wir ver-

sichern. Darauf aber, ob Alles neu sei, kommt es in der That bei einer solchen Schrift, die sich zugleich als ein Uebungsbuch für Anfänger, wohl vorzugsweise zum eigenen Studium, ankündigt, auch gar nicht an; weit mehr auf Einfachheit und Strenge der Darstellung und der Beweise. In diesen Beziehungen können wir aber die Schrift unbedingt empfehlen, und wünschen sehr, dass sie von Lehrern und Schülern nicht unbeachtet bleibe, wobei wir noch besonders hervorheben, dass sie einen, bei solchen Schriften nur allein zweckmässigen Mittelweg zwischen der älteren und neueren Darstellungsweise einschlägt, ja, in von uns vollkommen gebilligter Weise, sich selbst mehr der ersteren nähert. Auch kommen keine, den Gesichtskreis des Anfängers nur verwirrende und verdunkelnde complicirte und mit einer Masse von Geraden und Kreisen überfüllte Constructionen vor, sondern Alles ist, wie gesagt, einfach gehalten und den Kräften einigermassen begabter Schüler vollkommen entsprechend und angemessen, weshalb wir nochmals auf dieses zweckmässige Büchlein aufmerksam machen.

Analytisch-geometrische Untersuchungen über allgemeine Verwandtschafts-Verhältnisse von Coordinaten-Systemen. Von J. G. H. Swellengrebel, Litt. et Phil. Dr. Mit einer lithographirten Tafel. Bonn. (Marcus.) 1855. 4.

Der Verfasser dieser Schrift, dessen letztes, bei seinen Lebzeiten herausgegebenes Werk im Literar. Ber. Nr. LXXXII. S. 1. angezeigt wurde, ist leider der Wissenschaft schon in dem Alter von 33 Jahren durch den Tod entrissen worden. — Dr. Jan Gerard Hendrik Swellengrebel wurde am 30. März 1821 in einer alten patricischen, wohlhabenden Familie zu Utrecht geboren und starb nach schweren körperlichen Leiden, nachdem er erst noch, und zwar mit Glück, eine grässliche Operation überstanden hatte, nach kurzem Todeskampfe am 12. Mai 1854. Friede seiner Asche! — Einen interessanten Lebensabriss dieses jungen begabten Mathematikers, den wir vielleicht noch den Lesern des Archivs mitzutheilen Raum finden werden, hat sein früherer Erzieher, Herr J. Klein in Bonn, dem Werke, von dem wir hier einen kurzen Bericht zu erstatten beabsichtigen, vorangestellt. Dasselbe betrifft die geometrischen Verwandtschaften, von denen man bisher bekanntlich hauptsächlich nur die Verwandtschaften der Collineation und Reciprocität, von denen die Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz besondere Fälle sind, untersucht hat. In einer völlig selbstständigen und ganz eigenthümlichen Weise, bei der zugleich eine grosse Allgemeinheit der Betrachtung und Unter-

suchung erstrebt worden ist, hat unser, der Wissenschaft leider so früh entrissene Verfasser auf analytisch-geometrischem Wege die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften einer neuen Untersuchung unterworfen und diesen Gegenstand in mehrfacher Beziehung weiter als seine Vorgänger verfolgt und geführt. Eben aber, weil der Verfasser überall einen ganz eigenthümlichen Weg geht, ist es sehr schwer, ohne Weitläufigkeit auch nur einen allgemeinen Begriff von seiner Methode zu geben, was daher in diesen Literarischen Berichten ihrer Natur nach nicht erwartet werden kann. Dass aber die Leser, welche an sehr allgemein gehaltenen analytisch-geometrischen Untersuchungen Interesse und Freude finden, durch dieses Werk sich vielfach angeregt finden werden, können wir versichern, und empfehlen dasselbe daher recht sehr zur Beachtung, indem wir uns hier damit begnügen müssen, nur noch in aller Kürze die Ueberschriften seiner Hauptabschnitte anzugeben: I. Allgemeines über die Verwandtschaften. — II. Stand-Elemente und Stand-Ketten. — III. Nähere Untersuchung der Affinität. — IV. Die Tangential-Affinität. — V. Curven mit constanter Umformungs-Stärke ihrer unmittelbaren Umgebung.

---

## Astronomie.

Sternbedeckungen und Mondsterne, beobachtet auf der k. k. Sternwarte in Krakau, herausgegeben von Dr. Max Weisse, Director derselben Sternwarte. Krakau (Universitäts-Buchdruckerei). 1855.

Von der aus den astronomischen Nachrichten und anderen Journalen längst bekannten rühmlichen Thätigkeit der Sternwarte zu Krakau legen diese von ihrem schon so vielfach um die Astronomie verdienten Director so eben publicirten Beobachtungen ein neues, sehr erfreuliches Zeugniss ab. Dieselben betreffen, wie schon der Titel besagt, die Sternbedeckungen und Mondsterne, und reichen, ein überaus reiches Material in beiden Beziehungen darbietend, für die ersteren vom Jahre 1825 bis zum Jahre 1854, für die letzteren, nämlich die besonders reich ausgestatteten Mondsterns-Beobachtungen vom Jahre 1829 bis zum Jahre 1854. Möge der Herr Herausgeber noch häufig Gelegenheit zu ähnlichen, so sehr verdienstlichen Publicationen finden!

---

# Literarischer Bericht

## XCIX.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, Mathematico de secolo decimoterzo. Notizie raccolte da Baldassarre Boncompagni, Socio ordinario dell' Accademia Pontificia de' nuovi Lincei. Roma. Tipografia delle belle arti. 1854. 8.

Wie ungemein wichtig die Geschichte der Mathematik, namentlich der Arithmetik und Algebra, in Italien für die Geschichte unserer Wissenschaft überhaupt ist, weiss jeder Kenner derselben. Im Artikel „Algebra" des mathematischen Wörterbuchs (Thl. I. S. 33.) sagt Klügel: „Von den Mauro-Arabern ward die Kenntniss der Algebra nach Spanien verpflanzt. Aus diesem Lande mögen die Italiener sie zum Theil erhalten haben. Doch haben sie auch unmittelbar von den Arabern durch einen ihrer Landsleute Unterricht in dieser Kunst bekommen. Leonardo von Pisa, ein Kaufmann, der um das Jahr 1200 grosse Reisen nach dem Orient unternahm, brachte von da die Kenntniss der arabischen Arithmetik und Algebra mit"; und in dem von dem unterzeichneten Herausgeber des Archivs mit besonderer Liebe bearbeiteten Artikel „Zahlzeichen" des Wörterbuchs erzählt derselbe (Thl. V. S. 1176.): „Die dekadischen Zahlzeichen sind langsam in Gebrauch gekommen, wie es in jenem Zeitalter nicht anders sein konnte. Man sieht es aus einer arithmetischen Schrift des Leonardus Pisanus, die im Jahre 1202 verfasst ist. Von dieser findet man eine ausführliche Nachricht in des Targioni Tozzetti Relazioni d'alcuni viaggi fatti in Toscana.

T. II. p. 59. der zweiten Ausgabe zu Florenz 1768. Die Schrift des Leonardo ist auf der Magliabechischen Bibliothek zu Florenz handschriftlich vorhanden. Der Verfasser erzählt, dass sein Vater, ein Handelsmann, ihn in dem studio abaci unterrichtet habe; der vortreffliche Unterricht, mit den neun Figuren der Inder zu rechnen, habe ihm ganz vorzüglich gefallen; er habe daraus begriffen, was er auf seinen Reisen in und ausser Europa mit vieler Mühe gelernt hätte; das Alles aber und andere Rechnungsarten halte er gleichsam für fehlerhaft (quasi errorem) in Vergleich mit der Weise der Inder. Deswegen wolle er diese so deutlich als möglich vortragen. In dem ersten Kapitel zeigt er, wie mit den neun Figuren und dem Zeichen 0, welches arabisch Zephirum heisse, alle Zahlen geschrieben werden. Man sieht aus dieser Schrift, dass die indische Rechenkunst gegen Ende des 12ten Jahrhunderts selbst unter Kaufleuten noch nicht ausgebreitet gewesen ist.“ — Diese Notizen, welche ich bei der Bearbeitung des genannten Artikels des Wörterbuchs hauptsächlich aus noch vorhandenen sorgfältigen Aufzeichnungen des verewigten, so vielfach verdienten Klügel entnahm, habe ich hier deshalb wieder mitgetheilt, um den Lesern des Archivs die ungemein grosse Wichtigkeit des Leonardo Pisano für die Geschichte der Arithmetik und Algebra in der Kürze mit möglichster Deutlichkeit vor die Augen zu führen. Je lebhafter aber ich schon vor nun bereits 25 Jahren bei der Bearbeitung des genannten Artikels fühlte, wie ungemein schwer es ist, bei solchen Arbeiten sich in den Besitz aller erforderlichen Quellen zu setzen, desto angenehmer wurde ich jetzt überrascht, als ich das vorliegende, mit der grössten Sorgfalt, der grössten Liebe zur Sache und der grössten mathematischen und historischen Gelehrsamkeit bearbeitete Werk des Herrn Baldassarre Boncompagni erhielt, durch dessen Herausgabe der Herr Verfasser sich ein ungemein grosses Verdienst um die Geschichte der Mathematik erworben hat, und das Niemand bei dem Betreiben historisch-mathematischer Studien künftig wird entbehren können. Man muss erstaunen über den Fleiss, die Sorgfalt, mit welcher Herr Baldassarre Boncompagni in den berühmtesten italienischen Bibliotheken Nachforschungen über die Schriften seines Landsmanns angestellt hat, und die dabei aufgewandte grosse literarische Gelehrsamkeit, wobei wir zugleich noch erwähnen wollen, dass Herr Baldassarre Boncompagni schon früher in den Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei pubblicati conforme alla decisione Accademica de 22 dicembre 1850, e compilati dal Segretario. Roma, 1851—1852, einen Aufsatz: „Della vita e delle opere di Leonardo Pisano matematico del

secolo decimoterzo etc." publicirt hat. Auch finde ich besonders angezeigt: „Della vita e delle opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, notizie raccolte da B. Boncompagni. Roma. 1842. 4." und: „Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da B. Boncompagni, note analitiche di Angelo Genocchi. Roma. 1855. 8."

Eine ausführliche Anzeige des so ungemein reichen Inhalts des vorliegenden grossen und gelehrten Werkes gestattet natürlich die durch diese literarischen Berichte uns nothwendig vorgeschriebene Kürze nicht, indem wir uns vielmehr damit begnügen müssen, auf die grosse Wichtigkeit desselben für die Geschichte der Mathematik, hauptsächlich natürlich für die Geschichte der Arithmetik und Algebra, hingewiesen zu haben.

Um jedoch wenigstens auf einiges Detail aufmerksam zu machen, so weit es hier der Raum gestattet, wollen wir bemerken, dass der Herr Verfasser drei arithmetischen Aufgaben, die in einem auf der Ambrosianischen Bibliothek zu Mailand aufgefundenen wichtigen Manuscripte des Leonardo Pisano, welches den Titel führt: „Flos super solutionibus quarundam questionum ad numerum et ad geometriam vel ad utrumque pertinentium" sich finden, gleich am Anfange seines wichtigen Werkes besondere Aufmerksamkeit widmet. Diese drei Probleme sind die folgenden:

„1°. Trovare un numero quadrato $x^2$ tale, che si abbia simultaneamente:

$$x^2+5=y^2,\quad x^2-5=z^2,$$

$y^2$, $z^2$ essendo due numeri quadrati.

2°. Trovare per mezzo di ciò che Euclide insegna nel decimo libro de' suoi Elementi di geometria un numero $x$ tale che si abbia:

$$x^3+2x^2+10x=20.$$

3°. Tre uomini avevano in comune una somma di denaro, della quale una metà era del primo, una terza parte del secondo, ed una sesta parte del terzo uomo. Volendo essi porre in luogo più sicuro questa somma, ciascuno di loro ne prese a caso una parte, ed avendo trasportato tutta la somma stessa in luogo più sicuro, il primo pose in comune la metà di ciò che prese, il secondo la terza parte, ed il terzo una sesta parte. Avendo poscia diviso in parti eguali fra loro ciò che fu da essi posto in

comune, ciascuno di loro ebbe una certa porzione. Sí domanda quale fu quella somma e quanto ciascuno ne prese."

Auch bemerken wir hierbei, dass Herr Baldassarre Boncompagni über das erste dieser drei Probleme, welches der unbestimmten Analytik angehört, indem er demselben zugleich eine allgemeine Form gegeben hat, eine besondere sehr lesenswerthe Abhandlung verfasst hat, die unter folgendem Titel erschienen ist:

Intorno alla resoluzione delle equazioni simultanee $x^2+h=y^2$, $x^2-h=z^2$. Nota di Baldassarre Boncompagni. Estratta dagli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche pubblicati in Roma Aprile 1855. Roma. 1855.

und dass darin gleich am Anfange bemerkt wird, dass Leonardo von Pisa für dieses Problem die in den folgenden Formeln, in denen $m$, $n$ rationale Zahlen bezeichnen, enthaltene elegante Auflösung gegeben hat:

$$h=4mn(m+n)(m-n),$$

$$x=\pm(m^2+n^2),$$

$$y=\pm(2mn+(m^2-n^2)),$$

$$z=\pm(2mn-(m^2-n^2)).$$

Der Raum verstattet uns leider nicht, hier noch weiter auf das vorliegende wichtige und interessante Werk einzugehen. Wir schliessen daher diese Anzeige mit dem Wunsche, dass Herr Baldassarre Boncompagni die Wissenschaft noch öfters mit so wichtigen historischen Untersuchungen beschenken möge.

Grunert.

---

# Arithmetik.

Neue Methode zur Vermeidung und Auffindung von Rechenfehlern vermittelst der Neuner-, Elfer-, Siebenunddreissiger- und Hundertundeinerprobe. Ein Hülfsbuch für Zahlenrechner. Von Dr. A. Krönig, Lehrer an der königl. Realschule in Berlin. Berlin. Gärtner. 1855. 8.

Der Zweck dieser Schrift ist durch ihren Titel hinreichend bezeichnet. Die auf dem Titel angegebenen Rechnungsproben sind in derselben deutlich angegeben und ihr Gebrauch zur Auf-

findung von Rechenfehlern ist vollständig und so leichtfasslich erläutert worden, dass für Jeden, wer nur mit den Anfangsgründen der Arithmetik vertraut ist, ein leichtes Verständniss vermittelt worden ist. Die Beweise hat der Herr Verfasser jedoch jetzt noch nicht gegeben, und beabsichtigt, dieselben in einem besonderen Heftchen nachzuliefern, was jedenfalls recht bald geschehen möge, da das Schriftchen sowohl von theoretischem, als namentlich von praktischem Interesse ist, und auch Lehrern zur Benutzung bei'm arithmetischen Unterrichte, wozu es der Herr Verfasser auch bestimmt hat, empfohlen zu werden verdient. Ausser der lehrreichen Darstellung der Methode selbst bilden den Hauptinhalt der Schrift eine Reihe von Tafeln, die dazu bestimmt sind, alle Rechnung zu ersparen und jede Probe auf ein blosses Nachschlagen zurückzuführen, und, so weit sich, ohne selbst schon vielfachen Gebrauch von denselben gemacht zu haben, urtheilen lässt, mit grosser Sorgfalt berechnet und zweckmässig eingerichtet zu sein scheinen, weshalb wir das Schriftchen nochmals der Beachtung unserer Leser recht sehr empfehlen.

Tafel der fünfstelligen Logarithmen und Antilogarithmen. Nebst einer tabellarischen Zusammenstellung der in den verschiedenen Anwendungen am meisten gebrauchten Zahlen. (Von Friedrich Stegmann, Professor an der Universität zu Marburg.) Marburg. Koch. 1855.

Diese kleine Tafel besteht aus folgenden zwei Abtheilungen:

I. Tafel der gemeinen oder Briggischen Logarithmen, enthaltend a) für die natürlichen Zahlen von 0 bis 119 die vollständigen Logarithmen mit sechsstelliger Mantisse, und b) für alle Zahlen von 1000 bis 9999 die fünfstelligen Mantissen.

II. Tafel der Antilogarithmen, enthaltend für die Mantissen aller Briggischen Logarithmen von .0000 bis .9999 die fünf ersten Stellen der zugehörigen Zahl.

Man sieht hieraus, dass der Herr Verfasser unter einer Tafel der Antilogarithmen, wie dies in England längst gebräuchlich ist, eine Tafel versteht, welche von der gewöhnlichen Logarithmentafel, also von der Tafel I., die einfache Umkehrung bildet. Bei der Tafel der Logarithmen ist die Zahl das Argument, und die Tafel stellt den Logarithmus als Function der Zahl dar. Bei der Tafel der Antilogarithmen ist der Logarithmus das Argument, und die Tafel stellt die Zahlen als Functionen der Logarithmen dar. Wir sind mit dem Herrn Verfasser ganz damit ein-

verstanden, dass eine besondere Tafel der Antilogarithmen wesentliche Erleichterung bei der Rechnung gewährt und auch deren Genauigkeit zu erhöhen geeignet ist, und empfehlen daher das vorliegende Büchlein unsern Lesern und auch Praktikern recht sehr zur Beachtung. Freilich aber wird eine solche Tafel, in grösserem Maassstabe wie hier ausgeführt, immer ein ziemlich voluminöses Werk bilden. Als Grundlage seiner Arbeit diente dem Herrn Verfasser die in London 1849 erschienene Table of Antilogarithms von Filipowsky, welche für alle fünfstelligen Mantissen siebenstellige Logarithmanden liefert, in der aber bei sorgfältiger Prüfung eine bedeutende Anzahl von Druckfehlern entdeckt wurde, welche in der vorliegenden Tafel sorgfältigst zu vermeiden gesucht worden ist. Die Tafel einer grösseren Anzahl in der theoretischen und praktischen Mathematik und in der Physik oft gebrauchter Zahlen ist eine angenehme Zugabe.

Die Differential- und Integralrechnung und deren Anwendung auf die Geometrie in der Ebene von Doctor Edmund Külp, Professor der Physik und Mathematik an der höheren Gewerbeschule zu Darmstadt. III. Abtheilung. Mit vier lithographirten Tafeln. Darmstadt. Leske. 1855. 8.

Wir haben dieses Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung in dem Literarischen Berichte Nr. XCIII. S. 1. namentlich in Bezug auf den verdienstlichen Standpunkt, welchen dasselbe den neueren Anschauungsweisen und Ansichten der strengeren Wissenschaft gegenüber einnimmt, näher charakterisirt, und glauben daher, weil der Herr Verfasser diesen Standpunkt gewiss zum besonderen Nutzen seiner Schüler und der ausgezeichneten Lehranstalt, welcher er seine Kräfte widmet, auch in dieser dritten Abtheilung nicht verlassen hat, uns jetzt mit der folgenden allgemeinen Inhaltsangabe derselben begnügen zu dürfen: I. Berührung ebener Curven. 1. Von den Tangenten und Normalen. 2. Von den Asymptoten. 3. Von der Berührung der verschiedenen Ordnungen. 4. Gebrauch der Polarcoordinaten. — II. Verschiedene Eigenschaften der ebenen Curven. 1. Der Lauf ebener Curven. 2. Besondere Punkte ebener Curven. 3. Differential der Fläche einer Curve. 4. Differential des Bogens. — III. Weitere Untersuchungen über ebene Curven. 1. Krümmung ebener Curven. 2. Von den Evoluten. 3. Von den Brennlinien durch Zurückwerfung. 4. Von den Brennlinien durch Brechung. — IV. Berechnung des Flächeninhalts und der Bogenlänge ebener Curven.

1. Quadratur ebener Curven. 2. Näherungsweise Quadratur und Quadratur in Polarcoordinaten. 3. Bogenlänge der ebenen Curven. 4. Rectification mittelst elliptischer Integrale.

Man wird hieraus zugleich ersehen, dass auf dem geringen Raume von nur 112 Seiten ein sehr reichhaltiger Stoff zusammengedrängt worden ist.

---

## Geometrie.

Die Berührungs-Aufgabe für Kreis und Kugel. Für das Bedürfniss höherer Lehr-Anstalten bearbeitet von Dr. W. Brennecke, Director der Realschule zu Colberg (jetzt zu Posen). Mit 45 in den Text gedruckten Figuren. Berlin. Enslin. 1853. 8.

Die Anzeige dieser empfehlenswerthen Schrift ist mehr als billig verspätet worden. Dieselbe ist das Resultat der gemeinschaftlichen Arbeit zweier längst bewährter mathematischer Lehrer, des Rectors an der Oberschule zu Neustadt-Eberswalde, Herrn Carl Schmidt, und des auf dem Titel genannten Herrn Herausgebers der Schrift. Wenn auch das Apollonius'sche Problem von den Berührungen, insbesondere für den Kreis, auch in völlig synthetischer Weise wie hier, schon nicht wenige Bearbeitungen gefunden hat, unter denen die von Vieta in seinem im Jahre 1600 herausgegebenen Apollonius Gallus gegebenen Auflösungen oben an stehen, die dem Adrianus Romanus so wohl gefielen, dass er von Würzburg eigens nach Frankreich reiste, um den Vieta kennen zu lernen und mit ihm über mathematische Gegenstände sich zu besprechen, so verdient doch die vorliegende Schrift, in welcher die Herren Verfasser jedenfalls ganz ihren eigenen Weg gegangen sind, in mehrerer Rücksicht zur Beachtung empfohlen zu werden: namentlich aber einmal deshalb, weil das Problem auch für die Kugel vollständig behandelt worden ist, und zweitens deshalb, weil die Herren Verfasser in derselben einen sehr verständigen Gebrauch von den Ergebnissen der sogenannten neueren Geometrie gemacht, dabei aber eine richtige Mitte zwischen der älteren und neueren Geometrie gehalten, und deshalb die Schrift auch für Anfänger in der Geometrie, zu deren weiterer Uebung sie ja auch von den Herren Verfassern selbst bestimmt worden ist, verständlich gemacht haben. Man weiss, dass rücksichtlich des Kreises, wenn von Punkt, gerader Linie und Kreis nur zwei zu berührende Stücke gegeben sind, die Aufgabe unbestimmt wird, insofern man

nicht etwa, wie Marinus Ghetaldus in seinem Supplemento Apollonii Galli. Venet. 1607. that, die Bedingung hinzufügen will, dass der gesuchte Kreis einen gegebenen Halbmesser haben soll; man weiss aber auch, dass die Aufgabe in ihrer vorhergehenden Unbestimmtheit auf bemerkenswerthe geometrische Oerter führt. Daher möchten wir wohl empfehlen, einmal die Oerter sorgfältig zu untersuchen, auf welche die Aufgabe von der Kugel führen muss, wenn von Punkt, Ebene und Kugel nicht vier, sondern nur drei zu berührende Stücke gegeben sind, was wohl noch nicht geschehen ist. Die äussere Ausstattung des Schriftchens ist sehr schön.

---

## Astronomie.

**Die Gestalt der Erde. Von Dr. M. G. von Paucker, Professor zu Mitau, Correspondent der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Petersburg.**

In einer Reihe von Abhandlungen, die in den Schriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Petersburg *) im Jahre 1853 erschienen sind, hat Herr Professor Dr. von Paucker in Mitau, dem die Wissenschaft schon so viele schöne und wichtige Arbeiten verdankt, neue und grösstentheils auch nach neuen Methoden geführte Untersuchungen über die Gestalt der Erde publicirt. Wenn diese Abhandlungen auch nicht sämmtlich in einem Buche mit einander vereinigt erschienen sind, so bilden sie doch ein in ziemlich strengem systematischen Zusammenhange stehendes Ganzes, und sind uns von solcher Wichtigkeit erschienen, enthalten auch so viele einzelne interessante Untersuchungen und Sätze, dass wir im Interesse der Wissenschaft und unserer Leser es für unsere Pflicht halten, von diesen sehr verdienstlichen Untersuchungen hier eine zusammenhängende Anzeige zu liefern, und zwar um so mehr, weil dieselben, eben weil sie nur nach und nach als vereinzelte Aufsätze in einer Zeitschrift erschienen sind, vielleicht nicht die Beachtung, die sie so sehr verdienen, finden dürften. In dem ersten Artikel, welcher überschrieben ist: Der Meridianbogen der sphäroidischen nicht elliptischen Erde, versucht der Herr Verfasser, die

---

*) Die Gesammtheit dieser Aufsätze wird man wohl am Besten durch Friedrich Lucas in Mitau beziehen können.

Frage über die wahre Gestalt der Erde auf einem Wege zu entscheiden, welcher die elliptische Voraussetzung verlässt; derselbe enthält eine mathematische Entwickelung, welche zuletzt ein sehr einfaches Verfahren anzeigt, um die Elemente des Meridians aus den Beobachtungen einer Gradmessung zu bestimmen, wobei der Meridian als eine beliebige krumme Linie angenommen wird, mit der einzigen Beschränkung, dass diese Linie wenig vom Kreise abweicht. Der zweite, die Gradmessungen überschriebene Artikel nimmt die vorhandenen Gradmessungen in Rechnung; dass die elliptische Gestalt unzulässig ist, war schon aus theoretischen Gründen erkannt worden; die Elemente eines neuen mittlern Meridians, welcher alle vorhandenen Gradmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate vereinigt, bestätigen diesen Ausspruch. Es werden ferner die Meridiane von Ostindien, Paris und Dorpat für sich bestehend berechnet, wobei man zu der Ueberzeugung gelangt, dass die Gradmessungen jetzt weniger eine geographische, als vielmehr eine geologische Bedeutung haben, indem sie den Gang der örtlichen Anziehungen geben, welche grösstentheils durch die veränderliche Dichtigkeit des Erdinnern bedingt werden. Indem diese beiden Artikel hauptsächlich, um so zu sagen, ein praktisches Interesse darboten, sind die nun noch folgenden Artikel von dem grössten rein theoretischen Interesse, und enthalten viele bemerkenswerthe eigenthümliche, theilweise gegen die früheren Darstellungen vereinfachte Entwickelungen wichtiger Sätze, namentlich auch aus dem Gebiete der Mechanik, natürlich mit fortwährender Beziehung auf die Gestalt des Erdkörpers. Der dritte bis sechste Artikel, welche die folgenden Ueberschriften haben: Das Indicial. Das geometrische Potential. Die scheinbare Schwere auf dem allgemeinen Sphäroid. Die scheinbare Schwere auf dem elliptischen Sphäroid, sollen eine gedrängte Uebersicht derjenigen Sätze geben, durch welche die von Clairaut und Laplace aufgestellte theoretische Grundlage so weit ausgebildet wird, um an sie eine neue Berechnung der Erdgestaltung anknüpfen zu können. Von der elliptischen Voraussetzung Umgang nehmend, ist das Umdrehungssphäroid auch hier nur der Bedingung unterworfen, dass es von der Kugel wenig abweiche, wodurch sich stark convergirende Reihen ergeben, deren allgemeines Gesetz zu Tage liegt und die mit den Abplattungsgliedern vierter Ordnung hinreichend abschliessen. Alle hier gegebenen Sätze beruhen, wie schon erinnert, auf selbstständiger Untersuchung. Dahin gehören die gegenseitigen Beziehungen zwischen dem sogenannten Indicial und Subindicial, sowohl dem einfachen als dem sphärischen, ferner die Darstellung des Potentials allgemein für jeden Exponenten, sowohl in

aufsteigender als in absteigender Richtung, nach Potentialseiten und Indicialen, endlich der in dem Buche mit ☾ bezeichnete Ausdruck, das Anziehungspotential für jeden ausserhalb gelegenen oder auf der Oberfläche des Sphäroids befindlichen Ort, und für jedes beliebige Gesetz der Dichtigkeit, wofern nur alle Schichten von gleicher Dichtigkeit einander ähnlich sind. Besonders verdienstlich erscheint uns die in dem sechsten Artikel gegebene Ableitung der speciellen von Maclaurin, Laplace und Ivory für das elliptische Sphäroid gegebenen Ausdrücke aus den gefundenen allgemeinen Ausdrücken, und die im fünften Artikel gegebene einfache Ableitung des berühmten Clairaut'schen Theorems, welches bekanntlich eine sehr merkwürdige Beziehung zwischen der Abplattung, der Schwungkraft unter dem Aequator und der Zunahme der scheinbaren Schwere vom Aequator zum Pol nachweist, und hier zugleich auch auf die Abplattungszahlen der zweiten Ordnung ausgedehnt worden ist. Der siebente bis zehnte Artikel führen endlich die folgenden Ueberschriften: Die Pendelmessungen. Die Masse der Erde. Der Newton'sche Satz, die projective Methode in der Ebene, und der Krümmungskreis des Kegelschnitts (worin sich dem Leser auch manche geometrische Ausbeute darbieten wird). Hat Eratostehnes die Erde gemessen? (Ein mit grosser historischer und philologischer Gelehrsamkeit geschriebener Artikel, auf den auch die Philologen aufmerksam gemacht werden müssen.)

Wir glauben hiermit genug gesagt zu haben, um unsere Leser auf diese wichtigen und interessanten Untersuchungen gebührend aufmerksam zu machen. Freilich erfordern dieselben, theils ihrer Kürze, theils ihrer grossen Eigenthümlichkeit wegen, sehr geübte Leser; hat man sich aber einigermassen in den eigenthümlichen Entwickelungsgang des Herrn Verfassers hineingearbeitet, und mit einigen eigenthümlichen Ausdrucksweisen desselben bekannt gemacht, so hat das Verständniss keine weitere Schwierigkeit, und Jeder wird sich dann gewiss durch die vielfachste Belehrung mehr als hinreichend belohnt finden.

Beitrag zur Kenntniss der Grundlagen von Piazzis Sternkatalog von K. v. Littrow. Wien. 1855. 4.

Die Leser des Archivs wissen aus den verschiedenen im Literarischen Berichte gelieferten Anzeigen, wie sehr Herr v. Littrow durch die Herausgabe der Piazzi'schen „Storia Celeste" sich um die Wissenschaft verdient gemacht hat, ein Werk, das, z. B. durch die trefflichen Arbeiten von Peters, bekanntlich

schon manche schöne Früchte getragen hat. In der vorliegenden Schrift liefert er zu diesem Werke einen wichtigen Nachtrag, und die Besitzer der „Storia Celeste“ werden diese neue Schrift auf keinen Fall entbehren können, namentlich wenn sie jenes Werk als Grundlage eigener Untersuchungen benutzen wollen. Es wird am Besten sein, Herrn v. Littrow über seine neueste Schrift selbst reden zu lassen. Er sagt auf S. 1.: „Piazzi glaubte in der umfangreichen Handschrift: „Storia Celeste del R. Osservatorio di Palermo“, die vor einigen Jahren durch liberale Unterstützung von Seite der k. k. österreichischen Regierung in den Annalen der Wiener Sternwarte veröffentlicht wurde, alle Originaldaten gesammelt zu haben, deren künftige Rechner zur Reproduction der mittleren Orte seiner Kataloge bedurften. Bei näherer Durchsicht zeigt sich leider, dass die Gehülfen, welche dieses Manuscript zusammenzustellen hatten, keineswegs immer mit derjenigen Sorgfalt verfuhren, welche man hier zu fordern berechtigt war: Lücken und Incongruenzen mancher Art hindern oft eine völlig sichere Benützung. Vor Allem aber ein wichtiger Theil derjenigen Angaben, die in der Storia Celeste enthalten sein sollten, scheint von Piazzi selbst ganz übersehen zu sein: die Verbindung der beiden Uhren, deren er sich bediente, und von denen nur die eine unmittelbar mit dem Himmel verglichen war. Als Herausgeber jenes Werkes hielt ich es für meine Pflicht, um möglichste Abhilfe wenigstens dieses Mangels mich zu bemühen, und war nach langjährigem Sollicitiren endlich so glücklich, Materialien zu erhalten, die, wenngleich ziemlich fragmentarischer Beschaffenheit, so doch nicht nur jenem dringendsten Bedürfnisse grösstentheils abhelfen, sondern auch manche weitere sehr wünschenswerthe Ergänzung liefern.“ — Die Resultate dieser vieljährigen eifrigen Bemühungen sind nun in der vorliegenden Schrift mit der grössten Sorgfalt und grosser kritischer Umsicht und in für den weiteren Gebrauch sehr zweckmässiger Anordnung niedergelegt. Die Materialien aber zu dieser neuen wichtigen Arbeit erhielt Herr v. Littrow hauptsächlich im Jahre 1846 von dem damaligen Vorsteher der Palermitaner Sternwarte, Herrn G. Cacciatore, und im Jahre 1851 von dem jetzigen Director derselben Herrn Prof. D. Ragona-Scina, welchen Beiden daher die Wissenschaft auch zu besonderem Danke verpflichtet ist.

---

## Physik.

Experimental-Physik. Ein Leitfaden bei Vorträgen von Dr. G. von Quintus Icilius, Lehrer an der po-

lytechnischen Schule zu Hannover. Hannover. Schmorl & von Seefeld. 1855. 8. 3 Thlr.

Dieses neue, in einer sehr ansprechenden Sprache geschriebene Lehrbuch der Physik liefert eine für den öffentlichen Unterricht fast mehr als vollständig zu betrachtende Darstellung der Wissenschaft nach ihrem neuesten Zustande. Dasselbe ist in drei Heften erschienen, von denen das erste der Lehre von der Schwere, den Aggregatzuständen und der Lehre vom Schalle; das zweite der Lehre vom Lichte und der Lehre von der Wärme; das dritte endlich der Reibungselektricität, dem Magnetismus, der Berührungselektricität und den elektrischen Strömen gewidmet ist: Alles in sehr gründlicher und, wie schon erwähnt, für die Zwecke des öffentlichen Unterrichts fast mehr als vollständiger Darstellung. Auf das Einzelne einzugehen gestattet die Natur unserer literarischen Berichte nicht, die sich immer nur eine kurze allgemeine Charakterisirung der zu analysirenden Schriften zur Aufgabe stellen, und die besonders hervortretenden und der Wissenschaft oder dem Lehrwesen besonders nützenden Eigenthümlichkeiten derselben hervorzuheben sich bemühen. Deshalb können wir es uns zu unserer besonderen Freude denn auch nicht versagen, als eine im höchsten Grade rühmliche Eigenthümlichkeit des vorliegenden Werkes die völlig mathematische Fassung und Haltung desselben hervorzuheben, welche es sich überall angelegen sein lässt, dem Lehrlinge eine wahrhaft gründliche Einsicht in den behandelten Gegenstand zu verschaffen, welche bei dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft unbedingt nur auf mathematischem Wege zu erlangen ist, so dass sich unser Lehrbuch nicht, wie leider viele andere, theilweise noch sehr beliebte physikalische Lehrbücher, mit der blossen Angabe von Resultaten ohne allen Beweis und der Erläuterung derselben durch möglichst schöne Bilder! begnügt, ein als der wahren Wissenschaft von uns schon oft als ganz unwürdig bezeichneter Weg, der auch den wirklichen Zwecken des physikalischen Unterrichts keineswegs förderlich ist, sondern denselben geradezu hindernd entgegen tritt. Um so mehr haben wir uns daher gefreut, hier wieder ein — natürlich ohne das Experiment im Geringsten zu vernachlässigen und seine Wichtigkeit zu verkennen — so ganz mathematisch gehaltenes Lehrbuch der Physik vor Augen zu haben, wünschen auch den Schülern der polytechnischen Schule zu Hannover Glück, einen so gründlichen Unterricht auf solchem Wege geniessen zu können. Sollen wir über die mathematischen Darstellungen des Herrn Verfassers selbst noch unser Urtheil aussprechen, so können wir denselben bei Weitem in den meisten Fällen nur unseren Beifall schenken, und können auch nicht umhin zu bemerken, dass dieselben sich oft

einer besonderen Eleganz erfreuen, namentlich auch in der elementaren Form, in welcher dieselben mit vollem Rechte durchgängig gehalten sind, da sich der Herr Verfasser der Differential- und Integralrechnung im eigentlichen Sinne natürlich nirgends bedient hat, wenn auch freilich manche Entwickelung fast nur der Umsetzung in die Zeichen dieser Wissenschaften bedürfen möchte, um derselben ganz anzugehören *). Solche elementare mathematische Darstellungen, wie sie hier gegeben werden, wenn bei denselben, wie es bei dieser Darstellungsweise gar nicht anders sein kann und derselben durchaus völlig entsprechend ist, natürlich auch manche Resultate nur in annähernder Richtigkeit sich ergeben, haben wir — nicht bloss der Zwecke der Physik wegen — stets für sehr lehrreich für die Schüler und zugleich insbesondere auch für dem mathematischen Unterrichte an sich sehr förderlich gehalten. Dass endlich die mathematische Darstellung hier weniger analytisch, als vielmehr überall construirend gehalten und immer an deutlich gezeichnete Figuren angeschlossen worden ist, entspricht gleichfalls — bei aller eigenen Vorliebe für die rein analytische Darstellungsweise — ganz unseren Ansichten über die zweckmässigste Ertheilung des physikalischen Unterrichts, so dass wir also in allen Punkten, auf die es hier wesentlich ankommen dürfte, das vorliegende Buch zur Beachtung empfehlen können.

**Die Musik und die musikalischen Instrumente in ihrer Beziehung zu den Gesetzen der Akustik von Friedrich Zamminer, Professor zu Giessen. Mit Holzschn. 1. Lieferung. Giessen. Ricker'sche Buchhandl. 1855. 8.**

Die Absicht des Herrn Verfassers dieser Schrift, welcher die mathematisch-physikalische Literatur schon mit einigen sehr werthvollen, einen mehr populären Standpunkt einnehmenden Leistungen beschenkt hat, war, eine Verbindung zwischen den Sätzen der Wissenschaft einerseits und der ausübenden Musik und dem Bau musikalischer Instrumente andererseits, welche bis jetzt aller-

---

*) Viel besser ist es in wissenschaftlicher, methodischer und pädagogischer Rücksicht, sich in ihrer Art strenger elementarer Darstellungen und Entwickelungen zu bedienen, als nicht selten sehr ungenügender Darstellungen durch die sogenannte höhere Analysis. Man möge sich daher auch sehr hüten, den Unterricht in der sogenannten höheren Analysis zur Aufnahme in den mathematischen Unterricht auf Gymnasien und gewöhnlichen Realschulen zu empfehlen, wie es wirklich geschehen ist, wenn man sich nicht entschliesst, diesen Unterricht zugleich in der strengsten Weise nach der neueren Gränzenmethode zu ertheilen, und nicht zu einem ganz unwürdigen Spiel mit äusserlich sehr schön fortlaufenden und nach einer Hauptgrösse, oder einem Träger der Operationen, der am Ende Gott weiss was Alles zu tragen und Gott weiss welchen Unsinn zu verantworten hat, geordneten Reihen herabzuwürdigen.

dings so gut wie völlig mangelte, herzustellen. Jedenfalls hat die Akustik dem Instrumentenbau bis jetzt verhältnissmässig nur sehr geringe Dienste geleistet, und die Verwirklichung des Gedankens, für eine Violine oder Flöte eine Formel zu finden, etwa in ähnlicher Weise, wie man sie für Fernrohr und Mikroscop längst besitzt, was jedenfalls eine grosse Eroberung der Wissenschaft sein würde, liegt zur Zeit noch in sehr weiter Ferne, ja erscheint bei der gegenwärtigen Lage der Sache fast absurd. Dagegen überzeugte sich der Herr Verfasser, dass bei den ausübenden Musikern sowohl als den Instrumentenmachern zahlreiche, selbst für die wissenschaftliche Akustik nicht uninteressante Beobachtungen zu finden sind, denen es seither nur an den wissenschaftlichen Kategorieen fehlte, um sich geltend zu machen und für die Wissenschaft fruchtbar zu werden. Der Herr Verfasser hat daher versucht, in der vorliegenden Schrift die physischen Gesetze aufzuweisen, welche in dem reichen Baue der Harmonielehre von den Fundamenten bis zur Spitze und bis zu den feinsten Ornamenten das feste Band abgeben, die Tonerzeugung in den musikalischen Instrumenten, die akustischen Functionen aller ihrer Theile so zu erläutern, dass der Laie Verständniss, der Techniker Belehrung daraus zu schöpfen vermöge; und wenn auch der Herr Verfasser, wie sich bei der jetzigen Lage der Sache von selbst versteht, eine streng systematische Anordnung einhalten weder konnte noch wollte, so wird doch der aufmerksame Leser keineswegs ein in gewisser Rücksicht durch diese einzelnen, in sehr ansprechender Sprache geschriebenen Aufsätze sich hindurchziehendes gemeinsames wissenschaftliches Band gänzlich vermissen und sich auch sogleich überzeugen, dass der Herr Verfasser in anerkennungswerther Weise bemüht gewesen ist, in den einzelnen Aufsätzen möglichst alle verwandten Gegenstände im Zusammenhange zu behandeln. Wir halten diese Schrift jedenfalls sehr verdienstlich, und glauben, dass der Herr Verfasser seinen vorher näher bezeichneten Zweck durch dieselbe vollständig erreichen wird, bekennen auch gern, dass wir als Laie sehr viele Belehrung aus derselben geschöpft haben, und glauben daher den Lesern unserer Zeitschrift einen gleichen Genuss bei der Lecture dieser Schrift versprechen zu dürfen, weshalb wir dieselbe zu recht sorgfältiger Beachtung aus Ueberzeugung empfehlen. Die folgende allgemeine Uebersicht des Inhalts wird zeigen, wie reichhaltig das sich hier vorfindende Material ist, und wie sehr der Herr Verfasser überall den Gesichtspunkt auf die praktische Anwendung im Auge behalten hat. Der Inhalt der ersten Lieferung ist folgender: 1. Die Violine. — 2. Die Violine (Fortsetzung). — 3. Die Akustik der Gebäude. — 4. Das Pianoforte und die Harfe. — 5. Die harmo-

nischen Verhältnisse und die gleichschwebenden Temperaturen. — 6. Ueber Harmonie und Melodie. — 7. Die harmonischen Obertöne. Schwingungen von Platten, Glocken, Häuten und Stäben. Resonanz. Der Inhalt der zweiten Lieferung, deren Erscheinen wir mit Verlangen entgegensehen, wird der folgende sein: 8. Flötenpfeifen und Zungenpfeifen. — 9. Die Orgel. — 10. Die Blasinstrumente des Orchesters. — 11. Die Blasinstrumente des Orchesters (Fortsetzung). — 12. Die Stimmung und Tonmessung. — 13. Die Musikinstrumente verschiedener Völker und Zeiten. — 14. Die menschliche Stimme und das Gehör.

---

## Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. XCVII. S. 16.)

Jahrgang 1855. Band XV. 1. Heft. S. 6. Schreiben des Herrn Dr. August Beer über die Richtungen der Schwingungen des Lichtäthers im polarisirten Lichte. — S. 45. Zenger: Ueber eine indirecte Methode, die Inclination zu bestimmen. — S. 86. Haidinger: Die zwei Hypothesen der Richtung der Schwingungen des Lichtäthers nach ihrer Wahrscheinlichkeit. — S. 91. Hornstein: Ueber die Bahn der Calliope.

Jahrgang 1855. Band XV. 2. Heft. S. 113. Knochenhauer: Ueber die inducirte Ladung der Nebenbatterie in ihrem Maximum. — S. 200. Schabus: Krystallographische Untersuchungen. — S. 210. Stampfer: Bericht über die folgende Abhandlung des Dr. A. Winckler, betreffend das Problem der vier Punkte bei Anwendung des Messtisches (mit 1 Tafel). — S. 217. Winckler: Ueber das Problèm der vier Punkte bei Anwendung des Messtisches (mit 1 Tafel). — S. 270. Grailich: Ueber eine merkwürdige Krystallbildung am Salmiak. — S. 279. Puschl: Ueber die Einwirkung von Licht- und Wärmequellen auf bewegliche Massentheilchen. — S. 311. Grailich: Ueber die Brechung und Reflexion des Lichts an Zwillingsflächen optisch-einaxiger Krystalle. — S. 319. Jäger: Ergebnisse der Untersuchung des menschlichen Auges mit dem Augenspiegel (mit 8 Tafeln).

Jahrgang 1855. Band XV. 3. Heft. S. 351. Haidinger: Das Stauroskop, ein optisch-mineralogischer Apparat von Herrn Franz v. Kobell. — S. 368. Russegger: Das Erdbeben in Schemnitz am 31. Jänner 1855. — S. 370. Kreil: Ueber einen neuen Erdbebenmesser. — S. 372. Magnetische und geographische

Ortsbestimmungen an den Küsten des adriatischen Golfes im Jahre 1854. — S. 401. Zenger: Theorie der Aequatoreal-Boussole und ihre Anwendung zur Bestimmung der Inclination. — S. 417. Hornstein: Ueber die Bahn der Calliope.

Jahrgang 1855. Band XVI. 1. Heft. S. 9. Fialkowski: Construction des Kreises und der Ellipse. (Eine sehr ausführliche Abhandlung von 104 Seiten, die viele bemerkenswerthe Constructionen enthält, und sowohl in geometrischer, als technischer Rücksicht der Beachtung empfohlen zu werden verdient.) — S. 113. Haidinger: Die konische Refraction am Diopsid, nebst Bemerkungen über einige Erscheinungen der konischen Refraction am Aragon. — S. 140. Zantèdeschi: Della interferenza luminosa, che presenta il filo metallico comune a due circuiti chiusi, e dello stato d'incadescenza delle parti del circuito, che non sono comuni ad ambedue; con alcune osservazioni sulla natura dell' elettrico, calorico e luce e della loro reciproca dipendenza. — S. 180. Sedlaczek: Der Copir-Zirkel, eine einfache Einrichtung des Pantographen. — S. 187. Stellwag v. Carion: Die Accomodationsfehler des Auges. (Eine ziemlich ausgedehnte, in optischer Rücksicht sehr beachtenswerthe Abhandlung.)

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern. Nr. 331—347. (Vergl. Literar. Ber. Nr. XCV. S. 11.)

R. Wolf: Zur Erinnerung an Jakob Bernoulli. Nr. 331—333. — C. Brunner: Ueber quantitative Bestimmung der Schwefelsäure. Nr. 331—333. — R. Wolf: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Joh. Jakob Sprüngli und seine klimatologischen Beobachtungen in den Jahren 1759—1802.) Nr. 334—337. — R. Wolf: Ueber den Ozongehalt der Luft und seinen Zusammenhang mit der Mortalität. Nr. 338—340. (Eine beachtenswerthe Abhandlung.) — M. Hipp: Ueber gleichzeitiges Telegraphiren in entgegengesetzten Richtungen mittelst des gleichen Leitungsdrahts. Nr. 341—342. (Ein in praktischer Rücksicht beachtenswerther Aufsatz, dessen Resultate auf selbst angestellten Versuchen beruhen.) — R. Wolf: Ueber den jährlichen Gang der Temperatur in Bern und seiner Umgebung. Nr. 343—347. — R. Wolf: Nachträgliche Bemerkung über den Zusammenhang des Ozongehaltes der Luft mit der Mortalität. Nr. 343—347. — R. Wolf: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Samuel Studer und seine meteorologischen Tagebücher.) Nr. 343—347. — Ausserdem finden sich, wie immer, auch in diesen Nummern wieder vielfache Nachrichten von Herrn R. Wolf über die Sternwarte in Bern, die von der Thätigkeit dieses Instituts ein sehr erfreuliches Bild liefern. Die Breite seiner Sternwarte bestimmte Herr R. Wolf neuerlich zu 46°.57'.8",76. Sehr nahe übereinstimmend hiermit fanden früher Henry, Delcroz und Trechsel 46°.57'.8",68. Eschmann's Annahme in seinen „Ergebnissen der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz“ zu 46°.57'.6",02 scheint hiernach weniger Vertrauen zu verdienen. Auch die Beobachtung an einer Erdbatterie auf S. 127 ff. ist interessant.

# Literarischer Bericht
## C.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bibliographie académique ou liste des ouvrages publiés par les membres, correspondants et associés résidants. Bruxelles 1855.

Die Königlich Belgische Akademie der Wissenschaften hat, ebenso wie dies von den Akademien der Wissenschaften zu Wien und München bereits geschehen ist (m. s. Literar. Ber. Nr. XCVII), nun auch die obige Bibliographie, d. h. ein Verzeichniss der von ihren Mitgliedern herausgegebenen Schriften veröffentlicht. Wie sehr solche Publicationen literarisch und historisch wichtig sind, haben wir schon bei Gelegenheit der Anzeige der Almanache der beiden vorher genannten deutschen Akademien a. a. O. hervorgehoben, und brauchen daher nicht erst besonders zu versichern, eine wie grosse Freude uns durch das Erscheinen der obigen Bibliographie der Belgischen Akademie gemacht worden ist. Die Akademie der Wissenschaften zu Brüssel gehört ebenso, wie die Akademien der Wissenschaften zu Wien und München, jedenfalls zu den gelehrten Körperschaften dieser Art, welche durch den grossen Umfang und die Wichtigkeit ihrer Leistungen am meisten zur Förderung der Wissenschaften beitragen. Nicht genug, dass die Akademie der Wissenschaften zu Brüssel ihr Annuaire, ihre sehr umfangreichen Bulletins, deren Inhalt von Jahr zu Jahr an Wichtigkeit zunimmt, und die verschiedenen Sammlungen ihrer Mémoires mit der grössten Regelmässigkeit her-

ausgiebt, widmet sie sich noch ausserdem speciellen wissenschaftlichen Unternehmungen, unter denen, was die uns in dieser Zeitschrift allein angehenden Wissenschaften betrifft, die Observations des Phénomènes périodiques oben an stehen, ein grossartiges Unternehmen, welches durch den in so vielen Beziehungen so hoch verdienten Quetelet in's Leben gerufen worden ist, und von demselben immer noch geleitet wird, wozu wir diesem trefflichen Gelehrten noch langes Leben und ungeschwächte Kraft und Gesundheit aus dem Grunde unsers Herzens wünschen. Und in wie liberaler Weise die Hohe Königlich Belgische Regierung alle solche wissenschaftliche Arbeiten und Unternehmungen begünstigt und unterstützt, ist so allgemein bekannt und von den Gelehrten längst mit dem grössten Danke so sehr anerkannt, dass es ganz unnütz sein würde, darüber hier noch ein Wort zu verlieren. Bei der Wichtigkeit der Arbeiten der Königlich-Belgischen Akademie der Wissenschaften muss es daher für jeden Freund der Wissenschaft im höchsten Grade interessant und wichtig sein, in der vorliegenden Bibliographie ein Verzeichniss der Schriften der Mitglieder dieser gelehrten Körperschaft zu finden. Wir brauchen aus der Classe des sciences. Section des sciences mathématiques et physiques nur die keinem Mathematiker und Physiker unbekannten Namen unter den Mitgliedern: Quetelet, Pagani, Timmermans, Crahay, Plateau, Nerenburger, Schaar, Liagre; unter den Correspondenten: Duprez, Maus, Meyer, Brasseur, Donny; unter den Associés die Namen: Lamarle, Schwann zu nennen, um unsere Leser auf die grosse Wichtigkeit dieser Bibliographie aufmerksam zu machen, und schliessen mit dem Wunsche, dass es der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Brüssel gefallen möge, dieses wichtige literarische Werk durch Nachträge von Jahr zu Jahr immer mehr und mehr zu vervollständigen, wofür ihr jeder Freund der Wissenschaft sich zu dem wärmsten Danke verpflichtet fühlen wird.

Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. 1855. Vingt et unième année Bruxelles. 1855.

Der Inhalt dieses Annuaire ist schon deshalb sehr interessant, weil er uns ein sehr lebhaftes Bild von der Organisation und den Arbeiten einer der wichtigsten und thätigsten Akademien der Wissenschaften vorführt. Ganz besonderes Interesse gewähren aber auch die darin enthaltenen Necrologe verstorbener Mitglieder. Die Notice sur G. I. A. Baron de Stassart, des vieljährigen Di-

rectors der Königlich Belgischen Akademie, ist zwar nicht für den Mathematiker und Physiker von besonderem Interesse; wer aber, wie der Unterzeichnete, lebhafte Erinnerungen aus der Zeit Napoleons I. bewahrt und diese Zeit grösstentheils mit durchlebt hat, wird sich jedenfalls von dieser Biographie sehr angezogen fühlen und dieselbe mit dem grössten Interesse lesen, selbst wenn er sich für Stassart als Dichter weniger interessiren sollte, wenn auch Fabeln wie die p. 108—p. 110. mitgetheilte:

> J'ai lu qu'en Allemagne ou bien en Italie....
> Le lieu n'importe, mes amis;
> Un nom facilement s'oublie etc.

jedenfalls einen grossen Genuss gewähren. Höchst interessant aber für den Mathematiker und Physiker sind die von Herrn Quetelet mitgetheilten Züge aus Arago's Leben. Eine vollständige Biographie dieses grossen Physikers zu schreiben, war nicht Herrn Quetelet's Absicht, indem er nur einzelne Züge aus diesem reichen, der Wissenschaft gewidmeten Leben mittheilen wollte, die deshalb um so interessanter sind und ein um so lebhafteres Bild gewähren, weil Herr Quetelet das, was er erzählt, grösstentheils mit erlebte. Wir müssen daher unsere Leser dringend auf diese Biographische Notiz aufmerksam machen, und versprechen ihnen eine im höchsten Grade interessante Lectüre. So erzählt z. B. Herr Quetelet p. 186. von Arago folgenden Zug: „Sur le chemin de fer de Gand, il renouvela, à notre profit, un petit stratagème qui, bien qu'ancien, lui réussit à merveille. Un gros homme nous dérangeait; il occupait évidemment dans la voiture, outre sa place, une bonne partie de celle qui nous appartenait. Laissez moi faire dit Arago, je vais vous en délivrer; puis, il se mit à peindre, sous les couleurs les plus sombres, les dangers des chemins de fer, les explosions des machines, les déraillements, les rencontres accidentelles, les voitures brisées, les voyageurs blessés ou tués. La figure du voisin incommode se rembrunissait progressivement; notre homme s'agitait et se démenait sur sa place; enfin il ne put plus y tenir, quand vint le récit lamentable d'une explosion récente qui avait projeté au milieu des champs, en même temps que les débris d'une chaudière, les membres palpitants du malheureux chauffeur et de je ne sais combien d'autres victimes. Arrivé à cet épisode, notre homme partit aussitôt en grommelant et alla chercher gite dans le compartimentvo isin, tandis qu'Arago riait, comme un enfant, du tour qu'il venait de lui jouer.“ Gegen Ende seiner interessanten Notice sagt Herr Quetelet: „Arago était certainement und des hommes les plus probes et les plus désintéressés qui aient jamais passé

par les emplois publics. Le produit de ses traitements réunis était absorbé par ses travaux scientifiques, par des bonnes actions, et par les exigences de sa place.“ Der Raum verbietet uns leider weitere Mittheilungen, weshalb wir unsere Leser nochmals dringend auf die Schrift selbst verweisen. G.

---

# Physik.

Ueber die Sicherheit barometrischer Höhenmessungen. Von A. I. Pick, Assistenten der k.k. Sternwarte zu Wien. (Aus dem Maihefte des Jahrganges 1855 der Sitzungsberichte der mathem. naturw. Classe der k. Akad. d. Wiss. zu Wien besonders abgedruckt.)

Herr Pick hat mit dieser sehr gründlichen Untersuchung über die Sicherheit barometrischer Höhenmessungen der Wissenschaft einen wesentlichen Dienst geleistet, indem es für alle Anwendungen, die man von einer Methode macht, jedenfalls ganz besonders schädlich ist, wenn man das, was die Methode zu leisten im Stande ist, überschätzt. Solche Ueberschätzungen ihres Werths und ihrer Leistungen hat sich die Methode des barometrischen Höhenmessens leider vielfach gefallen lassen müssen, und mancher Physiker hat wohl geglaubt eine Höhe von einigen 20 Fussen, deren Gipfel und Fuss eine halbe Meile von einander entfernt waren, mit dem Barometer messen zu können, indem er sich mit demselben auf dem Gipfel aufstellte und mit dem nämlichen Instrumente dann gemüthlich nach dem Fusse wandelte. Freilich musste er zuletzt selbst staunen, was für Unsinn herauskam, wenn man namentlich das Resultat mit dem Resultate eines genauen Nivellements, das nach unserer Meinung in solchen Fällen nur allein mit hinreichender Sicherheit anwendbar ist, verglich. Wir danken daher Herrn Pick im Interesse der Wissenschaft aufrichtig für diese gründliche Untersuchung, und empfehlen dieselbe jedem Physiker zur sorgfältigsten Beachtung, insbesondere auch deshalb, weil Her Pick sich keineswegs bloss mit der Erörterung der durch äussere Umstände veranlassten Unsicherheiten begnügt, sondern auch die Methode in theoretischer Rücksicht sehr sorgfältig discutirt hat. Auf Einzelnheiten einzugehen, gestattet hier leider der Raum nicht. Aber das Resultat der ganzen Untersuchung hier anzugeben, scheint uns in mehrfacher Beziehung zweckmässig und lehrreich, und seiner sehr zu wünschenden weiteren Verbreitung förderlich zu sein. Dieses Resultat ist folgendes:

„1. Höhendifferenzen aus einzelnen Barometer-Beobachtungen sind durchaus unzuverlässig, und alle Vorsichtsmaasregeln reichen nicht aus, um auch nur die Grenzen der Verlässlichkeit angeben zu können.“

„2. Nimmt man statt einzelner Beobachtungen Mittel, so werden die Grenzen der Unsicherheit allerdings im Allgemeinen enger, jedoch ohne dass mit einer Verlängerung der Beobachtungsperiode auch eine Verbesserung der Höhendifferenz erfolgen müsste, und selbst Jahresmittel, ja Mittel mehrerer auf einander folgender Jahre, gewähren noch lange nicht die Sicherheit trigonometrischer Messungen.“ *)

---

*) Der Unterzeichnete darf sich wohl erlauben, seine im Jahre 1842 gemachte barometrische Bestimmung der Höhe der Sternwarte zu München über dem Spiegel der Ostsee aus correspondirenden Beobachtungen in München und Greifswald als ein Beispiel einer solchen Bestimmung aus einer grösseren Anzahl von Beobachtungen in's Gedächtniss zurückzurufen. Die Beobachtungen umfassten die Tage vom 17. September bis 2. October 1842. Die täglichen Beobachtungszeiten waren VIII, IX, X, XI, XII, I, II, III, IV Uhr. Die Resultate waren folgende:

Mittel zwischen den berechneten Höhen für die einzelnen Stunden.

| Stunde. | Mittlere Höhe. | Abweichung vom Mittel. |
|---|---|---|
| VIII | 519m,67 | — 9m,09 |
| IX | 524 ,62 | —4 ,14 |
| X | 528 ,37 | —0 ,39 |
| XI | 529 ,60 | +0 ,84 |
| XII | 530 ,32 | +1 ,91 |
| I | 532 ,32 | +3 ,56 |
| II | 532 ,52 | +3 ,76 |
| III | 532 ,08 | +3 ,32 |
| IV | 528 ,97 | +0 ,21 |
| Mittel. | 528,76 | Summe —0,02 |

„3. Die Ursachen der grossen Varianten liegen nicht, oder doch nur theilweise in der Unkenntniss des Ganges der Temperatur, nicht in dem Gange der Winde in den unteren Schichten der Luft, wenigstens nicht nach der Kämtz'schen und Brandes'schen Hypothese, selbst die allerdings unzweifelhaft erwiesene Abhängigkeit von den Tages- und Jahreszeiten reicht zu der Erklärung lange nicht aus; — kurz man kennt die hier wirkenden Momente nicht, und es müssten grössere Reihen eigens hiezu angestellter Beobachtungen einer Untersuchung unterzogen werden, um hierüber weitere Aufschlüsse zu geben, wobei man so weit es möglich auf die verschiedene Richtung des Windes in den verschiedenen über einander liegenden Schichten der Atmosphäre besonders Rücksicht zu nehmen hätte!

„Wir müssen uns begnügen bloss auf die grosse Unzuverlässigkeit barometrischer Höhenmessungen aufmerksam gemacht zu haben“

und dass dies mit so viel Gründlichkeit und Umsicht geschehen ist, dafür danken wir Herrn Pick im Namen der Wissenschaft.

**Försök till en mathematisk Theorie för det Thermometriska värmet af And. Jon Ångström, Astronomie Observator, Ledamot af Kongl. Vetenskaps-Academien i Stockholm och Kongl. Vetenskaps-Societeten i Upsala. Första häftet. Upsala. 1854. 4.**

Diese sehr scharfsinnige mathematische Theorie der thermometrischen Wärme, deren Verfasser sich überall mit den neuesten Fortschritten der mathematischen Analysis, die hier in grosser Ausdehnung in Anwendung gebracht worden ist, vollkommen vertraut zeigt, müssen wir allen mathematischen Physikern zur sorgfältigsten Beachtung dringend empfehlen, ohne dass der Raum

---

Nach noch einigen Reductionen ergab sich die Höhe von München über dem Nullpunkte meines Barometers =1625,4 par. Fuss. Nach einer Schätzung beträgt die Höhe des Nullpunktes meines Barometers über dem Spiegel der Ostsee etwa 35 Fuss; dies giebt also Höhe von München über der Ostsee =1660,4 par. Fuss. Muncke (Physikal. Wörterb. Band V. S. 373) setzt die Höhe von München =1658 par. Fuss, was sehr nahe mit meiner Bestimmung übereinstimmt (die Resultate meiner Messungen sind ausführlich mitgetheilt in den Annalen für Meteorologie, Erdmagnetimus und verwandte Gegenstände, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plieninger, Quetelet, Stieffel, herausgegeben von Lamont. Jahrgang 1844. IX. Heft. S. 89.)

Grunert.

uns hier gestattet, weiter auf dieselbe einzugehen. Wir können nur im Allgemeinen bemerken, dass dieses erste Heft nach einer Einleitung, welche theils historischen und literarischen Inhalts ist, theils den Standpunkt, den der Verfasser einnimmt, näher bezeichnet, die erste Abtheilung der ganzen Arbeit, welche A. Thermo-Statik überschrieben ist, enthält. Dem Erscheinen der weiteren nicht bloss in physikalischer, sondern auch in mathematischer Rücksicht höchst lehrreichen Untersuchungen des Herrn Verfassers sehen wir mit Verlangen entgegen.

---

## Vermischte Schriften.

Bulletins de l' Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique (vergl. Literar. Ber. Nr. XCI. S. 8.)

Tome XXI. II$^{me}$ Partie. 1854. p. 4. Différence des longitudes de Bruxelles et de Greenwich; note de M. A. Quetelet. — p. 6. Sur l'électricité des nuages orageux; par M. A. Quetelet, (ein sehr lesenswerther, mit grosser Klarheit geschriebener und für die Erklärung der betreffenden Erscheinungen wichtiger Aufsatz.). — p. 140. Note sur les deux équations fondamentales $\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ et $dy = f'(x).\Delta x$; par M. Lamarle. (ein für die Metaphysik der Differentialrechnung interessanter und wichtiger Aufsatz.). — p. 162. Études expérimentales sur la stadia-nivelante; par M. le capitaine Liagre (alle Geodäten machen wir auf diese Abhandlung aufmerksam). — p. 209. Éléments de la comète de mars 1854, calculés par M. Ern. Quetelet. — p. 539. Sur la direction et la grandeur des soulèvements qui ont affecté le sol de la Belgique; par M. I. C. Houzeau. — p. 552. Sur l'influence magnétique du soleil. Extrait d'une lettre du père Secchi, directeur de l'observatoire du Collége romain à M. Ad. Quetelet. — p. 556. Sur la météorologie nautique. Extrait d'une lettre de M. le professeur A. Erman, de Berlin, à M. Ad. Quetelet. — p. 562. Observations et recherches sur l'intensité magnétique et sur ses variations pendant une période de 25 ans, de 1829 à 1854; par M. Mahmoud, directeur de l'Observatoire de Caïre. (Diese wichtige Abhandlung eines egyptischen Astronomen ist auch in einem besonderen Abdrucke erschienen.). — p. 650. Sur la télégraphie électrique. Extrait d'une lettre de M. le prof. Zantedeschi, de Padoue, à M. Quetelet. — p. 658. Méthode pour déterminer la latitude, par les observations multiples d'une étoile, faites dans

le voisinage de sa plus grande élongation; par M. Liagre. (Man weiss, dass man in neuerer Zeit vielfach die Messung von Azimuthal-Winkeln statt der Vertikalwinkel zur Bestimmung der Breite in Vorschlag gebracht hat; hierzu liefert der Aufsatz des Herrn Liagre einen sehr verdienstlichen weiteren Beitrag.). — p. 825. Sur un projet de machine électro-magnétique-atmosphérique. par M. Lallemand. — p. 833. Sur le mémoire de M. Montigny intitulé: Essai sur des effets de réfraction et de dispersion produits par l'atmosphère (Suite). Rapport de M. Plateau et de M. Duprez.

Tome XXII. Iʳᵉ Partie 1855. p. 10. De l'influence des températures sur le développement de la végétation; par M. Quetelet. — p. 208. Sur la boussole électro-magnétique, proposée par M. Gloesener, prof. de physique à l'université de Liège. Rapport de M. Maus. p. 213. Rapport de M. Ad. De Vaux. — p. 216. Sur l'extension qu'a prise en Allemagne l'observation des phénomènes périodiques; note par M. Quetelet. — p. 219. Sur différentes questions de météorologie. Lettre de M. Kaemtz à M. Quetelet. — p. 232. Note sur un moyen très simple d'augmenter dans une proportion notable la résistance d'une pièce prismatique chargée uniformement; par M. E. Lamarle. — p. 363. Éclipse lunaire du 2 mai 1855. Note de M. Quetelet. — p. 365. Valeur absolu de la déclinaison et de l'inclinaison magnétique. Note de M. Quetelet. — p. 369. Resultats d' observations astronomiques et magnétiques faites en Espagne et en France aux mois d'août et de septembre 1853. Extrait d'une lettre de M. A. Erman de Berlin à M. Quetelet. — p. 473. Recherches sur les chaleurs spécifiques de quelques métaux à différentes températures par M. E. Bede. Rapport de M. Crahay. — p. 479. Sur la relation entre les températures et la durée de la végétation des plantes; par M. Ad. Quetelet. — p. 491. Sur la lunette méridienne avec cercle de Gambey et sur le niveau fixe qui y est attaché; par M. M. Ad. et Ernest Quetelet (ein in astronomischer Rücksicht mehrfaches Interesse darbietender Aufsatz.). — p. 503. Note sur un moyen notable très simple d'augmenter dans une proportion la résistance d'une pièce prismatique chargée uniformement; par M. Lamarle (Deuxième partie). — p. 526. Note sur les tremblements de terre en 1854, avec suppléments pour les années antérieures; par M. Alexis Perrey.

---

